



TRAITÉ

DES

PROPRIÉTÉS PROJECTIVES

DES FIGURES.

PARIS. — IMPRIMERIE DE GAUTHIER-VILLARS, SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER,
Rue de Seine-Saint-Germain, 10, près l'Institut.

TRAITÉ

DES

PROPRIÉTÉS PROJECTIVES

DES FIGURES,

OUVRAGE UTILE A CEUX QUI S'OCCUPENT DES APPLICATIONS DE LA GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE ET D'OPÉRATIONS GÉOMÉTRIQUES SUR LE TERRAIN;

PAR J.-V. PONCELET.

Il semble que, dans l'état actuel des Sciences mathématiques, le seul moyen d'empêcher que leur domaine ne devienne trop vaste pour notre intelligence, c'est de généraliser de plus en plus les théories que ces sciences embrassent, afin qu'un petit nombre de vérités générales et fécondes soit dans la tête des hommes, l'expression abrégée de la plus grande variété des faits particuliers.

DUPIN. *Développements de Géométrie.*

TOME PREMIER.

DEUXIÈME ÉDITION, REVUE, CORRIGÉE ET AUGMENTÉE D'ANNOTATIONS NOUVELLES.

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DE L'ÉCOLE IMPÉRIALE POLYTECHNIQUE, DU BUREAU DES LONGITUDES,

SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER,

Quai des Augustins, 55.

1865



PRÉFACE DE LA PREMIÈRE ÉDITION.

Cet ouvrage est le résultat des recherches que j'ai entreprises, dès le printemps de 1813, dans les prisons de la Russie : privé de toute espèce de livres et de secours, surtout distrait par les malheurs de ma patrie et les miens propres, je n'avais pu d'abord leur donner toute la perfection désirable. Cependant j'avais dès lors trouvé les théorèmes fondamentaux de mon travail, c'est-à-dire les principes sur la projection centrale des figures en général et des sections coniques en particulier, les propriétés des sécantes et des tangentes communes à ces courbes, celles des polygones qui leur sont inscrits et circonscrits, etc.

Abordant d'abord le cas le plus élémentaire et le plus facile, j'avais établi directement toute la théorie des cercles qui se coupent ou se touchent sur un plan, et j'étais ainsi parvenu à plusieurs des résultats que M. Gaultier a consignés dans un beau Mémoire lu à l'Institut en juin 1812, notamment ceux qui sont relatifs aux *centres de similitude* et aux *axes radicaux* des cercles. Étant déjà parti pour la Russie à cette époque, je n'avais pu avoir connaissance de ce Mémoire, qui ne fut d'ailleurs imprimé que l'année suivante, dans le XV[e] Cahier du *Journal de l'École Polytechnique*. Au reste, j'étais parvenu, dans mon travail, à des propriétés que M. Gaultier ne fait pas connaître, sans doute parce qu'elles étaient inutiles à son objet; ce sont précisément ces propriétés qui me conduisirent, dès 1813, à la plupart des conséquences que je me propose de développer ici, conséquences qui me semblent procurer à la Géométrie ordinaire des ressources qu'elle ne possédait pas auparavant, et qui peuvent être comparées, jusqu'à un certain point, à celles que fournit elle-même l'Analyse algébrique.

Quoi qu'il en soit, j'avais fait part de ces recherches à plusieurs anciens Élèves de l'École Polytechnique, mes compagnons d'infortune à Saratoff; et, dès mon retour en France, en septembre 1814,

je m'empressai de les communiquer, d'abord à M. Français, et peu de temps après à M. Servois, tous deux savants professeurs aux Écoles de l'Artillerie et du Génie, à Metz.

Depuis cette époque, je n'ai que fort peu ajouté à cette partie de mes recherches, et je me suis principalement attaché à les mettre en ordre et à les perfectionner; mais c'était à des intervalles éloignés et pendant les courts loisirs que me laissaient les devoirs de mon état. Elles auraient néanmoins déjà reçu le jour, sans des circonstances indépendantes de ma volonté. Quelques fragments de ces mêmes recherches ont seulement été publiés dans le tome VIII des *Annales de Mathématiques,* et postérieurement encore j'ai présenté à l'Académie royale des Sciences un Mémoire qui forme la première Partie de mon travail et en contient les principes fondamentaux.

On sent assez, sans qu'il soit besoin de le dire, que plusieurs des résultats auxquels je suis parvenu depuis 1813 ont dû être rencontrés, dans cet intervalle, par différents géomètres, et qu'il m'a fallu également renoncer à la priorité pour beaucoup d'autres, que je ne pouvais connaître qu'après des recherches pénibles dans une multitude d'ouvrages; j'en ai fait volontiers le sacrifice, préférant ainsi à la gloire de paraître toujours neuf celle d'être toujours vrai et utile. En cela j'ai suivi l'exemple de plusieurs géomètres recommandables, dont les noms sont souvent rappelés dans le cours de ces recherches. Si donc il arrive que je n'aie pas toujours indiqué exactement les premiers inventeurs de chaque théorème, on devra en accuser uniquement mon peu d'érudition.

Enfin, d'après la facilité avec laquelle les théories que j'expose conduisent à la plupart des propriétés générales et particulières des figures, on demeurera persuadé que le but de ce livre, quelque volumineux qu'il paraisse, est moins de multiplier le nombre de ces propriétés que d'indiquer la route que l'on doit suivre. En un mot, j'ai cherché, avant tout, à perfectionner la méthode de démontrer et de découvrir en simple Géométrie. Je serai satisfait, si l'on juge que j'y ai parfois réussi.

AVERTISSEMENT DE LA SECONDE ÉDITION.

L'intervalle de quarante-trois ans, écoulé entre cette nouvelle édition et la précédente, a d'autant plus besoin d'explication, que le premier volume du *Traité des Propriétés projectives des figures*, publié en 1822, a été promptement épuisé, et se vend, depuis un grand nombre d'années déjà, à des prix qu'on pourrait regarder comme scandaleux, si l'on venait à supposer qu'il s'est agi là d'une de ces spéculations qui, trop souvent de nos jours, entachent et rabaissent le commerce de la librairie et les utiles et honorables fonctions d'éditeur.

C'est pourquoi je me fais un devoir de protester contre toute supposition de cette espèce, en rappelant ici, en peu de mots, les causes d'un aussi long retard, parmi lesquelles d'ailleurs n'entre aucun sentiment de découragement ou d'indifférence scientifique de ma part.

Dans l'intervalle de 1815 à 1825, mon service d'ingénieur militaire m'ayant, bien que j'en aie rempli scrupuleusement les devoirs, laissé assez de loisirs pour cultiver la Mécanique et la Géométrie dont j'appréciais, avant tout, les utiles et fécondes ressources pour la pratique des arts, j'en profitai pour rédiger divers Mémoires de Géométrie spéculative ou appliquée, demeurés la plupart inédits jusqu'à l'époque de 1825, et dont je me suis efforcé de mettre sous les yeux du public éclairé les principaux éléments dans les volumes qui ont paru en 1862 et 1864, sous le titre d'*Applications d'Analyse et de Géométrie*.

Malheureusement, ou heureusement peut-être, les marques honorables d'intérêt que m'avaient values quelques travaux et inventions se rattachant à l'art de l'ingénieur, de la part de MM. les Inspecteurs généraux de l'Artillerie et du Génie, Valé, Baudrand, ainsi que de M. Arago, examinateur de l'École d'application de Metz, firent qu'on me proposa, en 1823 et 1824, de créer à cette École un Cours sur la science des machines, que la récente introduction de l'industrie anglaise en France y faisait vivement désirer. Ce fut sinon avec répugnance, du moins avec un vif sentiment de regret, que je consentis enfin, en 1825, à accepter cette tâche laborieuse à laquelle je n'étais nullement préparé, et qui allait, en me privant de tout loisir, ajourner indéfiniment la publication des travaux géométriques qui devaient faire suite au premier volume du *Traité des Propriétés projectives des figures*, travaux que d'éminents géomètres avaient jugés dignes, par leur caractère de nouveauté, d'être professés au Collége de France, destiné, comme on sait, par son illustre et libéral fondateur François Ier, à accueillir certaines idées repoussées par l'antique Sorbonne, tandis que d'autres académiciens, moins bien disposés en faveur de ces doctrines, traitaient, comme je l'ai rappelé ailleurs (*Applications d'Analyse et de Géométrie*), de Géométrie romantique, à quatre dimensions, cette partie de la science qualifiée dans ces derniers temps de l'épithète, un peu hasardée et peut-être ambitieuse, de Géométrie moderne.

Comme on peut le voir par un passage d'un *Article* de correspondance inséré au tome II des *Applications* (IVe Cahier, p. 528), ces préventions étaient partagées par mon illustre ami et protecteur François Arago, et par quelques autres partisans éclairés de la doctrine utilitaire du chancelier Bacon, ce promoteur de l'industrialisme anglais, qui redoutaient, non sans quelque raison, l'envahissement, en France, des exagérations du transcendantalisme philosophique, si familier à nos voisins, mais qui trop souvent conduit au matérialisme et au scepticisme moral.

M. Arago se hâta de me soustraire à de tels entraînements en me poussant, en 1825, comme malgré moi, à l'École de Metz. Toutefois, qu'étaient-ce que les théories du *Traité des Propriétés projectives des figures*, où l'on perd rarement de vue le sentiment de l'applicable et de l'utile, en comparaison de cette vaste extension que de plus heureux et de plus habiles ont su leur faire acquérir à partir de 1826 et 1827, sans craindre aucun empêchement ni reproche.

En m'exprimant ainsi sur la fin d'une longue et pénible carrière scientifique, la reconnaissance me fait un devoir de déclarer sans réserve, ni fausse modestie, qu'Arago, si contraire au développement des idées géométriques abstraites, avait bien voulu, lors de sa visite d'examen à Metz, en 1831, me proposer, au nom de mes illustres et honorés maîtres, Ampère, Fourier, Lacroix, Legendre, Poinsot et Poisson, la candidature à la place laissée vacante dans le sein de la section de Géométrie, à l'Académie des Sciences de l'Institut, par la mort du célèbre auteur de la *Mécanique céleste*, candidature excessivement flatteuse pour l'amour-propre d'un modeste officier du Génie, mais que je n'osai ni ne pouvais accepter par divers motifs inutiles à expliquer, et qui, à mon refus, a été dévolue à M. Libri.

A l'égard des principaux obstacles ou des causes diverses des retards éprouvés par mes publications, il me suffira de les résumer en peu de mots:

Pour tout ce qui concerne les publications étrangères à la Géométrie, je renverrai à la liste finale de la page 564 du tome Ier des *Applications d'Analyse et de Géométrie;* et, quant aux fonctions scientifiques, politiques ou administratives dont j'ai été investi à diverses époques, elles peuvent être énumérées ainsi :

Années 1825 et 1826. — Nomination à la place de professeur de Mécanique à l'École d'application de l'Artillerie et du Génie.—Voyage (aux frais du département de la Guerre) d'explorations et d'études dans les usines de France, de Belgique et d'Allemagne, qui devait être suivi d'une autre visite plus importante encore dans les principaux ateliers de la Grande-Bretagne, si je ne fusse tombé dangereusement malade.

1827 à 1830.—Suite des leçons à l'École de Metz. — Cours professionnel public et gratuit: Leçons du soir sur la *Mécanique industrielle*, à l'hôtel de ville de Metz. — Expériences hydrauliques sous les auspices du Ministre de la Guerre, avec le concours de feu le capitaine du Génie Lesbros, pour les besoins du Cours de l'École d'application; expériences qui avaient été précédées, en 1824, d'autres études expérimentales sur les roues hydrauliques.

1830 à 1834. — Membre du Conseil municipal de la ville de Metz, et secrétaire du Conseil général du département de la Moselle.

1834. — Membre de l'Académie des Sciences de l'Institut. — Chargé des Rapports

scientifiques et de la rédaction du *Mémorial de l'Officier du Génie*, près du Comité des fortifications, fonctions que je remplissais intérimairement et durant la suspension des leçons de l'École d'Application de Metz. — Adjoint définitivement au Comité des fortifications, et cessation des fonctions de Professeur à l'École de Metz, où je fus remplacé par M. Morin, détaché à cette École depuis 1828.

1838 à 1848. — Professeur à la Faculté des Sciences de Paris, où je fus chargé de créer le Cours de Mécanique physique et expérimentale à la Sorbonne. — De juillet à septembre 1841, expériences hydrauliques au Château-d'Eau de Toulouse, sur les pertes de force vive dues aux étranglements dans les conduites.

1848 à 1851. — Membre de l'Assemblée constituante, nommé Professeur à l'École d'Administration et au Collége de France, avec Lamartine, Garnier-Pagès, Jean Reynaud, etc., et mon très-honorable et savant ami de Senarmont, Directeur des études de cette éphémère, utile et regrettable institution, créée sous le ministère de M. Carnot. — Commandant en chef de l'École Polytechnique, et par intérim des gardes nationales de la Seine et autres départements, pendant les cruelles journées de juin 1848. — Réforme des études et des programmes de l'École Polytechnique.

1851 à 1858. — Président de la classe des machines et outils aux Expositions universelles de Londres et de Paris. — Chargé du Rapport historique sur les machines-outils, à l'occasion de la première de ces Expositions. — Voyages d'exploration dans les filatures et tissages de soie, de lin et de chanvre en France, entrepris pour constater l'état de ces branches d'industrie.

Pour dernière indication j'ajouterai que le premier volume du *Traité des Propriétés projectives des figures* est entièrement conforme à l'édition de 1822, sauf quelques annotations placées à la fin de ce volume, et rappelées par des renvois dans le cours de l'ouvrage;

Qu'enfin le tome II comprend : les théories générales des centres des moyennes harmoniques, de *réciprocité polaire* (dualité), de l'*Analyse des transversales*, et leurs principales applications aux propriétés projectives des courbes et des surfaces géométriques, jusqu'ici demeurées inédites, et par conséquent hors de la portée du plus grand nombre des lecteurs.

Paris, 14 Décembre 1864.

INTRODUCTION.

A l'époque où MONGE commença à professer la *Géométrie descriptive*, ou plutôt cette Géométrie générale qui fait le caractère principal des ouvrages de cet illustre Professeur et de ceux qui ont suivi ses traces dans la même carrière, MONGE, disons-nous, avait raison de recommander aux Élèves l'étude de la *Géométrie analytique*, celle-ci étant très-propre à donner aux conceptions géométriques cette extension et cette généralité qui sont essentiellement dans sa nature. En effet, à cette époque, la science était tout entière à créer, et les principes, jusqu'alors suivis et reçus dans la *Stéréotomie*, étaient beaucoup trop restreints pour servir de base à la nouvelle *Géométrie*. Les leçons de MONGE d'ailleurs s'adressaient à des hommes appelés à parcourir les diverses branches des connaissances humaines, dans tout ce qu'elles ont de plus relevé.

Les choses sont aujourd'hui différentes à bien des égards ; les écrits de MONGE, ceux de ses nombreux disciples, ont popularisé, si je puis m'exprimer ainsi, les idées générales; leur influence s'est manifestée jusque dans les Éléments de la science, et cette influence s'étendra tous les jours davantage à mesure que les applications de la nouvelle Géométrie deviendront plus multipliées, plus nécessaires au grand nombre de ceux qui se vouent aux arts. Peu à peu aussi les connaissances algébriques deviendront moins indispensables, et la science, réduite à ce qu'elle doit être, à ce qu'elle devrait être déjà, sera ainsi mise à la portée de cette classe d'hommes qui n'a que des moments fort rares à y consacrer.

Les ouvrages mêmes de MONGE, ceux de ses Élèves, parmi lesquels nous devons surtout citer l'auteur des *Développements de Géométrie*, ont prouvé que la Géométrie descriptive, «la langue de l'artiste et de l'homme de génie,» peut se suffire à elle-même, et atteindre à toute la hauteur des conceptions de l'Analyse algébrique.

Cependant il reste encore quelque chose à faire; toutes les lacunes, tous les vides ne sont pas encore remplis, et ces lacunes, ces vides se font surtout sentir dans ce qui semble tenir de plus près aux connaissances préliminaires de la Géométrie. Les grandes questions sont résolues, la doctrine est faite,

mais elle repose sur certaines données particulières qu'il n'est pas aisé d'acquérir, même dans les Traités de Géométrie analytique. En effet, la Géométrie descriptive ne peut opérer sur les corps à trois dimensions qu'en ramenant les diverses questions qui leur sont relatives à d'autres concernant les figures tracées simplement sur un plan, et c'est là même ce qui en constitue toute la beauté et l'utilité. D'ailleurs les surfaces les plus générales ont pour génératrices des lignes constantes ou variables, dont les projections sur les plans coordonnés sont déterminées à chaque instant du mouvement; les éléments du contact simple en un point d'une surface ne peuvent se déterminer autrement que par ceux de deux génératrices quelconques passant par ce point, et M. DUPIN a prouvé que les éléments de contact du second ordre dépendent pareillement de ceux du même ordre relatifs à trois sections normales, et ainsi de suite pour les contacts d'ordre supérieur. Or on est dans l'usage de regarder comme remplie la tâche du géomètre, lorsqu'il est ainsi parvenu à ramener les opérations de l'espace à celles qui concernent simplement les lignes décrites sur un plan. C'est donc supposer que la Géométrie descriptive plane soit faite, et elle ne l'est pas encore.

D'un autre côté, les méthodes générales, indiquées par la Géométrie à trois dimensions, ne sont pas toujours les plus expéditives de celles qu'on puisse mettre en usage ; et, pour remplir son but, elle est quelquefois obligée de recourir aux propriétés particulières des figures. Les arts d'ailleurs et le goût s'accordent à n'employer que des formes dont la simplicité et la régularité présentent des avantages sous le rapport de l'exécution : la ligne droite, le cercle, les sections coniques et quelques autres courbes aussi faciles à décrire, en sont les éléments nécessaires; il faut d'abord savoir construire ces lignes, opérer sur elles, soit qu'on les considère d'une manière isolée, soit qu'on les considère dans leurs diverses combinaisons, pour pouvoir s'occuper ensuite de ce qui appartient aux formes plus générales qui en dérivent. C'est ce qu'ont parfaitement senti les plus grands géomètres de notre époque, qui se sont souvent complu à descendre des hauteurs de la science pour s'occuper de questions en apparence fort simples, mais qui ne laissaient pas de présenter des difficultés à vaincre.

C'est donc cette Géométrie particulière qu'il faut chercher actuellement à perfectionner, à généraliser, à rendre enfin indépendante de l'Analyse algébrique; c'est l'étude des propriétés des lignes et des surfaces individuelles qu'il faut chercher à ramener dans le domaine de la simple Géométrie, à laquelle elle semble encore se soustraire dans certains genres de questions.

Les efforts qui, à diverses époques, ont été faits par les géomètres pour remplir ce but n'ont point été entièrement infructueux; une foule de pro-

priétés des lignes et des surfaces du second ordre ont été découvertes par les principes de la Géométrie rationnelle, un grand nombre de questions particulières ont été résolues ; mais il reste encore beaucoup à faire en ce genre, non-seulement sous le rapport de l'invention, mais encore sous celui de la méthode, des principes.

En effet, tandis que la Géométrie analytique offre, par la marche qui lui est propre, des moyens généraux et uniformes pour procéder à la solution des questions qui se présentent, à la recherche des propriétés des figures ; tandis qu'elle arrive à des résultats dont la généralité est pour ainsi dire sans bornes, l'autre procède au hasard ; sa marche dépend tout à fait de la sagacité de celui qui l'emploie, et ses résultats sont, presque toujours, bornés à l'état particulier de la figure que l'on considère. Par les efforts successifs des géomètres, les vérités particulières se sont multipliées sans cesse, mais il est arrivé rarement que la méthode et la théorie générale y aient gagné ; encore peut-on reprocher à la Géométrie rationnelle, surtout à la Géométrie ancienne, de faire un usage trop fréquent et trop étendu du mécanisme des proportions, qui n'est au fond qu'un calcul déguisé, comme l'a observé un savant géomètre, M. Gergonne.

Ce reproche ne saurait s'adresser à la Géométrie dans l'espace, dont nous avons déjà parlé, à cette Géométrie générale créée par le génie de Monge ; sa marche est exempte d'hésitation, elle procède avec ordre, les lignes et les surfaces qu'elle contemple sont indéfinies, rien ne limite la pensée, et ses résultats ont, jusqu'à un certain point, toute l'extension de ceux de l'Analyse algébrique, extension qui souvent étonne et embarrasse celui qui l'emploie. Nous avons dit aussi que ce caractère de la *Géométrie* de Monge lui vient précisément de l'usage qu'elle a fait, qu'elle fait encore, des considérations de l'Analyse, de ce mélange, de cette fusion, en quelque sorte intime, de ces deux manières de traiter la grandeur figurée.

Quelle est donc cette influence, cette puissance en quelque sorte extensive de l'Analyse algébrique? Pourquoi la Géométrie ordinaire ou ancienne en est-elle naturellement privée, et quel moyen pourrait-on mettre en usage pour l'en faire jouir? Voilà des questions qu'il semble utile de résoudre et de méditer pour les progrès de la simple Géométrie. Nous nous bornerons ici à hasarder quelques mots, à présenter quelques vues générales, remettant à une autre époque de développer ce sujet avec toute l'étendue qu'il mérite.

L'Algèbre emploie des signes abstraits, elle représente les grandeurs absolues par des caractères qui n'ont aucune valeur par eux-mêmes, et qui laissent à ces grandeurs toute l'indétermination possible ; par suite elle opère et raisonne forcément sur les signes de non-existence comme sur des quantités

toujours absolues, toujours réelles : a et b, par exemple, représentant deux quantités quelconques, il est impossible, dans le cours des calculs, de se rappeler et de reconnaître quel est l'ordre de leurs grandeurs numériques; l'on est, malgré soi, entraîné à raisonner sur les expressions $a-b$, $\sqrt{a-b}$, etc., comme si c'étaient des quantités toujours absolues et réelles. Le résultat doit donc lui-même participer de cette généralité, et s'étendre à tous les cas possibles, à toutes les valeurs des lettres qui y entrent; de là aussi ces formes extraordinaires, ces êtres de raison, qui semblent l'apanage exclusif de l'Algèbre.

Or on est conduit à toutes ces conséquences, non-seulement quand on emploie les signes et les notations de l'Algèbre, mais aussi toutes les fois qu'en raisonnant sur des grandeurs quelconques on fait abstraction de leurs valeurs numériques et absolues; en un mot, toutes les fois qu'on emploie le raisonnement sur des grandeurs *indéterminées*, c'est-à-dire le *raisonnement* purement *implicite*. C'est ce qui arrive, en particulier, dans la Géométrie, lorsque la figure se complique, ou que les rapports qui en lient les parties se multiplient, parce qu'il n'est plus possible alors de discerner, au simple coup d'œil, l'ordre de grandeur et de situation de ces parties. C'est encore ce qui a lieu quand certaines de ces parties sont l'objet d'une recherche faite sur la figure, ou qu'on les suppose inconnues à la fois de grandeur et de situation; et voilà pourquoi aussi la marche des Anciens, qu'ils nommaient *analytique*, et à laquelle ils attachaient une si grande importance, n'était point tout à fait dépourvue de cette généralité, de cette force qui appartient à l'Algèbre. Enfin, et c'est surtout ce qui arrive quand on fait abstraction de la figure et qu'on se dispense de la décrire; de là, et principalement de là, cette généralité de conceptions et cette grande extension de la Géométrie qui considère les objets dans l'espace; de là du moins provient la facilité avec laquelle les géomètres ont transporté les notions abstraites et figurées, d'abord manifestées par le calcul algébrique, dans le domaine de cette Géométrie.

Dans la Géométrie ordinaire, qu'on nomme souvent la *synthèse*, les principes sont tout autres, la marche est plus timide ou plus sévère; la figure est décrite, jamais on ne la perd de vue, toujours on raisonne sur des grandeurs, des formes réelles et existantes, et jamais on ne tire de conséquences qui ne puissent se peindre, à l'imagination ou à la vue, par des objets sensibles; on s'arrête dès que ces objets cessent d'avoir une existence positive et absolue, une existence physique. La rigueur est même poussée jusqu'au point de ne pas admettre les conséquences d'un raisonnement, établi dans une certaine disposition générale des objets d'une figure, pour une autre disposition

également générale de ces objets, et qui aurait toute l'analogie possible avec la première; en un mot, dans cette Géométrie restreinte, on est forcé de reprendre toute la série des raisonnements primitifs, dès l'instant où une ligne, un point ont passé de la droite à la gauche d'un autre, etc.

Or voilà précisément ce qui en fait la faiblesse; voilà ce qui la met si fort au-dessous de la Géométrie nouvelle, surtout de la Géométrie analytique. S'il était possible d'y appliquer le raisonnement implicite, en faisant abstraction de la figure, si seulement il était permis d'y appliquer les conséquences de ce genre de raisonnement, cet état de choses n'existerait pas, et la Géométrie ordinaire, sans pour cela employer les calculs et les signes de l'Algèbre, se montrerait, à bien des égards, la rivale de la Géométrie analytique, de même qu'elle l'est déjà, avons-nous dit, toutes les fois qu'il n'est pas possible de conserver la forme du raisonnement *explicite*.

Considérons une figure quelconque, dans une position générale et en quelque sorte indéterminée, parmi toutes celles qu'elle peut prendre sans violer les lois, les conditions, la liaison qui subsistent entre les diverses parties du système; supposons que, d'après ces données, on ait trouvé une ou plusieurs relations ou propriétés, soit *métriques*, soit *descriptives*, appartenant à la figure, en s'appuyant sur le raisonnement explicite ordinaire, c'est-à-dire par cette marche que, dans certains cas, on regarde comme seule rigoureuse. N'est-il pas évident que si, en conservant ces mêmes données, on vient à faire varier la figure primitive par degrés insensibles, ou qu'on imprime à certaines parties de cette figure un mouvement continu d'ailleurs quelconque, n'est-il pas évident que les propriétés et les relations, trouvées pour le premier système, demeureront applicables aux états successifs de ce système, pourvu toutefois qu'on ait égard aux modifications particulières qui auront pu y survenir, comme lorsque certaines grandeurs se seront évanouies, auront changé de sens ou de signe, etc., modifications qu'il sera toujours aisé de reconnaître *à priori*, et par des règles sûres?

C'est du moins ce que l'on conclurait sans peine du raisonnement implicite, et c'est ce qui, de nos jours, est assez généralement admis comme une sorte d'axiome dont l'évidence est manifeste, incontestable, et n'a pas besoin d'être démontrée : témoin le principe de la *corrélation des figures*, admis par M. Carnot, dans sa *Géométrie de position*, pour établir la règle des signes; témoin encore le principe des *fonctions*, employé par nos plus grands géomètres pour établir les bases de la Géométrie et de la Mécanique; témoin enfin le *Calcul infinitésimal*, la *Théorie des limites*, la *Théorie générale des équations*, et tous les écrits de nos jours, où l'on s'attache à une certaine généralité dans les conceptions.

Or ce principe, regardé comme un axiome par les plus savants géomètres, est ce qu'on peut nommer le *principe* ou la *loi de continuité* des relations mathématiques de la grandeur abstraite et figurée.

Ce n'est pas qu'au reste le principe de continuité ait été admis dans toute son étendue et sans aucune restriction par les différents géomètres qui s'en sont servis, soit ouvertement, soit tacitement; car, sans cela, ils se seraient jetés dans toutes ces considérations métaphysiques des *imaginaires*, qui ont été constamment repoussées du sanctuaire étroit de la Géométrie rationnelle. Son emploi explicite, dans cette science, s'est presque toujours borné aux états réels d'un système qui se transforme par degrés insensibles, et c'est même là ce qui a donné lieu aux *infiniment petits*, aux *infiniment grands*, que des géomètres cherchent encore, de nos jours, à bannir du domaine des sciences exactes. Cependant, nous avons montré plus haut que ce principe revient uniquement à admettre les conséquences du raisonnement implicite, et que, dans bien des circonstances, il était absolument impossible, même dans la Géométrie ancienne (*), d'éviter ce genre de raisonnement. Cependant encore, il ne serait pas difficile d'établir ce principe, d'une manière entièrement directe et rigoureuse, à l'aide des calculs mêmes de l'Algèbre, dont la certitude n'est du moins plus mise en doute de nos jours, grâce à deux siècles d'efforts et de succès!

Toutefois cela serait-il bien nécessaire, et ne serait-on pas en droit d'admettre, dans toute son étendue, le principe de continuité en Géométrie rationnelle, comme on l'a fait d'abord dans le calcul algébrique, puis dans l'application de ce calcul à la Géométrie, si ce n'est comme moyen de démonstration, du moins comme moyen de découverte ou d'invention? N'est-il pas, pour le moins, aussi nécessaire d'enseigner les ressources employées, à diverses époques, par les hommes de génie, pour parvenir à la vérité, que les efforts pénibles qu'ils ont été ensuite obligés de faire pour les démontrer selon le goût des esprits ou timides ou peu capables de se mettre à leur portée?

(*) Un exemple bien simple de la nécessité d'admettre la loi de continuité nous est offert par la Prop. XXI du Liv. III de la *Géométrie* de M. Legendre, ouvrage connu par la rigueur des démonstrations et des principes. Il s'agit de démontrer la similitude des triangles qui ont les côtés perpendiculaires; or le raisonnement, pour être général, suppose les propriétés des quadrilatères non convexes, qui ne font pas partie des Éléments. Il est vrai que l'auteur montre ensuite que la proposition a lieu pour tous les cas, et il serait aisé d'établir la démonstration, sans aucune restriction, et cela pour le cas général où, au lieu d'être perpendiculaires, les côtés formeraient des angles égaux quelconques; il suffirait, en effet, de supposer que l'un des triangles tournât d'une quantité angulaire convenable. On pourrait même étendre cette démonstration à des polygones quelconques; mais il est bien des exemples, plus compliqués que celui-ci, où la difficulté ne serait pas aussi facile à vaincre.

Enfin, quel mal pourrait-il en résulter, surtout si l'on se montrait sévère à conclure, si l'on ne se payait jamais de demi-aperçus, si l'on n'admettait jamais l'*analogie* et l'*induction*, qui sont souvent trompeuses, et qu'il ne faut pas confondre avec le principe de continuité? En effet, l'analogie et l'induction concluent du particulier au général, d'une série de faits isolés, sans liaison nécessaire, en un mot discontinus, à un fait général et constant : la loi de continuité veut, au contraire, que l'on parte d'un état général et en quelque sorte indéterminé du système, c'est-à-dire tel, que les conditions qui le régissent ne soient jamais remplacées par des conditions plus générales encore, et qu'elles subsistent dans une série d'états semblables, provenus les uns des autres par gradation insensible; elle exige, en outre, que les objets auxquels elles s'appliquent soient, de leur nature, continus ou soumis à des lois qu'on puisse regarder comme telles. Certains objets peuvent bien changer de position, par suite des variations survenues dans le système, d'autres peuvent s'éloigner à l'infini, ou se rapprocher à des distances insensibles, etc.; les relations générales subissent alors des modifications, sans cesser pour cela de s'appliquer au système.

La seule difficulté consiste, comme on voit, à bien entendre ce qu'on veut dire par ce mot *état général* ou *indéterminé* et *état particulier* d'un système; or, pour chaque cas, la distinction est facile : par exemple, une droite, qui en rencontre une autre sur un plan, est dans un état général par rapport au cas où elle devient perpendiculaire ou parallèle à cette droite. Pareillement une ligne, droite ou courbe, qui en rencontre une autre sur un plan, est dans une situation générale et indéterminée à l'égard de cette autre, et la même chose a lieu encore quand elle cesse de la rencontrer, pourvu que ces deux états ne supposent aucune relation particulière de grandeur ou de position entre ces lignes; le contraire aurait évidemment lieu si elles devenaient ou tangentes, ou asymptotes, ou parallèles, etc.; elles seraient dans un état particulier à l'égard de l'état primitif.

L'admission ouverte de la loi de continuité, dans les recherches géométriques, conduira nécessairement à des notions singulières, à de véritables paradoxes; mais ces notions, ces paradoxes ont subsisté et subsistent également dans l'Analyse algébrique, et n'ont pourtant point arrêté sa marche ni ses progrès. D'ailleurs est-il raisonnable de repousser, en Géométrie, des notions généralement admises en Algèbre, et dont personne ne conteste plus la rigueur? N'y a-t-on pas déjà reçu les infiniment petits, les infiniment grands, dont l'existence est purement hypothétique? Qui empêcherait enfin d'y recevoir aussi les considérations relatives aux imaginaires?

La *Géométrie* d'Euclide a certainement de très-grands avantages : elle

accoutume l'esprit à la rigueur, à l'élégance des démonstrations et à l'enchaînement méthodique des idées; sous ces divers rapports, elle est digne de notre admiration et mérite seule de constituer la base des Éléments. Ce serait, sans doute, une grande témérité que de chercher à introduire, dans cette Géométrie, les expressions figurées de l'Analyse; car, d'après la simplicité des formes qu'elle envisage, cette innovation serait, pour le moins, aussi inutile que dangereuse. En effet, il n'y est guère question que des proportions des figures les plus régulières; rarement y considère-t-on leur manière d'être mutuelle, ou, si l'on veut, leurs dépendances relatives à la disposition des points et des lignes. Or c'est précisément cette dernière dépendance entre des figures qui paraissent, au premier abord, n'avoir rien de commun, qui peut exiger qu'on introduise, dans le langage et les conceptions de la Géométrie, les expressions et les notions abstraites de l'Analyse; elles seules, en effet, peuvent permettre d'établir un point de contact, sinon absolu, au moins fictif, entre certaines figures et certains résultats géométriques.

Cette manière de raisonner, quoique souvent abstraite et figurée, ne saurait entraîner à l'erreur, parce qu'elle est fondée sur des rapprochements en eux-mêmes rigoureux et exacts; elle a d'ailleurs l'avantage d'agrandir les idées, de lier par une chaîne continue des vérités en apparence lointaines, et de permettre d'embrasser dans un seul théorème une foule de vérités particulières. Si, après les travaux géométriques des savants illustres qui composent la moderne École, on peut encore former l'espoir de faire faire quelques progrès vraiment utiles à la science de l'étendue, ce ne peut être évidemment qu'en suivant de près leurs traces, qu'en cherchant sans cesse à généraliser le langage et les conceptions de la Géométrie.

Ce serait ici le lieu de montrer comment l'admission de la continuité en Géométrie conduit, d'une manière naturelle et nécessaire, à l'interprétation de toutes les notions abstraites ou métaphysiques qui appartiennent à la grandeur figurée; nous aurions à étudier et à démontrer la loi de l'influence qu'exerce la position sur les signes, ce qui nous conduirait à considérer, dans leur rapport, l'Analyse algébrique et la Géométrie, à résoudre les difficultés et les objections que ce rapprochement a fait naître jusqu'à cette heure; par là, nous justifierions, d'une manière en quelque sorte rigoureuse, le principe de continuité et dans sa nature et dans ses applications; mais notre but, avons-nous dit, n'a été que de présenter quelques vues générales, quelques aperçus sur le moyen de procurer à la Géométrie ordinaire ce caractère d'extension qui lui manque, et que possède si bien la Géométrie analytique.

Je me propose d'ailleurs de donner, dans le cours de cet Ouvrage, quelques éclaircissements sur les applications du principe de continuité, à mesure qu'il pourra se présenter des circonstances favorables pour le faire, sans trop déranger la marche générale des idées. Car mon objet n'y est point de démontrer ce principe, encore moins d'en adopter sans réserve toutes les conséquences; je veux seulement fixer l'attention des géomètres sur son utilité, signaler quelques-unes des applications que l'on en a faites, souvent sans s'en douter; en jeter en avant quelques autres, moins évidentes et moins faciles à admettre, après les avoir justifiées toutefois par la marche du raisonnement ordinaire; faire voir, en un mot, qu'on ne traite point encore la Géométrie avec toute l'extension qu'elle comporte, et qu'il reste beaucoup à faire pour la rendre, sous ce rapport, la rivale de l'Analyse algébrique.

En m'arrêtant quelque temps au développement de ces idées, j'annonce des considérations singulières et non accoutumées, je préviens les objections qu'on pourrait leur faire, je lève enfin les scrupules qui auraient pu naître dans l'esprit des personnes qui, ne voulant absolument admettre, dans les recherches géométriques, d'autres principes et d'autre genre de démonstration que ceux qui nous viennent des Anciens, regardent, avec raison, la Géométrie pure comme une science depuis longtemps faite, et dont la marche et la doctrine ne sont plus susceptibles de perfectionnements.

Mais le défaut de généralité et d'extension de la Géométrie ordinaire n'est point le seul qu'on puisse lui adresser; nous avons dit qu'elle manque encore de méthodes directes et uniformes pour procéder à la recherche de la vérité, et qu'elle fait un usage trop fréquent, surtout trop étendu, du mécanisme des proportions.

Encore une fois, ce dernier reproche ne saurait s'adresser à cette Géométrie générale de l'École de Monge, qui, des propriétés descriptives de l'espace, conclut celles des figures décrites sur un plan, pour repasser ensuite à ce qui concerne les figures à trois dimensions; et la même exception doit être faite, jusqu'à un certain point, pour les principes de la Théorie des transversales, car elle n'emploie uniquement que des rapports de lignes, et elle se borne à les multiplier entre eux, sans jamais se permettre de les décomposer: autrement dit, elle ne fait guère usage que des équations à deux termes et de leurs combinaisons les plus évidentes et les plus élémentaires.

Il ne s'agit ici que de cette Géométrie ancienne, de cette Géométrie cultivée par Euclide, Archimède, Apollonius, et plus récemment encore par les Viète, les Fermat, les Grégoire de Saint-Vincent, les Halley, les Viviani, les R. Simson, etc., de cette Géométrie mixte ou particulière enfin,

qui, mettant en œuvre une multitude de relations et de lignes auxiliaires, a une marche à la fois embarrassée et incertaine.

En réfléchissant attentivement à ce qui fait le principal avantage de la Géométrie descriptive et de la Méthode des coordonnées, à ce qui fait que ces branches des Mathématiques offrent le caractère d'une véritable doctrine, dont les principes, peu nombreux, sont liés et enchaînés d'une manière nécessaire et par une marche uniforme, on ne tarde pas à reconnaître que cela tient uniquement à l'usage qu'elles font de la projection.

En effet, la Méthode des coordonnées rapporte les objets, décrits dans un plan ou dans l'espace, à deux droites ou à trois plans fixes au moyen de deux ou de trois systèmes de droites abaissées, des différents points de la figure, parallèlement à ces axes ou à ces plans, ce qui revient proprement à faire la projection de ces points sur les axes et les plans dont il s'agit. La Géométrie descriptive considère également les projections des figures dans l'espace, mais seulement sur deux plans coordonnés, ce qui est un degré de simplification; elle pourrait même ne faire usage que d'un seul plan de projection, en indiquant la hauteur des points au-dessus de ce plan par des *cotes*, comme il arrive dans certains levés militaires, et comme cela est généralement usité en Fortification (*), où le peu de régularité des formes dans le sens vertical, joint à leur peu de relief relativement aux dimensions horizontales, prête difficilement à la représentation au moyen de projections verticales.

Voici donc quel est l'avantage de ces différentes méthodes : par la projection des figures planes sur des droites, on réduit l'examen des relations de ces figures à celui des relations beaucoup plus simples entre les distances comprises sur les axes de projections; au lieu de deux dimensions, on n'en a souvent plus qu'une à considérer, ou, si l'on en a deux, elles sont toujours mesurées dans des directions parallèles ou sur les mêmes droites; des réflexions analogues sont applicables aux coordonnées dans l'espace. D'ailleurs

(*) Dans ce système de projection, la position absolue d'une droite dans l'espace est indiquée par les cotes de deux points de sa projection; celle d'un plan l'est par sa trace horizontale et la cote d'un quelconque de ses points, ou par la projection cotée de sa ligne de plus grande pente, ou par les cotes de trois quelconques de ses points, dont on a la projection, etc. Quant à la manière de définir les surfaces, on est dans l'usage, surtout pour celles qui ne sont pas assujetties à une loi rigoureuse, de se donner la suite des tranches parallèles au plan de projection, et leurs cotes au-dessus de ce plan; mais il est évident que, dans la plupart des cas, on peut se contenter, comme en Géométrie descriptive, de connaître le mode particulier de génération de la surface, en se donnant, par des cotes, les points, les droites ou plans fixes auxquels il se rapporte. A l'égard des génératrices, si elles sont planes et constantes de forme, il suffit d'avoir le rabattement de

la théorie des lignes proportionnelles et la proposition de Pythagore, qui sont les bases de la Géométrie, suffisent, dans tous les cas, pour repasser de ces relations particulières aux relations générales qui subsistent entre les objets mêmes de la figure; de là doit donc résulter à la fois uniformité et simplicité dans la méthode, mais aussi nécessité d'employer des calculs plus ou moins compliqués, et impossibilité de pouvoir jamais opérer directement sur les figures ou sur les grandeurs graphiques qui les composent. Malgré ce dernier désavantage, qui cesse d'en être un lorsqu'il ne s'agit que d'examiner les relations purement métriques d'une figure, on a vraiment lieu de s'étonner que, dans les Éléments, on fasse si peu usage de la considération des projections pour simplifier à la fois les énoncés et les démonstrations de certains théorèmes.

Pour montrer un seul exemple de cette application, nous considérerons un polygone quelconque plan, coupé par une droite transversale arbitraire. Si, en effet, on projette ce polygone sur une nouvelle droite quelconque, par des parallèles à la première, et si l'on observe que les rapports des distances qui appartiennent à un même côté restent les mêmes en projection, on en conclura aisément la relation connue entre les différents segments formés par la transversale sur les côtés du polygone; car cette relation se réduira à une simple identité pour la projection.

La Théorie des transversales, qui, suivant la remarque déjà faite par M. Carnot, n'est à proprement parler que la Théorie des coordonnées prises sur une même droite, et réduite par conséquent à un plus grand degré de simplicité, n'est donc qu'un corollaire, en quelque sorte évident, des principes de la Méthode des projections. Or un grand nombre d'autres théo-

---

l'une quelconque d'entre elles sur le plan de projection. Enfin les lignes à double courbure peuvent être définies par leur projection et par une surface quelconque qui en contiendrait les différents points. En un mot, la figure dans l'espace doit être tellement définie, qu'on puisse aisément trouver la cote d'un de ses points dont on aurait simplement la projection. Il est évident que la plupart des figures employées dans les arts se prêtent, sans difficultés, à ces diverses conditions; en sorte qu'il doit être possible de résoudre sur elles, directement et à l'aide d'un seul plan de projection, toutes les questions qui sont du ressort de la Géométrie descriptive ordinaire.

Les premiers essais, en ce genre, ont été faits à l'École du Génie de Mézières, et ils sont dus à MM. de Chatillon, Milet de Mureau, Dubuat, Meusnier et Monge. Dans un Mémoire, qui a pour date l'année 1775, Meusnier a fait une application fort heureuse du tracé, par courbes horizontales, pour la recherche du plan tangent (Dupin, *Essai historique sur Monge*, pages 137 et suiv.). Un de mes anciens camarades à l'École Polytechnique et à l'École de Metz, le Capitaine du Génie Noizet, a fait, de cette partie de la Géométrie descriptive, l'objet de ses méditations; espérons qu'il n'en restera pas là, et qu'après avoir donné à ses recherches le développement dont elles sont susceptibles, il consentira à en faire jouir ses camarades, à qui ces recherches pourront être plus particulièrement utiles.

rèmes sur les polygones et sur les polyèdres se rattachent également, comme on sait, à ces principes. Mais poursuivons.

Nous avons dit que la Géométrie descriptive, telle qu'on l'emploie d'ordinaire, a, sur celle des coordonnées, l'avantage de ne faire usage que de deux plans de projection. De plus, elle opère directement et graphiquement sur les figures de projection, et, par des opérations graphiques encore, elle remonte à ce qui concerne la figure même dans l'espace. En un mot, toutes les relations ou propriétés descriptives du plan sont traduites, par elle, en relations ou propriétés de l'espace, et réciproquement. De là donc, indépendamment du caractère d'extension qu'elle imprime aux objets de ses conceptions, doit résulter une foule de rapprochements et de conséquences infiniment profitables à la simple Géométrie et à la Géométrie à trois dimensions, ce dont Monge a montré les plus beaux exemples dans sa *Géométrie descriptive* et dans les différents Mémoires qu'il a publiés depuis, parmi les Recueils de l'École Polytechnique. Il est évident que ces avantages sont uniquement dus à la nature même de la projection qui, en modifiant la forme et l'espèce particulière des figures, les place dans des circonstances ou plus générales ou au contraire plus restreintes, sans pour cela en détruire les relations et propriétés génériques, ou en les modifiant seulement d'après des lois fort simples et toujours faciles à deviner et à saisir. Tout autre mode de déformation n'aurait point évidemment les mêmes avantages.

Mais la méthode des projections ne se borne point là, et ses avantages ne sont point limités à ceux qui appartiennent en propre à la Géométrie descriptive ordinaire et à la Théorie des coordonnées. En effet, dans l'une, la projection réduit les lignes et les surfaces à une seule dimension en longueur, et, dans l'autre, les lignes courbes restent il est vrai des courbes, mais les surfaces sont représentées par des aires planes; c'est un avantage sous un certain rapport, mais c'est un inconvénient sous plusieurs autres, notamment en ce que les dimensions effectives de ces objets ne peuvent point se conclure directement de leurs projections, comme cela a lieu pour les simples distances dans le premier cas, et pour les simples courbes dans le second. Or, il est une manière plus générale de considérer la projection, c'est de projeter les lignes courbes, planes ou à double courbure, sur d'autres lignes planes ou à double courbure, et de projeter pareillement les surfaces courbes quelconques suivant d'autres surfaces pareilles; c'est-à-dire qu'une ligne tout entière sera représentée par une ligne en projection, et une surface tout entière par une autre surface du même genre : c'est ce qu'on peut nommer proprement la *projection-relief* des lignes et des surfaces.

Cette méthode, il est vrai, ne sera pas, sous le rapport des constructions,

aussi avantageuse que celle de la Géométrie descriptive ordinaire; mais elle aura la propriété de conserver la plus grande analogie possible entre la figure primitive et sa dérivée, et de permettre ainsi de ramener facilement les relations métriques ou descriptives de l'une de ces figures à celles qui appartiennent à l'autre. Elle doit donc être la plus féconde de toutes lorsque, voulant simplement ne faire usage que des considérations de la Géométrie rationnelle, on a pour but de découvrir les propriétés des lignes et des surfaces individuelles. Nous verrons, dans le cours de cet Ouvrage, que c'est à ce genre de projection générale qu'il faut rapporter divers modes de transformation employés dans les arts pour les lignes et les surfaces : comme lorsqu'on fait croître ou décroître leurs ordonnées dans un certain rapport, soit dans leur propre direction, soit dans des directions parallèles quelconques, c'est-à-dire en les faisant balancer ou osciller en même temps sur leurs bases, suivant une quantité angulaire constante (*). Nous verrons aussi que ces différents modes de transformation des figures ont été employés par plusieurs géomètres, notamment par MM. Dupin et Chasles, pour arriver à la connaissance d'un grand nombre de propriétés intéressantes des lignes et des surfaces du second ordre.

Enfin, jusqu'ici nous avons supposé les coordonnées, ou projetantes, parallèles entre elles; mais cette condition n'est pas indispensable, ou plutôt on peut la remplacer par la condition, beaucoup plus générale, que toutes ces projetantes aillent concourir vers un point ou *centre* de projection unique du plan de la figure ou de l'espace : alors la projection sera proprement ce qu'on nomme *conique* ou *centrale*; ce sera, si l'on veut encore, une sorte de perspective dont le point de vue sera ce que nous venons de nommer le centre de projection, mais qui n'aura véritablement de tableau que dans le cas où tous les objets de la figure primitive seront à la fois projetés sur une seule et même aire plane, ou sur une seule et même aire courbe.

Les relations ou propriétés, soit métriques, soit descriptives, qui subsisteront à la fois dans l'une et dans l'autre figures, auront nécessairement toute la généralité, toute l'indétermination possible; elles devront être indépendantes de toutes grandeurs absolues et déterminées, telles qu'ouvertures d'angles, distances, paramètres constants, etc.; en un mot, elles seront des

(*) Le premier moyen est souvent employé en Fortification pour renforcer, sur le dessin, le relief des ouvrages, toujours peu considérable, comme nous l'avons fait observer, eu égard aux dimensions horizontales du projet; l'objet est, par là, d'augmenter l'échelle des constructions, et de les rendre plus rigoureuses. Le second est principalement usité en Architecture, pour convertir les arcs droits en arcs rampants, etc.

propriétés de genre et non d'espèce, comme il peut arriver pour les projections par des parallèles, qui ont été définies précédemment.

On voit, d'après les diverses réflexions qui précèdent, que deux moyens généraux, également puissants, se présentent pour perfectionner la Géométrie rationnelle : l'un qui consiste à étendre l'objet des conceptions de cette Géométrie à l'aide du principe de continuité, l'autre qui met en usage les principes de la doctrine des projections pour procéder, par une marche à la fois rapide et exempte d'hésitation, à la recherche des vérités géométriques.

Agrandir les ressources de la simple Géométrie, en généraliser les conceptions et le langage ordinairement assez restreints, les rapprocher de ceux de la Géométrie analytique, et surtout offrir des moyens généraux propres à démontrer et à faire découvrir, d'une manière facile, cette classe de propriétés dont jouissent les figures quand on les considère d'une manière purement abstraite et indépendamment d'aucune grandeur absolue et déterminée, tel est l'objet qu'on s'est spécialement proposé dans cet Ouvrage. De telles propriétés subsistent, avons-nous dit, à la fois pour une figure donnée et pour toutes ses projections ou perspectives; on a donc dû les distinguer de toutes les autres par le nom générique de *propriétés projectives*, qui en rappelle, d'une manière abrégée, la véritable nature.

Indépendamment de tout ce qui a été dit, dans ce qui précède, sur les propriétés projectives, comme elles doivent, sans contredit, compter parmi les plus générales que l'on connaisse, elles méritent, à ce titre seul, toute l'attention des géomètres; on sait, en effet, que les propriétés de l'étendue sont d'autant plus fécondes en conséquences curieuses ou utiles à la pratique, qu'elles se trouvent renfermées sous des énoncés plus généraux, plus simples et plus faciles à saisir. On sait encore que, sous l'indétermination même qui leur est propre, elles enveloppent implicitement, et comme corollaires immédiats, toutes les propriétés particulières des figures.

D'un autre côté, nous avons vu que, pour le perfectionnement de la Géométrie descriptive, comme pour celui des divers arts dont elle est la base, ce sont principalement les méthodes de la Géométrie plane qu'il faut chercher à étendre et à simplifier, et que parmi les propriétés, soit métriques, soit descriptives, qui peuvent appartenir à cette Géométrie, celles qui sont simplement relatives aux lignes droites et aux sections coniques sont surtout utiles et intéressantes par l'élégance de la forme et la facilité de la description de ces lignes. C'est donc vers l'étude des propriétés projectives de ces sortes de figures et des principes de projection qui les concernent que nous avons dû principalement diriger nos efforts, en entreprenant ce travail.

Un grand nombre de géomètres distingués, à la tête desquels il faut placer l'illustre MONGE, ont senti toute l'importance des ressources que pouvait offrir la doctrine des projections pour la recherche et la démonstration des propriétés générales des figures. PASCAL, DE LAHIRE, LAMBERT, et plus récemment encore M. CARNOT, dans son *Essai sur la Théorie des transversales*, MM. GERGONNE, SERVOIS, FERRIOT, DURRANDE, etc., dans les *Annales de Mathématiques*, MM. HACHETTE, ROCHE, CHASLES, dans la *Correspondance sur l'École Polytechnique*, ont successivement fait usage, avec plus ou moins de restriction, de considérations semblables pour étendre le résultat des premières conceptions géométriques. Enfin M. BRIANCHON a fait insérer, dans le Xe Cahier du *Journal de l'École Polytechnique*, un Mémoire qui présente, sur ce sujet, des réflexions à la fois neuves et étendues; je me fais un plaisir et un devoir de reconnaître que je dois l'idée première de mon travail à la lecture de cet écrit. Mais tous ces géomètres, n'ayant en vue que la démonstration de quelques propriétés particulières des figures, ne se sont pas occupés, d'une manière spéciale, de rechercher les divers principes que la seule doctrine des projections pouvait fournir; ce qui fait que, pour la plupart, ces propriétés auraient pu être établies d'une manière plus générale et plus simple encore, comme on aura lieu de s'en convaincre par la suite.

Un Traité complet sur les propriétés projectives des figures embrasserait, pour ainsi dire, toutes les propriétés particulières et générales de l'étendue; aussi voulons-nous borner presque uniquement nos recherches aux considérations qui sont relatives à la projection conique ou centrale. Malgré cette restriction, qui doit entraîner avec elle toute la généralité possible dans les énoncés, nous aurons lieu de voir que la classe des propriétés projectives, ainsi définies, est encore d'une étendue immense, et qu'à cette classe se rattachent les plus anciennes comme les plus intéressantes découvertes géométriques. On doit distinguer surtout les recherches qui font le sujet ordinaire de la *Géométrie de la ligne droite* ou *de la règle*, et de cette ingénieuse *Théorie des transversales*, dont les principes, aussi simples que féconds, ont beaucoup accru, dans ces derniers temps, le champ de la Géométrie spéculative et pratique, et mériteraient bien, selon le vœu d'un de nos savants modernes (*) et celui de l'auteur qui les a, le premier, réunis en corps

(*) *Voyez* la note placée au commencement du beau *Mémoire sur les Polygones et les Polyèdres*, par M. POINSOT (Xe Cahier du *Journal de l'École Polytechnique*). Il serait bien à désirer que le Conseil de perfectionnement de l'École Polytechnique et MM. les Professeurs des Colléges fixassent leur attention sur cet objet, beaucoup plus important qu'on ne le pense d'ordinaire, tant à cause des développements considérables que peut encore recevoir la Théorie des transversales, que parce

de doctrine, d'être admis au nombre des Éléments de la Géométrie ordinaire.

Au surplus, la simplicité des considérations mises en usage par la Théorie des transversales suffirait seule pour faire soupçonner que les Grecs ont dû s'en occuper, si d'ailleurs PAPPUS, auteur du IVe siècle, ne nous apprenait, dans la préface du VIIe Livre des *Collections mathématiques*, qu'EUCLIDE avait composé un Traité, en trois livres, sur les *Porismes*, dont les considérations se rapprochaient probablement beaucoup de celles de cette Théorie et de la Géométrie de la règle. Au rapport de PAPPUS, cet ouvrage d'EUCLIDE était plein de génie et d'invention (*artificiosissimus*), et fort utile pour la résolution des problèmes difficiles et compliqués; il dit que, de son temps, on ne connaissait plus la véritable signification des Porismes, parce que des commentateurs peu instruits les avaient obscurcis et mutilés, pour ne les avoir pas compris dans toute leur généralité, et avoir voulu substituer des démonstrations restreintes à celles de l'auteur. Il cherche ensuite à expliquer quel *sens* on doit attacher au mot *Porismes;* mais cette explication, déjà peu satisfaisante par elle-même, renferme encore des lacunes, et les figures sont perdues.

Les commentateurs modernes, parmi lesquels on doit citer, en première ligne, les COMMANDIN, les FERMAT, les SCHOOTEN, les R. SIMSON, ne paraissent guère avoir mieux réussi que PAPPUS; et nous croirons volontiers que, de leur temps, la Géométrie n'avait point encore assez fait de progrès: le dernier cependant doit être excepté pour la restitution qu'il a faite de plusieurs propositions dans le genre des Porismes, et dont les énoncés sont mutilés dans le texte de PAPPUS, grâce à la barbarie des siècles du moyen âge et à l'ignorance des copistes! Pour nous, qui n'avons pas la prétention d'expliquer le sens du texte de PAPPUS, nous nous contenterons de faire connaître, dans le cours de cet Ouvrage, et à mesure que l'occasion pourra

qu'elle tend à remplir un vide qui se fait de plus en plus sentir dans les Éléments de la science. Nous citerons volontiers l'exemple de notre ancien professeur au Lycée de Metz, M. BADELLE, connu par le grand nombre d'Élèves qu'il a formés pour l'École Polytechnique, et qui, dans ses cours, ne manquait jamais de donner une notion suffisamment approfondie des principes de cette Théorie.

La Théorie des transversales rectilignes et sphériques vient d'acquérir d'ailleurs un nouveau degré d'intérêt, par le rapprochement qui a été fait entre ses principes et ceux de la composition des forces en Mécanique. M. CORIOLIS, répétiteur d'Analyse à l'École Polytechnique, a bien voulu m'en faire part dès 1820, et, sur une simple indication, M. GERGONNE s'en est servi ensuite pour démontrer les deux beaux théorèmes de la page 289 du tome IX des *Annales de Mathématiques*, dont l'un avait été énoncé seulement par CORIOLIS. Il convient aussi de dire que M. GERGONNE avait déjà appliqué, peu de temps auparavant, des principes semblables à d'autres recherches géométriques.

s'en présenter, divers théorèmes qui ont dû appartenir au *Traité d'*EUCLIDE *sur les Porismes* et dont COMMANDIN, dans son commentaire sur PAPPUS, a, mal à propos, restreint les énoncés, les démonstrations et les figures : nous y ajouterons aussi ceux qui ont été restitués ou indiqués par R. SIMSON et par les différents géomètres qui, de nos jours, se sont occupés de la Théorie des transversales, et l'on demeurera convaincu, ou du moins on inclinera fortement à croire que le Traité des Porismes d'EUCLIDE n'avait guère d'autre objet que ces propriétés générales et abstraites des figures, dont le caractère ne pouvait que difficilement être défini par la langue de la Géométrie ancienne; en un mot, que les Porismes étaient de véritables propriétés projectives, déduites par EUCLIDE (*) des considérations de la Perspective, qui lui étaient devenues familières, à en juger par un Traité qu'il a publié sur ce dernier objet. On trouve d'ailleurs, dans les *Coniques* d'APOLLONIUS de Perge, plusieurs propositions du même genre, et que nous ferons connaitre dans la IIe Section de ce Traité.

Nous aurons aussi l'occasion de voir, au sujet de ces diverses recherches, que les Anciens ne s'étaient point bornés simplement aux considérations relatives aux figures planes, et qu'ils avaient également découvert le principe fondamental de la Théorie des transversales sphériques; que CL. PTOLÉMÉE même, dans son *Almageste*, en a fait usage pour résoudre plusieurs problèmes d'Astronomie ; mais notre intention n'est pas de faire ici, en détail, l'historique des propriétés projectives, pour lequel on doit beaucoup à M. BRIANCHON, et nous continuerons, dans ce qui suit, d'en présenter simplement le point de vue général et philosophique.

DESARGUES, ami de l'illustre DESCARTES, et dont celui-ci faisait le plus grand cas comme géomètre ; DESARGUES, qu'on peut appeler, à plus d'un titre, le

(*) Telle paraît être aussi l'opinion personnelle du savant professeur à l'École des Ponts et Chaussées de France, M. EISENMANN, qui s'est occupé de traduire, dans notre langue, l'ouvrage de PAPPUS, et qui ne tardera probablement pas à faire jouir les amateurs de l'ancienne Géométrie, de ce fruit de longues et pénibles recherches. Remarquons, à cette occasion, que l'on a généralement tort de croire qu'il ne faille que des connaissances fort ordinaires, en Géométrie, pour lire et comprendre les ouvrages qui nous ont été transmis par les Anciens; tout porte à penser, au contraire, que leurs connaissances en ce genre étaient aussi profondes qu'étendues; car la plupart de leurs écrits scientifiques ne nous sont connus que par les fragments imparfaits qui nous restent des *Collections* de PAPPUS, qui pourtant n'étaient que de simples *Lemmes*, de simples éclaircissements sur certains passages difficiles que présentaient ces écrits, déjà défigurés ou mal compris dès le temps de ce Géomètre, c'est-à-dire vers le IVe siècle de l'ère chrétienne. Il est même à remarquer que ce n'est que depuis peu que l'on est parvenu à restituer quelques-uns des Lemmes de PAPPUS, et sans doute que plusieurs des résultats géométriques, dont s'honorent les Modernes, ont été pressentis ou parfaitement connus des Grecs. Nous n'en voulons pour preuve que le théorème sur la cubature des solides, si généralement connu et si mal à propos attribué à GULDIN, bien qu'il se trouve énoncé formellement dans les *Collections* de PAPPUS.

MONGE de son siècle, que les biographes n'ont point assez connu, ni assez compris; DESARGUES, enfin, que des contemporains, indignes du beau titre de géomètre, ont noirci, persécuté et dégoûté, pour n'avoir pu se mettre à la hauteur de ses idées et de son génie, fut, je crois, le premier, d'entre les modernes qui envisagea la Géométrie sous le point de vue général que je viens de faire connaître. Il traita, soit par les considérations de l'espace, soit par la Théorie des transversales, quelques-unes des propriétés des triangles et du quadrilatère, en imaginant, à cet effet, une notation ingénieuse, à l'aide de laquelle il réduisait la multiplication et la division des rapports composés, qui se reproduisent à chaque pas dans cette théorie, à de simples additions et soustractions de quantités. On peut en voir un exemple dans une petite note placée à la fin de certains exemplaires du *Traité de Perspective* publié, en 1648, par BOSSE, qui n'était rien moins que géomètre, bien qu'il fût excellent graveur, et qu'il eût reçu des leçons de DESARGUES.

DESCARTES écrivait, en janvier 1639, au sujet d'un papier de DESARGUES, que lui avait transmis le P. MERSENNE : « La façon dont il commence son » raisonnement, en l'appliquant tout ensemble aux lignes droites et aux » courbes, est d'autant plus belle qu'elle est plus générale, et semble être » prise de ce que j'ai coutume de nommer la *Métaphysique* de la Géométrie, » qui est une science dont je n'ai point remarqué qu'aucun autre se soit ja- » mais servi, sinon ARCHIMÈDE. Pour moi, je m'en sers toujours pour juger » en général des choses qui sont trouvables, et en quels lieux je les dois » trouver. » Il ajoute qu'on ne doit pourtant pas tellement s'y fier qu'on se croie dispensé de toute espèce de démonstration : que, par exemple, en appliquant les mêmes raisonnements aux lignes droites et aux courbes, il faut prendre garde qu'il n'y ait rien qui appartienne à leur différence spécifique.

Il paraît bien évident, d'après cette lettre, que DESARGUES avait deviné et connu l'extension qu'on pouvait donner aux principes élémentaires de la Théorie des transversales, en les appliquant indistinctement aux systèmes de lignes droites et aux lignes courbes; et, en effet, M. CARNOT a démontré depuis, dans sa *Géométrie de position* (*voy.* le Chapitre Ier, Section II du présent Ouvrage), que la relation entre les segments, formés sur les côtés d'un triangle coupé par une courbe géométrique d'ordre quelconque, est précisément celle qui a lieu pour un autre triangle coupé par un système de droites en nombre égal à celui qui marque le degré de cette courbe ; de sorte que, sous ce point de vue général, le système de deux, de trois,..., droites tracées dans un plan, doit être considéré comme représentant une courbe du 2e, du 3e,..., ordre, et doit jouir des mêmes propriétés, quant à ce qui concerne la direction indéfinie des lignes et leurs rapports indéterminés de

grandeur, propriétés que nous avons ci-dessus caractérisées par l'épithète de *projectives*.

Au surplus, il ne paraît pas que DESARGUES ait rien écrit sur les courbes d'ordre supérieur, et qu'il ait envisagé la question dans toute sa généralité; il est, au contraire, raisonnable de croire qu'il s'est contenté d'examiner le cas où la courbe est simplement une section conique, pour lequel le théorème de M. CARNOT peut se démontrer directement et d'une manière purement élémentaire. C'est ce qu'on voit par une autre lettre de DESCARTES, où il est question d'un projet de *Traité des Sections coniques* dont s'occupait DESARGUES, et dans laquelle, tout en louant ce dernier sur le but qu'il cherchait à remplir, il le blâme d'avoir voulu refaire la langue de la Géométrie ancienne, et d'avoir employé des termes nouveaux, dans l'invention desquels il reconnaît pourtant « de l'esprit et de la grâce. » On voit aussi, dans cette lettre, que DESARGUES avait coutume de considérer les systèmes de droites parallèles comme concourant à l'infini, et qu'il leur appliquait le même raisonnement qu'aux lignes convergentes; sur quoi DESCARTES fait des réflexions analogues à celles que nous avons déjà rapportées ci-dessus.

Nous citons d'autant plus volontiers ces passages des lettres de DESCARTES, qu'ils montrent qu'à une époque où la Méthode des coordonnées venait à peine de naître, DESARGUES cherchait à imprimer aux conceptions de la simple Géométrie une généralité qu'elle n'a reçue que beaucoup plus tard, et par le concours d'un grand nombre de savants géomètres.

Quant au *Traité des Sections coniques*, dont parle DESCARTES, il paraît être le même que l'écrit qui a été publié en 1639, sous le titre de : *Brouillon-Projet d'une atteinte aux événements des rencontres du cône avec un plan, etc.*, ouvrage que nous ne connaissons que par la critique, fort amère et fort peu lumineuse, qui en a été faite par BEAUGRAND, dans une lettre imprimée qu'on trouve encore à la Bibliothèque du Roi, et qui est loin, sans doute, de pouvoir fixer nos idées sur l'esprit de la méthode employée par DESARGUES. Nous ferons connaître, au commencement de la IIe Section de cet Ouvrage, le peu que nous a transmis BEAUGRAND sur cet écrit de DESARGUES, et l'on verra qu'il devait briller partout des traits de l'originalité et du génie.

PASCAL, qui n'avait encore que seize ans, et qui déjà comptait parmi les plus grands géomètres de son temps, guidé d'ailleurs par les préceptes et l'exemple de DESARGUES, comme il a soin de nous l'apprendre lui-même, fit paraître, en 1640, c'est-à-dire peu de temps après l'écrit de ce dernier, son *Essai pour les Coniques* : c'est une Notice très-courte, remarquable par l'usage que PASCAL y fait des considérations de la perspective ou projection centrale, et par un passage où, en donnant les plus grands éloges à DESARGUES,

il dit que ce géomètre, dans la méthode qu'il avait suivie, traitait généralement des sections du cône, sans se servir du *triangle par l'axe*. Parmi plusieurs propositions dans le genre de celles de la Géométrie de la règle et de la Théorie des transversales, cet Essai renferme l'énoncé de la propriété de l'hexagone inscrit aux coniques, attribuée à DESARGUES par DESCARTES, et que PASCAL a ensuite employée sous le nom d'*hexagrammum mysticum*, dans un Traité inédit sur les sections coniques, que LEIBNITZ a eu entre les mains, lors de son séjour en France, en 1676, et dont ce grand homme nous a transmis une analyse très-succincte, qui est tout ce qui reste de cet ouvrage de PASCAL. A en juger par les titres des six livres dont il était composé (*), cet ouvrage, beaucoup plus étendu que celui de DESARGUES sur le même sujet, devait renfermer les plus belles des propriétés projectives des sections coniques, aujourd'hui généralement connues des géomètres; et, en effet, elles ne sont, pour la plupart, que des corollaires fort simples de l'hexagramme mystique, qui lui-même n'est qu'une extension du Porisme de PAPPUS, ou plutôt d'EUCLIDE, sur l'hexagone inscrit à l'angle formé par deux droites. Quelle fatalité a donc fait disparaître ces productions de trois hommes doués d'un génie également original et profond?

Dans un autre écrit, qui porte la date de 1654, PASCAL fait encore mention de son *Traité complet des Sections coniques*, en rendant compte de plusieurs ouvrages dont il s'était occupé, et dont il se contente simplement de rapporter les titres. Parmi ces recherches de PASCAL, nous ne citerons ici que celles qui sont relatives aux *Contacts des sections coniques*, aux *Lieux plans* et à la *Perspective*, qui, d'après ce qu'il en dit lui-même (**), devaient être traitées avec une grande généralité, et par des principes tout à fait différents de ceux jusque-là mis en usage, soit par les anciens, soit par les nouveaux géomètres. (*Voyez* les ANNOTATIONS de l'ERRATA.)

L'éditeur des Œuvres de BLAISE PASCAL, je veux dire l'abbé BOSSUT,

---

(*) Nous transcrivons ici ces titres, d'après la lettre de LEIBNITZ, insérée dans les Œuvres de PASCAL (tome IV, édition de 1779), et dont la date est du 30 août 1676:

I. *Generatio coni sectionum tangentium et secantium, sive Projectio peripheriæ tangentium et secantium circuli, in quibuscunque oculi, plani ac tabellæ positionibus.* II. *De* hexagrammo mystico *et conico.* III. *De quatuor tangentibus, et rectis puncta tactuum jungentibus, undè rectarum harmonicè sectarum et diametrorum proprietates oriuntur.* IV. *De proportionibus segmentorum secantium et tangentium.* V. *De tactionibus conicis, sive De punctis et rectis quas sectio conica attingit.* VI. *De loco solido.*

(**) LOCI PLANI: *Non solùm illi quos à veteribus tempus abripuit, nec solùm illi quos his restitutis perillustris hujus ævi geometra subjunxit, sed et alii huc usque non noti, utrosque complectentes, et multò latiùs exuberantes, methodo, ut conjicere est, omninò novâ, quippe novâ præstante, viâ tamen longè breviori.* PERSPECTIVA METHODUS, *etc.*

pensait, d'après les progrès qu'avaient faits toutes les branches des sciences exactes depuis ce grand homme, que l'on ne devait pas beaucoup regretter la perte des divers ouvrages que nuus venons de rappeler; nous croyons que bien peu des personnes, qui aiment à suivre la marche progressive de nos idées et de nos découvertes en Géométrie, seront de cet avis, surtout si elles se reportent à l'époque où écrivait ce savant éditeur; nous croyons, en outre, qu'on nous pardonnera aisément les détails dans lesquels nous summes entré, et qu'on ne les trouvera pas dénués de tout intérêt.

Après Desargues et Pascal, il s'écoula un grand nombre d'années sans qu'il parût rien, sur les propriétés projectives des figures, qui soit digne d'être cité ou qui fût véritablement neuf. En effet, l'ouvrage de Grégoire de Saint-Vincent, intitulé : *Opus geometricum*, et qui parut en 1647, ne renferme, en ce genre, que quelques théorèmes relatifs à la *division harmonique* des lignes droites, qu'il nomme *moyenne et extrême raison proportionnelle*, et ces théorèmes se trouvent exposés, pour la plupart, dans les *Collections* de Pappus; on en peut dire à peu près autant du *Traité* in-4° *des Sections coniques* que de Lahire fit paraitre en 1673, et qui contient presque toute la *Théorie des pôles et des polaires* des lignes du second ordre, outre celle de la division harmonique des lignes droites, mais d'après une marche dénuée entièrement d'élégance et de généralité. De Lahire écrivait peu de temps après Desargues et Pascal, et il cite, dans sa Préface, les écrits du premier; il a donc dû connaitre plusieurs des beaux résultats auxquels ils étaient parvenus; son travail, qui fit beaucoup de bruit dans le temps, surtout à l'étranger, doit ainsi être placé bien au-dessous de celui de ces illustres géomètres, tant pour l'invention que pour l'exposition, et parce qu'il n'est point, à beaucoup près, aussi complet et aussi étendu que le leur; sous ce rapport même, on peut dire que cette partie de la science avait rétrogradé.

Ce ne fut que vers le commencement du siècle suivant, c'est-à-dire de 1720 à 1750, que le célèbre Mac-Laurin, reprenant le travail de de Lahire, retrouva, sans doute (*) sans avoir eu connaissance des écrits de Desargues et de Pascal, les principaux théorèmes qui avaient dû les occuper, notamment la propriété de l'hexagramme mystique; il en découvrit en outre plusieurs autres, d'un genre analogue, soit sur les sections coniques, soit sur les courbes d'ordre supérieur, et il indiqua même des moyens pour décrire, par points, ces différentes courbes. On remarquera toutefois que sa méthode

(*) Mac-Laurin nous apprend, au sujet de la dispute qui s'est élevée entre lui et Braikenridge, dans les *Transactions philosophiques* de 1735, que c'est pendant son séjour à Nancy, en novembre 1722, qu'il entreprit ces recherches.



est inférieure à celles de ces géomètres, en ce qu'il emploie souvent le calcul algébrique, et qu'il ne fait jamais usage des considérations générales fournies par la Perspective ou par la Théorie des transversales.

Nous ne croyons pas nécessaire de faire connaître la multitude des ouvrages, sur les sections coniques, qui, depuis Mac-Laurin, ont paru soit en Angleterre, soit en Suède, soit en Allemagne, et dans lesquels les recherches de ce géomètre ont été reproduites, souvent par des voies pénibles, quelquefois d'une manière incomplète, et presque toujours sans rien y ajouter qui soit bien digne d'intérêt. Braikenridge et R. Simson, qui écrivaient à peu près en même temps que Mac-Laurin, doivent cependant être exceptés, tant parce qu'il est encore douteux que le premier ait eu connaissance des travaux de ce géomètre, qu'il a même devancé dans la publication, que parce que l'autre a découvert ou restitué plusieurs théorèmes des Anciens, qui ont pu ouvrir la voie à Mac-Laurin pour des recherches plus relevées. Le *Traité des Sections coniques*, que R. Simson a fait paraître à Édimbourg, en 1750, et dans lequel se trouvent exposées plusieurs des propriétés projectives, soit graphiques, soit métriques, qui ont occupé Desargues, Pascal et Mac-Laurin, est d'ailleurs remarquable par la rigueur des démonstrations, toutes à la manière d'Euclide et d'Apollonius. Enfin on doit encore distinguer le célèbre Lambert qui, dans un *Traité de Perspective* publié en 1774, employa le premier, depuis Desargues et Pascal, les considérations générales de cette Théorie pour établir plusieurs propositions élégantes dans le genre de celles de la Géométrie de la règle, et qui sentit ainsi, jusqu'à un certain point, les ressources qu'on pouvait tirer de ce genre de considérations.

On avait entièrement oublié ces sortes de recherches en France, où les esprits se trouvaient naturellement dirigés vers des spéculations plus relevées, mais non plus intéressantes, ni plus immédiatement utiles, lorsque Monge, dans son immortelle *Géométrie descriptive*, démontra, avec cette élégance qui lui est propre, les principales propriétés de la Théorie des pôles des lignes et des surfaces du second ordre. Bientôt après parut la *Géométrie de position* de M. Carnot, qui renferme à peu près tous les résultats auxquels ont dû parvenir Euclide, Desargues et Pascal, et où se trouve exposée, pour la première fois et dans toute sa généralité, cette belle Théorie des transversales dont nous avons déjà si souvent parlé dans ce qui précède, et dont les Anciens n'avaient fait qu'entrevoir les principes et la fécondité.

Ce savant ouvrage fut aussitôt suivi de plusieurs autres, où l'on s'attache à simplifier et à étendre les mêmes doctrines. Telles sont les *Solutions peu connues de différents problèmes de Géométrie pratique*, publiées en 1805, par

M. Servois, ouvrage vraiment original et qui a le mérite d'offrir les premières applications de la Théorie des transversales à la Géométrie de la *Règle* ou des *Jalons*, et d'avoir ainsi mis au jour la fécondité et l'utilité de cette Théorie. Telles sont aussi les recherches ingénieuses de M. Brianchon, qui étendit les théorèmes de Monge et de Livet sur les pôles et polaires des surfaces du second ordre, et découvrit la propriété de l'hexagone circonscrit aux coniques, non moins féconde et non moins élégante que celle de Pascal sur l'hexagone inscrit. Tel est enfin l'*Essai* même de M. Carnot *sur la Théorie des transversales*, ouvrage dans lequel l'auteur, mettant à profit ses propres découvertes et celles des savants qui viennent d'être cités, offre un résumé lumineux des divers principes élémentaires et des applications de cette Théorie.

Depuis cette époque, beaucoup d'autres Géomètres, dont les noms ont déjà été rappelés plus haut, se sont occupés des mêmes questions et des mêmes théories, soit dans les *Recueils de l'École Polytechnique*, soit dans les *Annales de Mathématiques;* mais il n'en est aucun qui ait autant fait pour elles que M. Brianchon. Son *Mémoire sur les lignes du second ordre*, publié en 1817, celui sur les *courbes de raccordement*, qu'il a inséré tout récemment dans le XIX[e] Cahier du *Journal de l'École Polytechnique*, etc., renferment, outre plusieurs principes nouveaux sur les sections coniques et les systèmes de lignes droites, la solution générale et purement géométrique de cette intéressante question : *Décrire une section conique assujettie à toucher des droites ou à passer par des points donnés sur un plan;* ce qui, en admettant que certains points ou certaine droite puissent se trouver à l'infini, comprend implicitement toutes les questions analogues relatives à l'hyperbole et à la parabole, comme l'a fait voir lui-même M. Brianchon aux endroits cités, et comme l'a aussi montré, d'après ses indications, M. Coste, dans un *Mémoire sur la parabole*, inséré au VIII[e] volume des *Annales de Mathématiques*.

Il convient, au surplus, de remarquer que plusieurs de ces questions avaient déjà été traitées, d'une manière à peu près semblable pour quelques-unes de celles qui n'exigent que la règle, et d'une manière beaucoup moins simple et moins élégante pour quelques autres, d'abord par de Lahire, ensuite par Mac-Laurin, Braikenridge, Simson, etc. Pascal parait avoir résolu aussi les mêmes problèmes dans ses écrits géométriques (*voyez* la note de la page xxviii), mais il ne nous en est absolument rien parvenu.

Quant à ce qui concerne l'histoire des recherches entreprises par les géomètres sur les propriétés projectives des figures à trois dimensions, nous nous contenterons de signaler celles de Monge sur les diamètres conjugués parallèles, l'intersection et le contact des surfaces du second degré ; celles de

MM. Dupuis, Dupin, Gaultier, Gergonne, etc., sur les propriétés générales des cercles et des sphères qui se coupent ou se touchent; celles, sur les propriétés analogues des surfaces du second degré semblables et semblablement placées, qu'on doit à M. Chasles, qui a mis en œuvre, d'une manière très-heureuse, les principes de la Théorie des transversales, pour démontrer la plupart des théorèmes de Monge; celles enfin de M. Lamé, sur les surfaces du second ordre assujetties à passer par les mêmes points ou par les mêmes courbes. D'ailleurs nous avons déjà dit un mot de quelques autres recherches semblables, dues à MM. Monge, Livet, Dupin, Brianchon et Chasles: tel est donc l'ensemble, assez vaste, des découvertes géométriques qui se rapportent spécialement aux propriétés projectives des figures, considérées soit dans l'espace, soit dans un plan.

Dans une analyse aussi succincte, et pourtant déjà bien étendue, il a dû nous échapper beaucoup de choses, et il ne nous a guère été possible d'indiquer avec précision la nature et l'époque des diverses découvertes; encore moins avons-nous pu faire connaitre l'esprit des méthodes employées par les différents géomètres; nous avons dû nous étendre principalement sur les ouvrages peu connus, ou dont il ne nous reste que quelques traces; en un mot, sur les ouvrages des hommes de génie, qui marquèrent nos premiers pas dans cette partie de la science où l'on envisage les relations les plus générales et les plus abstraites des figures.

D'ailleurs, le but de l'ouvrage que nous mettons au jour est d'offrir un tableau, sinon complet, du moins assez étendu, des *Propriétés projectives*; et nous saisirons toutes les occasions qui pourront s'offrir de signaler les premiers inventeurs. Cet Ouvrage sera donc véritablement un exposé historique et scientifique de cette branche intéressante de la Géométrie. Nous regrettons toutefois que le défaut d'espace ne nous permette pas d'y faire entrer nos recherches relatives aux propriétés projectives des courbes géométriques des divers ordres, et nous oblige d'en renvoyer la publication à une époque plus reculée : cet ensemble, plus complet, aurait montré qu'il est peu de propriétés générales de l'étendue qu'on ne puisse ramener dans le domaine de la simple Géométrie, au moyen des ressources offertes, soit par la doctrine des projections, soit par la loi de continuité.

TRAITÉ

DES

PROPRIÉTÉS PROJECTIVES

DES FIGURES.

SECTION PREMIÈRE.

PRINCIPES GÉNÉRAUX.

Il n'en est pas de la méthode purement géométrique comme de celle de l'Analyse des coordonnées; dans celle-ci tout se ramène immédiatement à des principes connus, à des procédés uniformes de calcul, et il ne reste à celui qui l'emploie qu'à développer les conséquences d'une manière plus ou moins élégante et rapide; dans l'autre, au contraire, les principes peuvent entièrement manquer, au moins ceux d'où découle, d'une manière directe et immédiate, l'objet particulier que l'on a en vue; et, pour remplir les lacunes, on se voit quelquefois obligé, après plusieurs essais, de reprendre les choses d'un peu haut pour se frayer une route qui soit facile. Tel est précisément le cas des recherches qui suivent; comme elles se rattachent nécessairement à des notions jusqu'ici étrangères à la simple Géométrie, nous nous voyons entraînés naturellement à exposer d'abord ces notions, pour parvenir ensuite, d'une manière à la fois rapide et simple, à l'objet particulier et véritable de ces mêmes recherches. Voilà pourquoi, après avoir exposé dans le premier Chapitre de cette Section les notions préliminaires concernant la projection ou perspective des figures en général, nous laisserons là ce sujet pour ne nous occuper, dans le Chapitre suivant, que des notions relatives à la manière d'être de certaines lignes particulières, notions sur lesquelles

reposent, de toute nécessité, les principes de projection qui doivent former la base de tout l'ouvrage.

Si cette marche n'a pas l'avantage d'être aussi directe qu'on pourrait le désirer, elle nous fournira, en revanche, l'occasion de présenter, sur les dépendances qui lient entre elles les lignes droites et les sections coniques, un grand nombre de considérations nouvelles, qui nous mettront à même de généraliser le langage et les conceptions de la Géométrie; ce qui n'est pas le but le moins important que nous ayons cherché à atteindre dans ce travail.

Au reste, ayant principalement pour objet l'examen des propriétés des figures décrites sur un plan, et notamment de celles où n'entrent que des systèmes de lignes droites et de sections coniques, qui offrent par elles-mêmes un assez vaste sujet de recherches, et sont d'ailleurs presque les seules employées dans les arts fondés sur le dessin linéaire, nous ferons toujours en sorte de ne jamais perdre de vue ce but véritable de notre travail, et de ne recueillir sur notre route que des vérités qui s'y rattachent de la manière la plus intime.

D'après cela, il ne sera guère question, dans cette première Partie de l'ouvrage, que des notions qui peuvent appartenir en propre à ces sortes de figures, quoique la plupart d'entre elles puissent s'étendre, d'une manière analogue, aux figures dans l'espace et notamment aux surfaces du second ordre. On aura lieu de s'apercevoir, d'ailleurs, qu'au moyen des principes établis cette extension devient assez facile et assez évidente pour que nous puissions laisser à d'autres le soin de la développer, et nous renfermer dans les justes limites du sujet que nous voulons traiter. Néanmoins, dans les autres Parties de l'ouvrage, qui concernent proprement les applications des principes renfermés dans la première, il nous arrivera quelquefois d'indiquer, chemin faisant, soit par des notes, soit d'une manière très-rapide dans le texte lui-même, l'extension dont pourraient être susceptibles certaines propositions ou certaines théories particulières, relativement aux figures considérées en général dans l'espace. Enfin nous donnerons, dans le *Supplément*, une idée assez étendue de la manière dont on doit traiter ces sortes de figures, et notamment les surfaces du premier et du second ordre, pour arriver aux principales comme aux plus importantes des propriétés qui les concernent.

Pour éviter toute espèce d'ambiguïté par la suite, nous croyons devoir prévenir expressément, avant d'entrer en matière, que les droites, les courbes, les plans, etc., dont il sera fait mention dans le cours de ce travail,

seront supposés indéfiniment prolongés dans l'espace; le discours fera connaître les cas où l'on n'en considérerait qu'une portion terminée et finie. Ainsi, quand il sera question des points de rencontre de certaines cordes inscrites à des courbes, ou de certains côtés d'un polygone avec une ligne ou *transversale* quelconque, nous entendrons toujours parler de la direction indéfinie de ces cordes et de ces côtés; il est sans doute inutile d'ajouter que nous donnerons au mot de *polygone* toute l'étendue de sens qu'il comporte, et que, par conséquent, une telle figure pourra avoir des angles rentrants et des côtés qui se croisent ou se replient les uns sur les autres.

Par ligne *géométrique* d'un certain *degré* ou d'un certain *ordre*, nous entendrons d'ailleurs parler d'une ligne, plane ou à double courbure, qui ne puisse être coupée par une droite ou par un plan arbitraire en un plus grand nombre de points qu'il est marqué par ce degré ou cet ordre, et qui puisse cependant l'être en un tel nombre de points : la même définition devra s'étendre d'une manière analogue aux surfaces.

CHAPITRE PREMIER.

NOTIONS PRÉLIMINAIRES SUR LA PROJECTION CENTRALE.

1. Dans ce qui suit, nous donnerons presque toujours au mot de *projection* le même sens que celui de *perspective*; ainsi la projection sera *conique* ou *centrale*.

Dans cette sorte de projection, la surface sur laquelle on projette la figure donnée peut être quelconque; cette figure elle-même peut être située arbitrairement dans l'espace; mais, cette grande extension étant inutile à l'objet particulier des recherches qui suivent, nous supposerons, en général, que la figure donnée et la surface de projection soient l'une et l'autre planes : lorsqu'il nous arrivera, par la suite, d'être obligés d'employer le mot de *projection* dans un sens plus étendu ou au contraire plus restreint encore, nous aurons soin d'en prévenir à l'avance d'une manière expresse, ou bien nous emploierons des épithètes convenables et exactement définies.

D'après cela, concevons que, d'un point donné pris pour centre de projection, parte un faisceau de lignes droites dirigées vers tous les points d'une figure tracée sur un même plan; si l'on vient à couper ce faisceau de droites

projetantes par un autre plan disposé d'une manière arbitraire dans l'espace, il en résultera, sur ce plan, une nouvelle figure qui sera la *projection* de la première.

2. Cette projection ne change évidemment ni la corrélation, ni le degré ou ordre des lignes de la figure primitive, ni, en général, toute espèce de dépendance graphique entre les parties de cette figure, qui ne concernerait que la direction indéfinie des lignes, leur intersection mutuelle, leur contact, etc.; mais elle pourra faire varier seulement la forme, l'espèce particulière de ces mêmes lignes, et, en général, toutes les dépendances qui pourraient concerner des grandeurs absolues et déterminées, telles qu'ouvertures d'angles, *paramètres* constants, etc. Ainsi, par exemple, de ce qu'une ligne est perpendiculaire à une autre dans la figure primitive, on ne saurait en conclure qu'elle le soit dans la projection de cette figure sur un nouveau plan.

3. Toutes ces propriétés de la projection centrale résultent, d'une manière purement géométrique, de sa nature propre et des notions les plus communément admises, et il n'est pas besoin de recourir à l'Analyse algébrique pour les reconnaître et les démontrer : ainsi, pour prouver qu'une ligne du degré m reste du même degré dans la projection, il suffit de remarquer que, la première ne pouvant être coupée en plus de m points par une droite arbitraire tracée dans son plan, il devra nécessairement en être de même de l'autre; puisque la projection d'une droite est toujours une ligne droite, qui doit passer par tous les points correspondants à ceux de la première.

4. Suivant la définition d'*Apollonius*, généralement admise en Géométrie, une *section conique* ou simplement une *conique* est la ligne suivant laquelle un plan arbitraire rencontre un cône quelconque à base circulaire; une conique n'est donc autre chose que la *projection* d'un cercle, et, d'après ce qui précède, c'est aussi une ligne du *second ordre*, puisque la circonférence du cercle ne peut être coupée en plus de deux points par une droite arbitraire tracée dans son plan (*).

5. Une figure dont les parties n'auront entre elles que des dépendances

(*) C'est une *ellipse*, une *parabole*, ou une *hyperbole*, suivant que le plan sécant rencontre à la fois toutes les arêtes du cône, est parallèle à l'une d'elles, ou est parallèle en même temps à deux d'entre elles; dans le premier cas, la courbe n'a qu'une branche entièrement fermée; dans le second, cette branche est fermée d'un côté et s'étend à l'infini de l'autre; dans le troisième, la

graphiques de la nature de celles qui précèdent, c'est-à-dire des dépendances indestructibles par l'effet de la projection, sera appelée, dans ce qui va suivre, *figure projective*.

Ces dépendances elles-mêmes, et, en général, toutes les relations ou propriétés qui subsistent à la fois dans la figure donnée et dans ses projections, seront appelées également *relations* ou *propriétés projectives*.

6. D'après ce que nous venons de dire des propriétés projectives de disposition ou *graphiques*, il sera toujours facile de reconnaître si des propriétés sont telles, à leur simple énoncé ou à l'inspection de la figure; et il résulte immédiatement de leur nature particulière qu'il suffira de les établir et de les démontrer pour une projection quelconque de la figure à laquelle elles appartiennent, pour qu'elles soient en général applicables à cette figure elle-même et à toutes ses projections possibles.

7. Quant aux propriétés *projectives* qui concernent les relations de grandeur et que nous appellerons *métriques*, il est certain que rien ne peut indiquer, *à priori*, si elles subsistent dans toutes les projcetions de la figure à laquelle elles appartiennent : en effet, la relation connue entre les segments des sécantes du cercle, qui ne concerne que des grandeurs indéterminées, n'est pas pour cela une relation projective; car on sait bien qu'elle ne subsiste pas pour une section conique quelconque, projection de ce cercle, et la raison en est que cette relation dépend implicitement du paramètre ou rayon.

D'un autre côté, de ce qu'une figure donnée renferme des lignes d'une espèce particulière, comme, par exemple, des circonférences de cercle, il ne faut pas en conclure de suite que toutes les relations qui lui appartiennent cessent par là même de subsister dans des projections générales de la figure; car, si ces relations ne portent sur aucune grandeur déterminée et constante et qu'elles appartiennent à tout un genre, le contraire aura évidemment lieu.

Si donc une figure d'espèce particulière jouissait de certaines propriétés métriques, on ne pourrait affirmer *à priori*, et sans examen préalable, ni

---

courbe a deux branches infinies, séparées et distinctes. D'après cela, il est aisé de voir que l'hyperbole a deux points à l'infini avec deux tangentes en ces points nommées *asymptotes*, et que, pour la parabole, ces deux points et ces deux tangentes se confondent en un seul point et en une seule tangente située tout entière à l'infini.

Nous reviendrons, dans le Chapitre III, sur ces notions, en les exposant dans toute leur généralité.

que ces propriétés subsistent, ni qu'elles cessent de subsister dans les diverses projections de la figure primitive. Or, on sent toutefois l'importance qu'il y aurait à pouvoir reconnaitre, à l'avance, si telle ou telle relation examinée est ou n'est pas projective de sa nature; car il en résulterait qu'ayant démontré cette relation pour une figure particulière, on pourrait de suite l'étendre à toutes les projections possibles de cette figure.

8. Il ne paraît pas facile d'établir une règle simple pour tous les cas; la méthode trigonométrique et l'Analyse des coordonnées ne conduiraient elles-mêmes qu'à des résultats rebutants par la prolixité des calculs; cependant, vu son importance, cette question est digne d'attirer l'attention des géomètres. En attendant qu'ils l'aient résolue d'une manière convenable, pour les relations projectives en général, nous nous occuperons d'une classe particulière, quoique très-étendue, de ces sortes de relations, dont le caractère est aussi remarquable par sa simplicité que facile à vérifier et à reconnaître dans les relations qui en sont douées.

9. Pour traiter la question avec la généralité qui lui est propre, nous supposerons que la figure que l'on considère soit située arbitrairement dans l'espace.

Appelons A, B, C,... (*fig.* 1), les différents points de cette figure; soit S le centre de projection; imaginons que de ce point partent différentes droites projetantes dirigées vers les points A, B, C,...; soient pris sur la direction de ces droites de nouveaux points A', B', C',..., correspondant respectivement aux premiers; soient joints ces points entre eux par des lignes droites de même que dans la figure donnée, en conservant par conséquent aux parties de la nouvelle figure la liaison qui subsiste dans la primitive: cette nouvelle figure pourra être regardée comme une espèce de *projection* de la première; mais le mot de *projection* aura, dans ce cas, un sens plus étendu que celui que nous lui avons accordé dans ce qui précède. Cela posé, considérons en particulier ce qui se passe dans le plan formé par les projetantes indéfinies SA, SB passant par les extrémités des droites AB et A'B', dont la dernière est censée la projection de l'autre.

D'après un théorème fort connu de la Géométrie élémentaire, les surfaces des triangles SAB, SA'B', qui ont l'angle en S commun, sont entre elles comme les rectangles SA.SB, SA'.SB' des côtés qui comprennent cet angle, et par conséquent le rapport de la surface de chacun de ces triangles au rectangle qui lui correspond est constant. Si donc on nomme $\frac{1}{2}m$ ce rapport,

qui ne dépend évidemment que de l'ouverture plus ou moins grande de l'angle en S, et qu'on représente simplement par a, b les longueurs des projetantes SA, SB, et par p celle de la perpendiculaire abaissée du centre de projection sur la direction de AB, on aura

$$\text{surf. } SAB = \frac{1}{2}p.AB = \frac{1}{2}m.a.b;$$

d'où l'on tire

$$AB = m.\frac{a.b}{p},$$

expression beaucoup plus simple que celle qui serait fournie par la Trigonométrie (*), et qui nous présentera de grands avantages par la suite.

En considérant une autre droite CD de la figure donnée, et appelant c, d, m' et p' les nouvelles grandeurs qui lui correspondent, on aurait de même

$$CD = m'.\frac{c.d}{p'},$$

et ainsi de suite pour toutes les autres parties de la figure.

10. Maintenant, soit une relation quelconque existant entre les parties de la figure donnée ABCD..., et supposons qu'il s'agisse d'examiner si cette relation subsiste aussi dans toutes les figures qui, ainsi que celle A'B'C'D'..., peuvent être regardées comme les projections de la première.

Puisque cette relation doit avoir lieu, quelle que soit la position particulière des points A, B, C,..., ou A', B', C',..., sur les projetantes SA, SB,..., il s'ensuit que, si on met à la place des quantités qui y entrent les valeurs correspondantes trouvées ci-dessus, elle devra être satisfaite, indépendamment de toute grandeur particulière attribuée aux droites SA, SB,..., ou a, b, p,..., qui fixent la position des points correspondants A, B,...; donc ces droites ou distances doivent disparaître d'elles-mêmes du résultat de la substitution, soit par réductions partielles, soit comme facteurs à tous ses termes; en sorte qu'il ne resterait plus qu'une relation entre les constantes m, m',..., si l'on remplaçait en même temps les perpendiculaires p, p',..., par les valeurs qu'elles représentent dans chaque triangle partiel SAB,..., SA'B',....

Réciproquement, si les choses se passent ainsi, la relation examinée sera

(*) En effet, on obtiendrait par cette dernière la formule

$$AB = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos ASB}.$$

nécessairement projective, c'est-à-dire qu'elle aura lieu pour toutes les figures, telles que A'B'C'D', qui peuvent être regardées comme les projections de la première : en effet, il en résultera, en premier lieu, qu'il existe entre les constantes m, m',...., une certaine relation ; mais les distances A'B', B'C',...., de la nouvelle figure peuvent s'exprimer, de la même manière que celles de la figure primitive, au moyen des projetantes qui leur correspondent et des constantes m, m',...; donc, si l'on substitue pareillement dans la relation examinée, à la place des distances AB, BC,...., les nouvelles distances A'B', B'C',.. , ou plutôt les expressions qui les représentent, il ne restera également qu'une relation entre les constantes m, m',...., identique avec la première; d'où il résulte, en second lieu, que les distances de la nouvelle figure satisfont exactement à la relation proposée, et que cette relation est par conséquent projective.

11. Il existe une classe très-étendue de relations pour lesquelles les perpendiculaires p, p',...., disparaissent à la fois, avec a, b,...., du résultat de la substitution, sans qu'on soit obligé de les remplacer, comme dans la supposition générale ci-dessus, par les valeurs qu'elles représentent dans les triangles correspondants. Ce sont précisément ces sortes de relations que nous avions en vue dans ce qui précède.

Et, comme on n'a fait absolument aucune hypothèse particulière sur la situation des points A', B', C',...., dans l'espace, non plus que sur celle des points A, B, C,...., dont ils sont censés la projection, il s'ensuit que toute relation, qui satisfera aux conditions précédentes, aura non-seulement lieu dans les projections ordinaires de cette figure sur un plan, mais encore dans toutes les figures rectilignes et gauches qui pourraient être censées résulter de la première par l'espèce de projection que nous venons de considérer.

12. Cette conséquence suppose expressément que les lettres a, b, p,...., disparaissent du résultat de la substitution indépendamment de toute relation particulière de grandeur existante entre elles, et en ayant simplement égard à la liaison purement descriptive qui existe entre les points et les distances du système, telle que leur contiguïté ou juxtaposition, leur direction en ligne droite, etc. Mais il serait inutile d'avoir égard à toute dépendance moins générale; comme, par exemple, à celle qui aurait lieu si un certain nombre de points étaient rangés sur une circonférence de cercle; car les relations examinées ne pourraient s'appliquer à toutes les projections possibles de la figure, mais seulement à celles où la circonférence en ques-

tion demeurerait un cercle; or ces relations doivent, par hypothèse, se vérifier indépendamment de ces circonstances particulières.

13. La contiguïté ou juxtaposition de deux distances ou de deux *segments* de ligne droite, AB et BC, qui ont une extrémité commune, peut s'exprimer immédiatement, en écrivant que la projetante SB ou *b*, qui correspond à cette extrémité, est la même pour l'une et pour l'autre; leur direction en ligne droite peut s'exprimer d'une manière tout aussi simple, en écrivant que les perpendiculaires *p* qui leur correspondent sont aussi égales. Quant à la condition qui exigerait que la figure fût en totalité ou seulement en partie sur un plan, elle serait beaucoup plus difficile à exprimer; aussi voulons-nous borner nos recherches aux relations qui se vérifient indépendamment de cette circonstance particulière, et sont nécessairement plus générales que les autres, puisqu'elles auront lieu, non-seulement pour les projections planes de la figure proposée, mais aussi pour la projection beaucoup plus générale définie art. 9, et qu'on peut appeler *projection* ou *perspective-relief*.

14. Il y a plus, ces relations subsisteront même quand on supposera que tout se passe dans un plan, c'est-à-dire quand on supposera que le centre de projection, la figure donnée et sa projection se trouvent à la fois dans un seul et même plan. Ce genre particulier de projection pourrait s'appeler *projection* ou *perspective dans un plan*. On peut la considérer évidemment comme la projection plane d'une autre projection déjà existante dans l'espace, ou comme le rabattement de cette dernière sur le plan de projection.

15. Enfin ces mêmes relations subsisteront encore pour la projection de la figure donnée sur une seule et unique ligne droite; ce qui suppose nécessairement que cette droite, le centre de projection et la figure donnée soient dans un même plan, comme dans le cas qui précède. La droite en question remplissant ici la fonction de plan de projection, ou de *tableau*, on peut appeler l'espèce de projection qui en résulte *projection sur une droite*.

16. Au reste, on peut remarquer, quelle que soit l'espèce de projection que l'on considère, que les relations projectives qui appartiennent à la figure proposée, par cela même qu'elles satisfont aux conditions ci-dessus prescrites (11), doivent aussi subsister entre les constantes *m*, *m'*,..., lesquelles ne dépendent absolument (9) que de l'ouverture plus ou moins grande des angles ASB, CSD,..., qui leur correspondent respectivement, et qu'on peut appeler *angles projetants* des droites AB, CD,....

En effet, supposons chacune de ces relations réduite à sa plus simple expression, et par conséquent composée de termes tous différents et sans dénominateurs : il est clair qu'en substituant dans chaque terme, à la place des longueurs AB, CD,..., les valeurs trouvées ci-dessus (9) qui leur correspondent respectivement, il ne pourra se faire aucune réduction de terme à terme, non plus qu'auparavant; car chaque nouveau terme sera affecté d'un coefficient composé en m, m',..., comme l'ancien l'était en AB, CD,...; c'est-à-dire qu'ils seront tous différents entre eux. Donc les lettres a, b, p,... devant disparaître indépendamment d'aucune relation particulière, il faudra qu'elles disparaissent comme facteurs communs à tous les termes, en sorte qu'il ne restera plus qu'une relation composée en m, m',..., seules, comme la relation proposée l'est elle-même en AB, CD,....

Réciproquement, s'il existe entre les constantes m, m',..., appartenant aux différents angles projetants d'une figure donnée, une relation telle, qu'en y remplaçant ces constantes par les distances qui leur correspondent respectivement, la nouvelle relation ainsi obtenue satisfasse aux conditions particulières de l'article 11, cette relation aura lieu effectivement entre les distances dont il s'agit, non-seulement pour la figure que l'on considère en particulier, mais encore pour toutes celles qui peuvent en être censées la projection (*).

17. Les quantités m, m',..., que nous venons de considérer, ne sont évidemment autre chose que les *sinus* des angles projetants, ou les rapports constants entre les perpendiculaires abaissées des différents points de l'un des côtés de chacun de ces angles sur le côté correspondant, et les distances de ces mêmes points au sommet commun ou centre de projection; ainsi l'on peut énoncer le principe général qui suit :

Si, à partir d'un point quelconque pris pour centre de projection, on dirige un faisceau de lignes droites projetantes vers les différents points d'une figure donnée arbitrairement dans l'espace ou sur un plan, et que les parties de cette figure aient entre elles une ou plusieurs relations métriques projectives, satisfaisant aux conditions prescrites (art. 11), *les mêmes relations auront lieu aussi entre les sinus des angles projetants qui leur correspondent respectivement.*

18. Supposons maintenant que le centre de projection soit précisément le centre d'une surface sphérique, prise elle-même pour surface de projection;

(*) On doit pourtant excepter le cas où le centre de projection serait supposé à l'infini, parce qu'alors les relations posées (art. 9) cessent de subsister (*Voyez* plus loin, art. 47.)

les diverses longueurs ou distances linéaires de la figure donnée se trouveront remplacées par des arcs de grands cercles de la sphère, lesquels auront pour sinus les sinus mêmes des angles projetants qui leur correspondent respectivement; en sorte qu'on a cet autre théorème général, identique, quant au fond, avec le premier :

Une figure étant donnée, à volonté, dans l'espace ou sur un plan, si on la projette sur une surface sphérique quelconque, dont le centre coïncide avec celui de projection, toutes les relations projectives satisfaisant aux conditions prescrites (art. 11), et qui appartiennent aux distances qui séparent entre eux les divers points de cette figure, auront lieu aussi entre les sinus des arcs de grands cercles correspondants.

19. Les mêmes choses ont évidemment lieu, d'une manière analogue, pour les relations purement graphiques de la figure donnée, et qui sont projectives de leur nature (5); c'est-à-dire que ces relations subsisteront aussi entre les droites, plans et cônes *projetants*, et entre les points, arcs de grands cercles et courbes à double courbure qui leur correspondent respectivement sur la surface de la sphère qui a pour centre celui de projection, pourvu toutefois qu'on n'entende plus parler, dans ce dernier cas, du degré des diverses lignes, qui sera nécessairement doublé aussi bien que le nombre des points de la figure. Cette dernière extension a même lieu quand on projette la figure donnée sur une surface quelconque, à partir d'un point donné de l'espace pris pour centre de projection; mais ces considérations générales sont étrangères à l'objet véritable des recherches que nous avons en vue dans ce travail.

20. Parmi l'infinité de relations projectives qui satisfont aux conditions particulières de l'article 11, il en est qui méritent surtout d'être remarquées par la facilité avec laquelle on peut, à l'avance, en assigner le caractère, et, par suite, les reconnaître au simple énoncé, sans qu'il soit nécessaire d'effectuer en aucune manière les substitutions prescrites.

Supposons, en effet, une relation ou équation à deux termes, sans dénominateurs, composés chacun d'un même nombre de facteurs exprimant de simples distances entre les divers points d'une figure donnée; supposons encore, si l'on veut, que l'un des membres ou tous deux soient multipliés par des nombres absolus d'ailleurs quelconques; il est évident que cette relation satisfera aux conditions de l'article dont il s'agit : 1° *si les mêmes lettres se retrouvent dans les facteurs linéaires qui composent les deux membres ;* 2° *si à chaque distance appartenant à l'un des membres, il en correspond une*

autre dans le second, qui ait la même direction que la première ou soit sur la même droite. Car, par suite de la première hypothèse, toutes les projetantes a, b, c,..., disparaitront du résultat de la substitution, et, par suite de la seconde, il en sera encore ainsi des perpendiculaires p, p',...; en sorte qu'il ne restera plus qu'une relation entre les quantités m, m',..., qui sont indépendantes les unes des autres.

On remarquera que, pour arriver à cette conséquence, il n'est nullement nécessaire de recourir aux principes de l'Algèbre; il suffit de posséder les notions les plus simples de la théorie ordinaire des proportions ou des rapports géométriques; car la relation qui vient de nous occuper peut aisément se ramener à l'égalité de deux rapports composés, et les raisonnements des articles 9 et 10 peuvent alors se réduire eux-mêmes à des considérations fort simples sur ces sortes de quantités.

Nous verrons plus tard que les relations particulières qui viennent d'être définies d'une manière purement géométrique sont presque les seules qu'on rencontre dans les recherches où l'on se propose de découvrir les propriétés projectives de certaines figures; on doit concevoir, d'après cela et d'après ce qui a été dit ci-dessus (7), quelle est l'importance des discussions auxquelles nous nous sommes livrés dans ce qui précède.

21. Pour donner un exemple très-simple de cette sorte de relation, nous considérerons les quatre points A, B, C, D (*fig.* 2), situés en ligne droite, et liés entre eux par la proportion

$$\frac{CA}{CB} = \frac{DA}{DB};$$

c'est-à-dire que la ligne AB est divisée en *segments proportionnels* par le point C et le point D.

Il est évident que cette relation rentre dans la classe particulière de celles de l'article 20; donc elle aura lieu pour toutes les projections de la figure (*): propriété qui a été connue des anciens, comme il paraît d'après la Proposition CXLV du VIIe livre des *Collections Mathématiques* de Pappus.

(*) M. Brianchon arrive à ce résultat ainsi qu'à quelques autres, d'une manière à peu près semblable, en observant que: « pour quatre droites fixes issues d'un même point, sous des angles » quelconques, et rencontrées en A, B, C, D par une droite transversale arbitraire,

$$\frac{AC}{AD} : \frac{BC}{BD} = \text{const.} \text{ »}$$

(*Mémoire sur les lignes du second ordre*. Paris, 1817.)

22. La relation ci-dessus jouit d'un grand nombre de propriétés curieuses, et se reproduit souvent dans les recherches géométriques; en la mettant sous cette forme

$$\frac{DA - DC}{DC - DB} = \frac{DA}{DB},$$

on voit qu'elle revient à la *proportion harmonique*, telle qu'elle a été définie par les Grecs (même ouvrage, liv. III), proportion où n'entrent que les distances du point D aux trois autres A, C, B; c'est pourquoi la distance du point D au point C, intermédiaire entre les points A et B, se nomme la *moyenne harmonique* des deux autres DA et DB.

23. D'après cela, on dit aussi qu'une droite est divisée *harmoniquement* par deux points, lorsque les segments *respectifs* qu'ils forment sur elle sont proportionnels, ce qui exige nécessairement que l'un de ces points soit sur la droite elle-même et l'autre sur son prolongement.

Ainsi les droites AB et CD sont divisées harmoniquement, la première par C et D, l'autre par A et B; car on a réciproquement (21)

$$\frac{AC}{AD} = \frac{BC}{BD}.$$

Les deux points C et D, étant étroitement liés entre eux par rapport à la droite AB sur laquelle ils se trouvent, sont *conjugués* l'un de l'autre: il en est de même des points A et B par rapport à CD.

Nous verrons plus tard (155) un moyen de trouver, *avec la règle seule*, le point qui est le conjugué d'un autre, et divise avec lui la droite correspondante en segments proportionnels ou harmoniquement.

24. Les quatre points A, B, C, D qui viennent d'être définis se nomment, par abréviation, *harmoniques*, et il en est de même des quatre droites qui projetteraient ces points d'un autre point quelconque de l'espace: l'ensemble de ces quatre droites, que Lahire appelle aussi *harmonicales* (*), forme de plus un *faisceau harmonique* (**); ainsi (21):

Un faisceau harmonique est coupé par une droite transversale quelconque en quatre points harmoniques.

25. Il est évident encore que la proportion (21) a lieu entre les sinus des angles qui, dans le faisceau harmonique, correspondent aux segments dont

(*) *Traité des sections coniques*, in-folio, liv. Ier, p. 5.

(**) *Voyez* le Mémoire de M. Brianchon, déjà cité précédemment (21, note).

elle se compose et en sont les angles projetants (17); et réciproquement, si la relation dont il s'agit a lieu entre les angles de quatre droites convergeant en un même point, ces quatre droites formeront un faisceau harmonique (*). Il n'en est plus de même de la proportion (22), car elle ne satisfait pas aux conditions particulières de l'article 11. Il ne faut pourtant pas en conclure qu'elle ne soit pas projective, puisque le contraire a évidemment lieu.

26. En général, quand une relation quelconque entre les distances d'une figure ne satisfait pas aux conditions dont il s'agit, on ne peut affirmer, ni qu'elle soit, ni qu'elle ne soit pas projective; seulement, elle ne peut être de la nature de celles qui sont à deux termes, lesquelles doivent toutes (20) satisfaire à ces conditions pour être projectives. Il faut alors avoir recours à d'autres moyens, et chercher, par exemple, à transformer cette relation en une autre qui jouisse du caractère particulier dont il s'agit. C'est ainsi que, la proportion (22) se ramenant de suite à celle (21), on en peut conclure qu'elle est, par là même, projective de sa nature. On en verra des exemples beaucoup plus généraux dans le tome II.

Il y a tout lieu de croire, au reste, que les mêmes transformations doivent être possibles pour des relations projectives quelconques; car d'une part, comme nous l'avons déjà fait observer, presque toutes les relations projectives qu'on rencontre dans les recherches sont de la nature particulière de celles qui satisfont aux conditions de l'article 20; et, d'une autre, on peut obtenir au moyen de celles-ci, combinées d'une manière convenable avec celles qui expriment la juxtaposition des distances rangées sur une même droite, une infinité de relations qui seront nécessairement projectives, et ne satisferont pourtant pas aux conditions particulières dont il s'agit.

27. Supposons (*fig.* 2) que le point D soit à l'infini, ou que SD soit parallèle à AB; les segments DA et DB devenant à la fois infinis, et ne différant entre eux que de la quantité finie AB, auront pour rapport l'unité, et il en sera de même par conséquent de ceux CA et CB auxquels ils sont proportionnels; c'est-à-dire que :

Si l'on coupe un faisceau de quatre droites harmoniques (24) par une autre droite parallèle à l'une quelconque des premières, la conjugée à celle-ci divisera en parties égales la distance comprise entre les deux autres sur la transversale; et réciproquement, si cela a lieu à l'égard du faisceau de quatre droites convergeant en un même point, ces quatre droites seront harmoniques.

(*) *Essai sur la Théorie des transversales*, par M. Carnot (art. 15).

Si la ligne AB se trouvait divisée en un nombre quelconque de parties égales, le point à l'infini de cette droite serait, d'après ce qui précède, le quatrième harmonique de trois points de division consécutifs quelconques; donc, si l'on projetait tous ces points, à partir de S, sur une transversale arbitraire A'B', en observant que la projetante du point à l'infini est parallèle à AD, la même relation aurait lieu encore entre les différents points de la projection, et l'on obtiendrait sur la distance qui représente AB ce qu'on nomme une *échelle fuyante*, échelle qui est d'un grand secours dans la perspective: le nombre des divisions de l'échelle harmonique aussi bien que le point qui représente celui à l'infini de l'échelle ordinaire étant donnés, il sera aisé d'obtenir, soit par le calcul, soit de toute autre manière, les différentes parties dont elle se compose (*).

28. La proposition énoncée ci-dessus sur le faisceau de quatre droites harmoniques pouvant se démontrer d'une manière très-simple, à l'aide de quelques triangles semblables, il en résulte, *à posteriori*, une justification entièrement rigoureuse de la notion, souvent admise, d'où nous sommes partis, et dont l'énoncé général est que :

Si deux distances ou grandeurs infinies ne diffèrent entre elles que d'une quantité finie et donnée, leur rapport sera l'unité; en sorte qu'elles pourront être regardées comme rigoureusement égales entre elles.

Il est évident d'ailleurs que cela a lieu, soit que les distances infinies que l'on considère appartiennent à une même droite, ou à des droites différentes et par conséquent parallèles; on voit de plus que, pour que la condition soit parfaitement remplie dans les deux cas, il est indispensable que ces diverses distances puissent être censées, d'une part, aboutir au même point à l'infini, et que, d'une autre, elles aient leur origine en des points donnés à distance finie des autres objets de la figure; car c'est alors seulement qu'on pourra regarder ces mêmes distances comme différant entre elles de quantités également finies.

29. D'après ce que nous avons dit (27) relativement au cas où l'un quelconque des quatre points harmoniques A, B, C, D passe à l'infini, on voit que, si le centre de projection S, où convergent les quatre droites du faisceau harmonique qui s'appuie sur ces points, passe en même temps à l'infini, ou que ces quatre droites deviennent parallèles, on voit, dis-je, que la droite qui répond au point dont il s'agit passera elle-même tout entière à l'infini, et

(*) *Application de la Théorie des transversales*, par C.-J. Brianchon, § 67. Paris, 1818.

que sa conjuguée harmonique divisera en parties égales l'intervalle compris entre les deux autres; c'est-à-dire que celles-ci seront placées symétriquement par rapport à la première.

Réciproquement, si trois droites parallèles sont disposées ainsi, la conjuguée harmonique de celle du milieu pourra être regardée comme située entièrement à l'infini; et, en effet, toute transversale déterminera évidemment dans le faisceau de ces quatre droites quatre points harmoniques (28), puisque, d'après les notions les plus simples de la théorie des parallèles, le point conjugué à celui qui est à l'infini divisera en parties égales la distance comprise, sur la transversale, entre les deux autres.

30. La division harmonique des lignes donne lieu à beaucoup d'autres remarques curieuses: ainsi, par exemple, on a, entre les segments formés par les quatre points harmoniques A, B, C, D considérés ci-dessus (21), la nouvelle relation

$$\frac{CD}{AD} = 2\,\frac{CB}{AB} \quad \text{ou} \quad AB.CD = 2\,AD.CB.$$

En effet, d'abord cette relation est projective (20), ensuite elle a lieu sur une droite parallèle à la projetante du point D; car, d'après ce qui précède, le point D passant à l'infini, le rapport de CD à AD devient l'unité, tandis que celui de CB à AB est une demie.

On a de même évidemment la relation

$$AB.CD = 2\,AC.BD,$$

qui est une suite de la précédente, et aurait pu se déduire directement, ainsi qu'elle, de celle qui définit les quatre points harmoniques A, B, C, D, si nous n'avions préféré montrer une nouvelle application des principes posés dans ce Chapitre.

31. Supposons que l'on divise la distance CD, moyenne harmonique entre DB et DA, en deux parties égales au point O, on pourra mettre la proportion de l'article 21 sous cette forme

$$\frac{AO - DO}{DO - BO} = \frac{AO + DO}{DO + BO};$$

d'où l'on tire

$$\overline{DO}^2 = \overline{OC}^2 = OA.OB.$$

La même proportion donne encore

$$\frac{\overline{CA}^2}{\overline{CB}^2} = \frac{CA}{CB}\cdot\frac{DA}{DB} = \frac{AO - DO}{DO - BO}\cdot\frac{AO + DO}{DO + BO} = \frac{\overline{AO}^2 - \overline{DO}^2}{\overline{DO}^2 - \overline{BO}^2};$$

et par conséquent, en substituant à $\overline{DO}^2$ sa valeur ci-dessus,

$$\frac{\overline{CA}^2}{\overline{CB}^2}=\frac{AO}{BO}.$$

Ces dernières relations nous seront utiles pour la partie des applications où nous aurons à faire connaitre quelques-unes des propriétés du point O. On remarquera, au surplus, qu'elles ne sauraient appartenir aux projections de la figure, attendu que, pour ces projections, le point O cesse, en général, d'être le milieu de la distance CD.

32. Nous croyons superflu de donner d'autres exemples de relations projectives; leur nombre, en se bornant même à celles qui sont relatives aux segments formés par différents points rangés sur une même droite, n'est pas aussi restreint qu'on pourrait le croire au premier abord, et chacune d'elles donnerait lieu à des observations aussi intéressantes que celles qui viennent d'être faites sur la proportion harmonique.

La plupart de ces relations paraissent d'ailleurs avoir été connues des anciens qui en étudiaient les transformations sous le titre de *Lemmes ;* c'est ce qu'on peut voir, entre autres, par le VII[e] livre des *Collections Mathématiques* de Pappus. Mais les anciens ne s'étaient pas bornés simplement aux relations projectives, ils avaient étendu leurs recherches à toutes sortes de relations entre les distances de divers points rangés sur une même droite; et cette partie de leurs travaux, alors si pleine d'intérêt et aujourd'hui si négligée par suite des progrès du calcul algébrique, formait à elle seule la moitié de leurs écrits géométriques, dont elle était la base essentielle.

Nous pensons que c'est dans ces sortes de *Lemmes,* qui correspondent parfaitement à nos transformations algébriques, que consistait principalement l'avantage de l'*Analyse géométrique* des Grecs. Tel est, par exemple, ce lemme qu'on retrouve encore dans tous les éléments de nos jours : « Le carré fait » sur la somme ou la différence de deux lignes égale le carré de la pre- » mière, plus le carré de la seconde, plus ou moins le double du rectangle » de l'une par l'autre. »

Il est évident qu'il ne fallait plus qu'un pas pour passer de là au calcul algébrique lui-même. Mais les Grecs n'employaient presque exclusivement que le mécanisme des proportions pour opérer ces sortes de transformations, et, quoiqu'ils s'y fussent rendus très-habiles, ils n'avaient pas créé d'algorithme général et de règles fixes; aussi sont-ils restés fort au-dessous des modernes.

33. Avant de terminer ce sujet, nous donnerons dès à présent une idée de la facilité avec laquelle les principes qui précèdent peuvent conduire aux diverses propriétés connues des sections coniques, d'autant plus que presque toutes ces propriétés nous seront indispensables pour ce que nous aurons à dire dans les Chapitres suivants.

Je commence par établir ce beau théorème, qui n'est, comme on le verra plus tard, qu'un cas particulier d'un autre beaucoup plus général dû à l'illustre auteur de la *Géométrie de position*.

34. *Soit* ABC (*fig.* 3) *un triangle quelconque, situé sur le plan d'une section conique, et dont les côtés* AB, BC, AC, *ou leurs prolongements, sont rencontrés en* P *et* P', Q *et* Q', R *et* R' *respectivement par cette courbe : je dis qu'on aura*

$$AP.AP'.BQ.BQ'.CR.CR' = BP.BP'.CQ.CQ'.AR.AR'.$$

En effet, cette relation est, de sa nature, projective, et satisfait aux conditions particulières de l'article 20; de plus, elle se vérifie aisément pour le cas du cercle, au moyen de la propriété connue des sécantes; elle a donc lieu pour une section conique quelconque, dont le cercle peut être censé la projection.

35. Supposons que les côtés AB et AC, de concourants qu'ils étaient, deviennent parallèles (*fig.* 4), le sommet A passera à l'infini, et les segments qui lui correspondent pourront être considérés comme égaux (28); donc la relation ci-dessus se changera en cette autre

$$BQ.BQ'.CR.CR' = BP.BP'.CQ.CQ',$$

ou

$$\frac{BP.BP'}{BQ.BQ'} = \frac{CR.CR'}{CQ.CQ'};$$

c'est-à-dire que *le produit des ordonnées* BP, BP' *est à celui des abscisses correspondantes* BQ, BQ' *dans un rapport constant pour toutes les parallèles à* AB : propriété très-anciennement connue des sections coniques, et qui subsiste, ainsi que la précédente, quand on remplace la courbe par le système de deux lignes droites quelconques.

36. Supposons encore que le triangle ABC (*fig.* 5), au lieu d'avoir des côtés parallèles, soit circonscrit à la section conique et la touche aux points P, Q, R : la relation ci-dessus (34) deviendra évidemment, à cause que les points P et P', Q et Q', R et R' (*fig.* 3) se seront respectivement confondus en un seul,

$$AP.BQ.CR = BP.CQ.AR,$$

laquelle exprime une autre propriété très-remarquable des sections coniques également due à M. Carnot.

37. Supposons, de plus, maintenant que le côté BC du triangle circonscrit soit mené parallèlement à la *corde de contact* PR de l'angle opposé A, c'est-à-dire à la droite qui joint les points de contact des côtés de cet angle : on aura

$$\frac{AP}{BP} = \frac{AR}{CR};$$

donc $BQ = CQ$, et par conséquent le point Q appartient à la droite AO qui passe par le sommet de l'angle A et par le milieu O de la corde de contact PR.

En menant la nouvelle tangente B'C' parallèlement à la première BC et à la corde PR, on conclurait de même que son point de contact Q' est sur la droite AO : ainsi cette droite appartient à la fois à toutes les cordes de la section conique qui seraient parallèles à celle PR ou aux tangentes BC et B'C'; c'est-à-dire, en d'autres termes, que *les cordes parallèles des sections coniques ont leurs milieux et les points de concours des tangentes qui correspondent à leurs extrémités respectives, distribués sur une même droite appelée* diamètre.

38. Pareillement, si l'on observe que les trois tangentes BQ, BB', B'Q', prolongées d'une manière convenable, peuvent être censées former un triangle circonscrit BB'K dont les côtés BK et B'K sont parallèles et concourent à l'infini en K (*), on conclura de ce qui précède (28 et 36) la nouvelle relation

$$PB.Q'B' = PB'.QB.$$

Mais, à cause des parallèles BQ, OP et B'Q',

$$\frac{PB}{PB'} = \frac{OQ}{OQ'} \quad \text{et} \quad \frac{QB}{Q'B'} = \frac{AQ}{AQ'};$$

donc

$$\frac{OQ}{OQ'} = \frac{AQ}{AQ'};$$

c'est-à-dire que *le diamètre* QQ' *est divisé harmoniquement* (23) *par le milieu de chaque corde* PR *et par le sommet* A *de l'angle circonscrit correspondant* (**).

(*) Désormais, pour indiquer que plusieurs lignes ont un point commun hors du champ de la figure, nous terminerons ainsi leurs extrémités par la même lettre censée représenter ce point.

(**) C'est la XXXVIII[e] Proposition du I[er] livre des *Coniques d'Apollonius*.

On voit que, si l'une des extrémités du diamètre, Q par exemple, passait à l'infini, ce qui arrive nécessairement quand la courbe est une parabole, la relation ci-dessus deviendrait simplement (27)

$$OQ' = AQ';$$

c'est-à-dire que, *dans la parabole, la partie du diamètre comprise entre la corde du contact et le sommet de l'angle circonscrit correspondant est divisée en parties égales par le sommet de la courbe.*

39. De là on déduirait immédiatement toutes les définitions et les propriétés connues du *centre*, des *axes*, des *diamètres conjugués* et des *asymptotes* (4) des sections coniques.

Soient, par exemple, MN et PR (*fig.* 6) deux cordes parallèles d'une section conique quelconque, AB le diamètre *conjugué* à leur direction commune, c'est-à-dire celui qui passe par leurs points milieux O et Q (37), la proportion de l'article 35 deviendra évidemment

$$\frac{\overline{OM}^2}{OA.OB} = \frac{\overline{PQ}^2}{QA.QB};$$

d'où l'on tire

$$\overline{OM}^2 = p.OA.OB,$$

p étant une quantité constante qui ne varie qu'avec la direction du diamètre AB, et représente évidemment, dans le cas de l'*ellipse* et de l'*hyperbole*, le rapport inverse du carré de ce diamètre à celui qui lui est conjugué.

40. Dans le cas particulier de la parabole, les mêmes choses n'ont plus lieu, à cause que l'une des extrémités, B par exemple, du diamètre AB passe nécessairement à l'infini avec le centre de la courbe; la relation de l'article 35 devient simplement alors, en observant que les segments BQ et BO, qui partent du sommet B, ont pour rapport l'unité,

$$\frac{\overline{OM}^2}{OA} = \frac{\overline{PQ}^2}{QA};$$

d'où l'on tire

$$\overline{OM}^2 = p.OA,$$

p étant encore une quantité constante pour un même diamètre, et qui a évidemment une signification tout autre que celle qu'on lui a attribuée ci-dessus, puisqu'ici c'est une ligne appelée *paramètre*, et non plus simplement un nombre.

41. Dans tous les cas, et quelle que soit la nature particulière de la courbe, on obtiendra très-facilement la valeur de la constante p, au moyen d'une seule *ordonnée* OM et du segment ou des segments qui lui correspondent sur le diamètre AB; de sorte que, sans s'inquiéter si cette courbe est de telle ou telle espèce, on pourra la construire entièrement au moyen de ces seules données, et être sûr par conséquent que c'est une section conique. Or, il en résulte cette conséquence générale, qu'il nous était indispensable d'établir pour ce qui suit : *La projection d'une section conique quelconque sur un plan arbitraire est encore une section conique.*

Il est visible, en effet, que la projection d'une section conique quelconque sur un plan devra jouir de la propriété générale de l'article 34, puisqu'elle est projective, et par suite de toutes celles qui viennent d'être établies dans ce qui précède, et qui sont la conséquence de celle-là; mais les dernières de ces propriétés sont aptes à décrire la courbe, et ne peuvent décrire que des sections coniques sous les mêmes données; donc la projection d'une section conique est nécessairement aussi une section conique.

42. Au reste, on déduirait avec la même facilité, de ce qui précède, les propriétés de *similitude* des sections coniques en général. A cet effet, nous ferons observer que, pour que deux courbes quelconques soient semblables, il faut qu'on puisse les considérer, l'une et l'autre, comme les limites de polygones semblables d'un nombre infini de côtés infiniment petits. Mais, d'après la théorie de ces sortes de figures, pour que deux polygones soient semblables, il est nécessaire et il suffit qu'on puisse les décrire, l'un et l'autre, sous des données et par des constructions elles-mêmes *semblables*, c'est-à-dire telles, que les parties qui les composent appartiennent à des figures semblables, ce qui exige simplement que les distances homologues y soient proportionnelles et fassent les mêmes angles de part et d'autre; donc, pour que deux courbes quelconques soient semblables, il est nécessaire et il suffit que les mêmes conditions soient remplies; c'est-à-dire que, ces conditions ayant lieu, *toutes les autres lignes homologues seront, par là même, proportionnelles, et formeront les mêmes angles dans les deux courbes* (*) : ainsi, par exemple, on pourra inscrire et circonscrire à l'une d'elles des polygones semblables à ceux qui sont inscrits et circonscrits à l'autre, etc.

43. Pour en venir maintenant à notre objet, nous remarquerons que,

(*) Si, de plus, les droites homologues sont parallèles dans les figures élémentaires qui construisent les proposées, la même chose aura lieu dans celle-ci; en sorte qu'elles ne seront plus simplement semblables, mais *semblables et semblablement placées* entre elles.

d'après ce qui précède, pour que deux sections coniques soient semblables, il faut d'abord qu'elles soient de même espèce; que de plus, en traçant dans l'une et dans l'autre deux diamètres homologues, que je nomme (AB) et (A'B'), les conjugués à ces diamètres, ou, plus généralement, les directions de cordes que ces diamètres divisent respectivement en parties égales, fassent avec eux le même angle de part et d'autre, car ces directions sont parallèles à celles des tangentes aux extrémités des diamètres (AB), (A'B'), lesquelles sont évidemment homologues. En second lieu, si l'on prend à chaque instant sur ces diamètres des points (O) et (O') qui les divisent en segments proportionnels, ou qui soient entre eux dans le rapport de (AB) à (A'B'), il faudra que les ordonnées ou demi-cordes correspondantes (OM) et (O'M') soient aussi entre elles dans le même rapport; car alors la construction des deux courbes (41) sera exactement ce que nous avons appelé *semblable* de part et d'autre, et ces courbes, par conséquent, seront elles-mêmes semblables. Mais, puisque ce sont des sections coniques, on a en général (39)

$$\overline{OM}^2 = p.OA.OB,$$

$$\overline{O'M'}^2 = p'.O'A'.O'B';$$

d'où

$$\frac{\overline{OM}^2}{\overline{O'M'}^2} = \frac{p.OA.OB}{p'.O'A'.O'B'}.$$

D'un autre côté, on a, par hypothèse,

$$\frac{OA}{O'A'} = \frac{OB}{O'B'} = \frac{AB}{A'B'},$$

donc

$$\frac{\overline{OM}^2}{\overline{O'M'}^2} = \frac{p.\overline{AB}^2}{p'.\overline{A'B'}^2},$$

par où l'on voit que les ordonnées OM, O'M' ne peuvent être entre elles dans le rapport de AB et A'B', à moins que les constantes p et p' qui leur appartiennent ne soient égales.

Réciproquement, si cela est, et qu'en même temps les autres conditions qui précèdent soient remplies, les ordonnées correspondantes à des segments proportionnels aux diamètres AB et A'B' seront elles-mêmes proportionnelles à ces diamètres, et les constructions des deux courbes seront semblables : c'est-à-dire que :

Deux sections coniques (ellipses ou hyperboles) *sont semblables, quand les*

cordes conjugées à deux diamètres de ces courbes forment, de part et d'autre, le même angle avec ces diamètres, et que, de plus, la constante p qui correspond à ces diamètres est aussi la même, ou, en d'autres termes, quand ces diamètres sont entre eux comme leurs conjugués (*).

44. Dans le cas particulier où les sections coniques sont des paraboles, les diamètres AB et A'B' deviennent infinis, et les raisonnements qui précèdent n'ont plus lieu; mais si l'on choisit, dans deux paraboles quelconques, deux diamètres qui fassent le même angle avec leurs cordes conjuguées, ce qui est possible d'une infinité de manières, puis qu'on prenne, sur ces diamètres, des abscisses AO, A'O' qui soient dans le rapport des paramètres p et p' qui leur correspondent respectivement, on aura (40)

$$\frac{\overline{OM}^2}{\overline{O'M'}^2} = \frac{p.OA}{p'.O'A'} = \frac{p^2}{p'^2},$$

c'est-à-dire que les ordonnées OM, O'M' seront elles-mêmes dans ce rapport: d'où il suit par conséquent que les courbes sont semblables : ainsi

Deux paraboles quelconques sont deux courbes semblables.

45. C'est sur ce petit nombre de principes, déjà connus, que nous nous proposons d'établir, dans ce qui suit, les diverses propositions qui doivent former la base de cet ouvrage.

On remarquera, au surplus, que les considérations générales d'où nous avons déduit ces principes ne concernent proprement que les relations projectives qui ont lieu entre les longueurs ou distances qui lient entre elles les différentes parties d'une même figure; mais on pourrait obtenir aisément des résultats analogues pour les relations entre les aires des triangles.

Soient, en effet, ABC (*fig.* 1) un triangle quelconque appartenant à la figure proposée, et A'B'C' sa projection; d'après un théorème connu de la Géométrie élémentaire, analogue à celui déjà cité (9) pour la simple projection des distances, les solidités des pyramides SABC, SA'B'C' sont entre elles dans le rapport des produits des trois arêtes qui comprennent l'angle solide commun S, et par conséquent le rapport de la solidité de chaque pyramide au produit des trois arêtes correspondantes est un nombre constant.

(*) Si, de plus, les deux courbes avaient leurs diamètres conjugués parallèles, elles seraient (42, note) semblables et semblablement placées entre elles, en sorte que leurs axes principaux, leurs asymptotes, etc., seraient également parallèles. On démontrerait d'ailleurs aisément que deux hyperboles quelconques, comprises dans le même angle d'asymptotes, sont nécessairement des courbes semblables de grandeur et de position.



Nommant donc $\frac{m}{3}$ ce rapport, invariable pour un même angle solide S, et a, b, c, les trois arêtes ou projetantes SA, SB, SC, la solidité de la pyramide SABC sera égale à $\frac{m}{3} \cdot a \, . \, b \, . \, c$. D'un autre côté, en nommant P la hauteur de cette pyramide, ou la perpendiculaire abaissée du centre de projection S sur le plan du triangle de base ABC, cette solidité a aussi pour expression $\frac{1}{3}$ P. surf. ABC; donc

$$\text{surf. ABC} = m . \frac{a . b . c}{\text{P}},$$

formule entièrement analogue à celle trouvée ci-dessus (9) pour les simples distances, et qui donne lieu aux mêmes remarques relativement à la projection des aires. C'est-à-dire que, si, dans une relation quelconque entre les aires triangulaires d'une certaine figure, on substitue, à la place de chaque triangle, l'expression ci-dessus qui y correspond, et qu'il arrive que les lettres a, b, c, P disparaissent d'elles-mêmes du résultat de la substitution, cette relation sera nécessairement projective de sa nature, et appartiendra à toutes les figures qui pourront être censées la projection de la première.

46. De là on pourrait déduire beaucoup de conséquences relatives aux aires de certaines figures; mais, quoique cet examen se rattache immédiatement à notre sujet, nous croyons devoir nous borner simplement, dans ce travail, aux relations projectives concernant les distances et la direction indéfinie des lignes, qui offrent par elles-mêmes un assez vaste sujet de recherches.

Au surplus, il est essentiel de remarquer que l'analogie que nous avons reconnue (18 et 19) entre les figures situées dans l'espace ou sur un plan et celles tracées sur une sphère ne subsiste plus quand on ne considère que les relations d'aires qui sont projectives, bien qu'alors même ces relations aient encore lieu entre les quantités constantes m, m'...; car chacune de ces constantes n'a plus de rapport déterminé (*) avec l'ouverture de l'angle solide correspondant, ou avec l'aire du triangle sphérique qui lui sert de mesure.

47. On doit aussi remarquer que la relation ci-dessus (45), de même que celle de l'article 9, relative à la projection des simples distances, n'est applicable qu'au cas où l'on suppose la projection centrale; car, dans la projec-

(*) En effet, la quantité m représente alors le demi-produit du sinus de l'angle de deux arêtes ou projetantes quelconques, par le sinus de l'angle que leur plan fait avec l'arête opposée. *Voyez* un Mémoire de Lagrange, inséré dans le VI[e] Cahier du *Journal de l'École Polytechnique*.

tion *orthogonale* et dans la projection *oblique* sous un angle donné, les projetantes étant parallèles et le centre de projection par conséquent à l'infini, ces relations deviennent insignifiantes, et prennent la forme indéterminée $\frac{0}{0}$. On peut alors les remplacer par les relations suivantes:

$$AB = m.A'B',$$
$$\text{surf. } ABC = m.\text{ surf. } A'B'C',$$

dans lesquelles la lettre *m* représente le rapport des sinus des angles que forment respectivement, avec la direction d'une projetante quelconque, d'une part les droites A'B' et AB, d'une autre les plans A'B'C' et ABC. Mais, notre intention n'étant que de nous occuper des rapports les plus généraux des figures, d'où découlent immédiatement tous les autres comme simples corollaires, ces considérations sur les projections orthogonale et oblique deviennent, en quelque sorte, étrangères à l'objet véritable de ces recherches.

Dans ce qui précède, nous avons exposé les diverses notions à l'aide desquelles on peut reconnaître, au simple énoncé, si une figure et une relation donnée qui la concerne sont projectives; il nous resterait, pour compléter cet objet, à établir les principaux théorèmes de projection qui servent à modifier les figures suivant certaines conditions particulières, et à faire découvrir quelle est la nature de ces modifications et dans quel cas elles sont possibles; mais la démonstration de la plupart de ces théorèmes repose nécessairement sur quelques notions, non encore reçues des géomètres, concernant les changements qui s'opèrent dans certaines figures, quand une ou plusieurs de leurs parties cessent d'avoir une existence absolue et réelle; c'est pourquoi nous allons exposer, dans le Chapitre suivant, ces diverses notions, en en déduisant, par occasion, quelques corollaires relatifs au cas particulier du cercle, corollaires qu'on pourra, au surplus, considérer comme des espèces de lemmes pour la partie des applications.

CHAPITRE II.

NOTIONS PRÉLIMINAIRES SUR LES SÉCANTES ET LES CORDES IDÉALES DES SECTIONS CONIQUES.

48. Il résulte des principes posés dans le précédent Chapitre (37 et 38), qu'une droite indéfinie *mn* (*fig.* 6) étant tracée sur le plan d'une section

conique quelconque (C) (*), 1° le milieu ou centre O de la corde MN qu'y intercepte la courbe se trouve à l'intersection de cette droite et du diamètre AB qui est conjugué à sa direction; 2° le point O' où concourent les tangentes aux extrémités de la corde est, par rapport à ce même diamètre, le conjugué harmonique du point O (23), c'est-à-dire qu'on a

$$\frac{O'A}{O'B} = \frac{OA}{OB}.$$

Or, il résulte de ces définitions des points O et O' que ces points peuvent se construire indépendamment des points M et N, et subsistent par conséquent dans tous les cas possibles, même quand la droite *mn* est extérieure à la courbe.

Cela paraît d'abord évident, *à priori*, pour le premier de ces points, et cela ne l'est pas moins pour le second, comme on va le voir par ce qui suit.

Supposons, en effet, que la droite *mn* se transporte en *m'n'* extérieurement à la courbe; soit O' le point où la rencontre, dans cette nouvelle position, la direction indéfinie du diamètre AB qui renferme le milieu des cordes parallèles à *m'n'*; supposons que, du point O', on mène deux tangentes O'M, O'N à la courbe, elles seront évidemment possibles pour le cas actuel, et viendront déterminer deux points de contact M, N et une corde correspondante MN dont la direction, nécessairement conjuguée à celle du diamètre AB, sera parallèle à *m'n'* et rencontrera ce diamètre au point O demandé; car on aura évidemment (38), entre les points O, O', la relation harmonique dont il a été question ci-dessus.

49. On voit qu'il existe entre les droites *mn*, *m'n'* et les points O, O' qui leur correspondent à la fois, une relation extrêmement remarquable, et qui est telle, que, quand l'une de ces choses est donnée, les trois autres s'ensuivent nécessairement. A cause de la nature particulière de cette relation, on pourrait dire que ces droites et ces points sont *conjugués harmoniques* relativement à la direction commune du diamètre AB; définition qui, au reste, s'accorde avec celle déjà donnée (23) à l'occasion de la division harmonique des lignes.

Quoi qu'il en soit, les points O et O', considérés comme appartenant à la droite *mn*, subsistant indépendamment de la réalité ou de la non-réalité des intersections M, N de cette droite et de la courbe, il n'y a aucune raison

(*) Désormais, nous indiquerons presque toujours ainsi une section conique par la lettre de son centre placée entre parenthèses; et nous pourrons en agir de même à l'égard de courbes quelconques, en substituant à la lettre du centre celle de quelque point remarquable.

de les négliger plutôt dans un cas que dans l'autre, non plus que cette droite elle-même, puisqu'en devenant extérieure à la courbe elle ne cesse pas de conserver certaines dépendances avec elle.

Le point O′ jouit, en particulier, d'un grand nombre de propriétés curieuses, par rapport à la droite dont il s'agit et à la section conique; sa considération est très-importante dans les recherches, et c'est à cause d'une de ces propriétés qu'il a reçu des géomètres le nom de *pôle* de cette droite, tandis que celle-ci a été appelée, à l'inverse, la *polaire* du point O′.

50. Ces dénominations sont, sans contredit, fort simples, et nous pourrons en faire usage, sans d'ailleurs nous attacher, quant à présent, à l'idée qu'entraine, d'après leur acception ordinaire, les mots de *pôle* et *polaire*. Mais aussi, en supposant qu'on ne veuille pas créer des termes nouveaux pour désigner la droite *mn* et ce qui lui appartient, et qu'on persiste à la regarder comme une sécante de la courbe quand elle cesse de la rencontrer, nous dirons, afin de conserver l'analogie entre les idées et le langage, que ses points d'intersection avec la courbe, et par conséquent la corde correspondante, sont *imaginaires*, qu'elle est elle-même *sécante idéale* de cette courbe; et nous la distinguerons ainsi de toute ligne droite entièrement inconstructible dans son cours et sa direction, laquelle conservera d'ailleurs la dénomination, déjà admise, de *droite imaginaire*.

51. Par suite de ces premières définitions, et en supposant que l'on considère la droite indéfinie *m′n′* extérieure à la courbe (C), droite qui, d'après ce qui précède, est sécante idéale de cette courbe, nous dirons aussi que le point O′ est le *centre idéal* de la corde imaginaire que détermine *m′n′*, et le point O le *concours idéal* des tangentes imaginaires qui correspondent aux extrémités de cette corde, laquelle prend d'ailleurs (37) le nom de *corde de contact* relativement au point O; enfin la droite *m′n′* sera elle-même la *sécante idéale de contact* par rapport à ce point.

52. Pour concevoir l'objet de ces définitions, il suffit de supposer que la section conique que l'on considère ne soit pas décrite, mais seulement donnée par certaines conditions, et qu'alors on se propose de rechercher, soit les points où elle est rencontrée par la droite réelle tracée sur son plan, soit tout autre objet qui en dépende ; car on ignore alors si les uns ou les autres sont ou non possibles, et il est naturel de persister, dans tous les cas, à regarder cette ligne droite comme une sécante véritable de la courbe, et par conséquent de la traiter comme telle dans le raisonnement géométrique qui sert à faire découvrir les objets qu'on cherche.

53. En général, on pourrait désigner par l'adjectif *imaginaire* tout objet qui, d'absolu et réel qu'il était dans une certaine figure, serait devenu entièrement impossible ou inconstructible dans la figure *corrélative*, « celle « qui est censée provenir de la première par le mouvement progressif et « *continu* de quelques parties, sans violer les lois primitives du système ; » l'épithète *idéal* servirait à désigner le mode particulier d'existence d'un objet qui, en demeurant au contraire réel dans la transformation de la figure primitive, cesserait cependant de dépendre d'une manière absolue et réelle d'autres objets qui le définissent graphiquement, parce que ces objets seraient devenus imaginaires. Car, de même qu'on a déjà en Géométrie des noms pour exprimer les divers modes d'existence qu'on veut comparer, tels que *infiniment petits*, *infiniment grands*, il faut aussi en avoir pour exprimer ceux de la non-existence, afin de donner de la justesse et de la précision à la langue du raisonnement géométrique.

Ces définitions ont, sur toutes celles qu'on pourrait leur substituer, l'avantage de pouvoir s'étendre directement à des points, des lignes et des surfaces quelconques ; elles ne sont d'ailleurs ni indifférentes, ni inutiles en elles-mêmes ; elles servent à abréger le discours et à étendre l'objet des conceptions géométriques ; enfin elles permettent d'établir un point de contact, sinon toujours réel, au moins fictif, entre des figures qui paraissent, au premier aspect, n'avoir aucun rapport entre elles, et de découvrir sans peine les relations et les propriétés qui leur sont communes.

54. Pour poursuivre l'objet de ces premières définitions, supposons qu'ayant déterminé le diamètre AB (*fig.* 6) de la section conique, qui est conjugué à la direction de la sécante idéale $m'n'$, et divise par conséquent en deux parties égales toutes les cordes qui lui sont parallèles, on prenne, sur $m'n'$, deux points M′ et N′ satisfaisant à la relation

$$\overline{O'M'}^2 = p.\,O'A.O'B,$$

identique avec celle qui définit les points M et N suivant lesquels la sécante mn, parallèle à la première, rencontre réellement la section conique (39), pourvu toutefois qu'on n'ait point égard à la différence de situation des lignes (*) ; on obtiendra une longueur M′N′, divisée également au point O′, et qu'on pourra regarder comme représentant, d'une manière fictive, la corde

(*) En effet, cette différence de situation entraîne le changement de signe du segment O′B, ce qui rend la relation ci-dessus impossible pour les positions de $m'n'$ extérieures à la courbe ; c'est-à-dire que les ordonnées correspondantes de la courbe deviennent elles-mêmes impossibles ou *imaginaires*.

imaginaire qui correspond à la droite $m'n'$ considérée comme sécante de la courbe. Cela posé, si l'on appelle cette distance *corde idéale* de la section conique proposée, et qu'on construise toutes celles qui lui sont parallèles, leurs extrémités formeront évidemment une autre section conique, qui aura même diamètre de contact AB, même constante p, et par conséquent même grandeur et même direction de diamètre (*réel* ou *idéal*) DE conjugué à AB.

La section conique ainsi construite sera évidemment une hyperbole ou une ellipse, selon que l'autre sera, au contraire, une ellipse ou une hyperbole; elle sera d'ailleurs une parabole, en même temps que la proposée, ayant même diamètre qu'elle avec même paramètre et même tangente au sommet commun parallèle à la direction donnée. Enfin, quand l'une des deux courbes est un cercle, l'autre est une hyperbole équilatère, dont le diamètre de contact est perpendiculaire à la direction donnée $m'n'$. Dans tous les cas, si l'une des deux courbes devient infiniment petite en demeurant semblable à elle-même, c'est-à-dire si elle se réduit à un point, la supplémentaire se réduira elle-même à deux lignes droites confondues avec les asymptotes, et *vice versâ*.

Désormais nous dirons de deux sections coniques, ainsi conjuguées, qu'elles sont *supplémentaires* l'une de l'autre par rapport à la direction de la droite que l'on considère; parce qu'en effet l'une quelconque d'entre elles répond aux questions faites sur l'autre dans le sens qui vient d'être indiqué.

55. Il est à remarquer, au surplus, qu'une même section conique a une infinité de supplémentaires, correspondant à l'infinité de systèmes de diamètres conjugués qui lui appartiennent; mais, parmi cette infinité de supplémentaires, il n'y en a jamais qu'une seule qui corresponde à une direction donnée mn, parce que nous n'admettons que celle dont le diamètre réel AB, ou le diamètre du contact, divise en deux parties égales les cordes de la proposée qui sont parallèles à cette même direction.

Ainsi, quand une ligne droite $m'n'$ est extérieure à une section conique donnée quelconque (C), il y a toujours une autre section conique supplémentaire de la proposée relativement à la direction de cette droite, laquelle intercepte sur elle une distance réelle M'N' qui est la *corde idéale* de la première. Il est évident, en outre, qu'à la même droite $m'n'$ correspondent le même centre O' et le même pôle O dans l'une et l'autre courbes (48); en sorte que ce dernier est à la fois le point de concours idéal des deux tangentes qui appartiennent à la droite $m'n'$ et à la section conique proposée, et le point de concours réel de celles qui appartiennent à cette même droite et

à la supplémentaire de cette section conique. La même chose a lieu évidemment pour le point O′ et la sécante *mn* qui lui est conjuguée.

56. Considérons maintenant le système de deux sections coniques quelconques tracées sur un plan; si elles ont une sécante ou corde réellement commune, il est évident : 1° que les diamètres conjugués à sa direction dans l'une et l'autre courbe iront la rencontrer en un même point, centre de la corde en question; 2° que, si l'on appelle O ce point, AB et A′B′ les diamètres qui lui correspondent, enfin p et p' les constantes qui appartiennent à ces diamètres (39), on aura

$$p.\mathrm{OA}.\mathrm{OB} = p'.\mathrm{OA}'.\mathrm{OB}'.$$

Ces deux conditions sont nécessaires et suffisent évidemment pour déterminer toutes les cordes ou sécantes communes à deux sections coniques quelconques tracées sur un plan; mais elles n'appartiennent pas aux seules cordes réellement communes à ces courbes, elles peuvent aussi appartenir à des droites qui leur seraient entièrement extérieures; il suffit, en effet, d'après ce qui précède, pour que cela ait lieu, que la direction de chacune d'elles soit celle d'une corde réellement commune aux supplémentaires des sections coniques proposées relativement à cette direction : ce qu'on peut exprimer en disant que la droite correspondante doit être une *sécante* ou *corde idéale* commune à ces sections coniques.

57. La question actuelle consiste à savoir si deux sections coniques (C) et (C′), *fig.* 7, tracées sur un plan, ont effectivement, pour des positions générales, des cordes communes idéales remplissant les conditions qui précèdent.

Pour parvenir à la résoudre, nous remarquerons d'abord qu'il y a sur le plan des deux courbes (C) et (C′) une infinité de points O et de droites correspondantes *mn*, qui satisfont à la première de ces conditions. En effet, pour obtenir un système semblable, il suffit évidemment de mener, dans une direction quelconque, des tangentes, parallèles entre elles, aux deux courbes; de tracer ensuite les diamètres AB et A′B′, qui passent respectivement par leurs points de contact; car le point O de leur intersection commune sera le point demandé, et la droite *mn*, menée de ce point dans une direction parallèle aux tangentes, sera la droite qui lui correspond. Tous les points O, ainsi obtenus, sont sur une certaine courbe, et cette courbe passe évidemment par l'un et l'autre centres C, C′ des proposées (*).

(*) Pour démontrer cette assertion, il suffit d'observer que, quand le diamètre AB, par exemple, a atteint la position CC′, celui A′B′ qui lui correspond, et qui renferme avec lui le point O, le rencontre nécessairement au centre C′ lui-même.

Les dernières conditions exigent, en outre, qu'ayant tracé les coniques supplémentaires aux proposées, qui correspondent à la droite *mn* déterminée ainsi que nous venons de le dire, les parties MN, M'N', interceptées sur cette droite par l'une et l'autre courbes, soient égales entre elles, ou, ce qui revient au même, que OM soit égal à OM'. Cette condition ne sera évidemment pas remplie pour une position quelconque de la droite *mn*; mais si, pour chacune des situations qu'elle peut prendre, on détermine le point M correspondant à la courbe (C), et celui M' qui correspond à la courbe (C'), chacun de ces points engendrera évidemment une courbe particulière, et ces courbes indiqueront, par leurs intersections mutuelles, les positions des points générateurs M et M' pour lesquelles ils se confondent, et pour lesquelles par conséquent les parties ou ordonnées OM et OM' sont égales, et les droites correspondantes *mn* des sécantes idéales communes aux deux sections coniques proposées.

Nous pourrions arrêter ici l'examen qui nous occupe, car il est visible que les courbes (M) et (M'), n'ayant entre elles qu'une dépendance générale, doivent aussi, en général, se couper selon la position relative des sections coniques (C) et (C'); mais, pour ne rien laisser à désirer, nous allons faire voir, par l'examen d'un cas très-étendu, qu'en effet les courbes (M) et (M') sont susceptibles de s'entrecouper d'une manière réelle, et par conséquent de donner des cordes idéales communes à celles (C) et (C').

58. Prenons pour exemple général le système de deux ellipses (C) et (C'), de grandeur et de situation arbitraires, mais pourtant telles, qu'elles soient entièrement extérieures l'une à l'autre. La courbe parcourue par le point O, passant nécessairement (57, note) par les centres C et C' des deux ellipses, aura une partie de son cours entièrement au dehors de ces ellipses, et il existera une infinité de positions correspondantes de la droite *mn*, pour lesquelles elle sera tout à fait extérieure à ces mêmes courbes.

Cela posé, considérons, comme ci-dessus, les deux coniques supplémentaires qui correspondent à une telle position de la droite *mn*; il est évident qu'on aura démontré que le point M se confond, pour une certaine position de *mn*, avec le point M', et par conséquent le point N avec le point N', si l'on parvient à prouver que, parmi toutes les grandeurs que peut prendre la corde MN, il y en a deux telles, que l'une soit plus grande et l'autre plus petite que celle de M'N' qui leur correspond; car, à cause de *la loi de continuité*, il y aura nécessairement une position intermédiaire où ces cordes seront parfaitement égales. Or, si l'on suppose que, dans la situation actuelle des hyperboles supplémentaires, MN soit plus grand que M'N', il ne sera pas

difficile de s'apercevoir qu'il existe une autre position du système, pour laquelle la corde MN devient nulle, et par conséquent où les points M et N se réunissent au point O. En effet, cette circonstance arrivera nécessairement lorsque le point O se trouvera sur l'ellipse correspondante (C), en sorte qu'il suffit de démontrer que la courbe des points O rencontre effectivement cette ellipse : mais c'est ce qui a lieu précisément dans la supposition actuelle; car la courbe (O) passant par les centres C et C', et les ellipses étant entièrement extérieures l'une à l'autre, le point O doit nécessairement les traverser, toutes deux, par un mouvement continu.

Donc, en effet, il existe une position du point O pour laquelle la corde MN est plus grande, et une autre pour laquelle cette corde est plus petite que sa correspondante M'N'; ce qui ne peut avoir lieu qu'autant qu'il existe une position intermédiaire où ces cordes sont parfaitement égales, et se confondent par conséquent en une seule, qui devient ainsi une corde idéale commune aux deux ellipses proposées.

59. La courbe des points O rencontrant nécessairement chacune de celles (C) et (C') au moins en deux points réels, puisque, après être entrée dans leur intérieur et avoir passé par leurs centres respectifs, elle doit nécessairement en ressortir, on pourrait prouver, en suivant l'esprit des raisonnements que nous venons de mettre en usage, que les deux sections coniques dont il s'agit ont une autre corde idéale commune différente de celle qui précède. Enfin il ne serait pas difficile de constater l'existence de semblables cordes pour d'autres circonstances également étendues; mais il suffit, pour notre objet actuel, d'avoir prouvé la chose d'une manière générale et, en quelque sorte, *indéterminée*, et d'avoir fait connaître même les moyens propres à construire ces cordes graphiquement dans tous les cas possibles.

En effet, dans la discussion qui précède, nous n'avons attribué aucune grandeur absolue ou fixe aux parties qui déterminent la grandeur et la position du système; la seule condition admise ne tient qu'à une limitation de la possibilité de résoudre le problème, et cette limitation laisse d'ailleurs tout arbitraire. La nature particulière supposée aux deux sections coniques ne détruit pas la généralité des raisonnements; car ces raisonnements en sont indépendants, et ils subsistent, pourvu qu'une partie de la courbe des points O soit à la fois au dehors des deux sections coniques, quelle que soit d'ailleurs leur espèce; or cette condition laisse entièrement indéterminées, entre certaines limites, les grandeurs des parties du système.

Il en est ici évidemment comme dans l'Analyse algébrique elle-même, où l'on regarde une quantité, objet d'un problème, comme généralement pos-

sible, quand les conditions de sa réalité, dans les équations finales qui le déterminent, sont indépendantes de toute grandeur ou relation absolue et donnée, et que ces conditions laissent variables, entre certaines limites, les diverses quantités qui fixent le système.

Concluons donc que :

Deux sections coniques, situées sur un même plan, ont, en général et pour des situations indéterminées, des cordes et des sécantes idéales communes, tout comme elles ont, pour de semblables situations, des points d'intersection réels et des cordes réelles également communes.

60. Pour faire entrevoir, à l'avance, l'utilité que peut présenter la considération des cordes idéales, et, en même temps, pour faire sentir le but qu'on se propose en les admettant dans les recherches géométriques, nous présenterons, dès à présent, un exemple bien connu, où leur emploi peut paraître de quelque importance pour la solution d'une difficulté singulière, qui se présente assez souvent dans les applications de la Géométrie descriptive.

Quand on se propose de rechercher la courbe d'intersection de deux surfaces de révolution dont les axes sont dans un même plan, on arrive, comme l'on sait, à la construction suivante, pour déterminer un point quelconque de la projection de la courbe, sur le plan diamétral qui contient à la fois les deux axes (*).

Soient SB, SB' (*fig.* 8) les deux axes en question ; AMB, A'M'B', ou (C) et (C'), les deux courbes génératrices, situées l'une et l'autre dans le plan commun des axes, courbes que nous supposons ici être toutes deux des ellipses ; du point d'intersection S de ces axes, comme centre, soit décrite à volonté une circonférence de cercle rencontrant à la fois les deux courbes ; soit tracée, pour chacune d'elles, la corde MN ou M'N' qui lui est commune avec ce cercle : le point I de l'intersection mutuelle des deux cordes, ainsi obtenues, appartiendra à la projection de la courbe de pénétration des deux surfaces sur le plan commun des axes.

Cette construction s'applique très-bien à tous les points de la courbe qui sont situés entre les limites extrêmes où le cercle cesse de rencontrer à la fois les ellipses génératrices, et, en cela, elle sert à donner tous ceux qui peuvent répondre à la commune intersection des deux surfaces que l'on considère ; mais elle est tout à fait inapplicable à ceux qui sont situés au delà de ces mêmes limites ; les points M et N, M' et N', où la circonférence coupe

(*) *Voyez* la *Géométrie descriptive* de Monge, art. 83 (1re édition).

les deux génératrices, deviennent en effet, en tout ou en partie, imaginaires (*).

A ne consulter que la manière ordinaire de voir en Géométrie, il semblerait naturel de penser que la génération de la courbe ne s'étend pas au delà des limites que nous venons de reconnaître, et qu'ainsi cette génération ne serait pas sujette à la loi de continuité, qui subsiste dans toutes les courbes géométriques ; mais ce serait une véritable erreur que de le supposer, erreur qui serait contraire aux notions et aux résultats les plus certains de l'Analyse algébrique : on trouve, en effet, par les procédés qui lui sont propres, que la courbe des points I s'étend à l'infini par une loi continue, et qu'en particulier c'est une hyperbole, quand les axes de révolution SB, SB' sont en même temps des axes principaux des ellipses méridiennes. (*Voyez* l'*Errata*.)

61. Ce paradoxe géométrique disparaît dès l'instant où l'on admet, ainsi qu'il est naturel de le faire, que les sécantes communes MN, M'N', qui d'abord étaient réelles et absolues, se sont changées en des sécantes communes purement idéales, jouissant d'ailleurs des mêmes caractères quant à l'objet qu'on se propose. Il résulte, en effet, des principes qui précèdent, que ces sécantes pourront subsister et se construire, même quand le cercle auxiliaire en question ne rencontrera plus les courbes génératrices, ou, si l'on veut, les rencontrera en des points imaginaires.

Supposons, par exemple, le cas déjà cité où les droites AB, A'B' sont les

(*) M. Hachette a déjà fait des remarques semblables pour les cas particuliers où l'on considère la pénétration mutuelle d'une surface cylindrique droite avec une autre surface cylindrique pareille ou avec une sphère (*Correspondance Polytechnique*, t. III, p. 197). Il résout la difficulté en employant l'Analyse des coordonnées, qui lui donne, en effet, un moyen simple de prolonger la projection de la courbe de pénétration des deux surfaces au delà des limites où cette courbe devient imaginaire.

Nous avions depuis longtemps fait la même remarque pour le cas général où la projection de la courbe d'intersection de deux surfaces quelconques s'abaisse à un degré moitié, sans se décomposer. C'est l'examen de la difficulté qui en résulte qui nous a conduits, en partie, à la recherche du système d'interprétation que nous venons de mettre en usage pour les sections coniques.

Depuis, nous avons eu occasion de voir que M. Vallée (*Traité de la Géométrie descriptive*, p. 204) a présenté, au sujet du cas particulier qui vient de nous occuper, des réflexions analogues aux nôtres, et qui tendent à prouver que la courbe des points I n'est pas limitée aux points extrêmes de la pénétration des surfaces données, puisque la construction s'étend naturellement au delà de ces points; mais M. Vallée n'a pas fait attention que cette construction avait elle-même des limites, de sorte qu'elle ne donne pas effectivement tous les points de la courbe; il aurait encore pu remarquer que la courbe demeurerait possible dans le cas même où les deux surfaces cesseraient tout à fait de s'entrecouper. Il est évident que la solution satisfaisante de ces difficultés ne peut se trouver que dans la théorie qui vient d'être exposée, ou plutôt dans l'admission indéfinie de la *continuité des lois géométriques*.

axes principaux de deux ellipses; ayant décrit, à volonté, une circonférence de cercle qui ne rencontre ni l'une ni l'autre de ces courbes, pour trouver, malgré cela, les sécantes communes correspondantes, qui seront nécessairement idéales, on tracera (54) pour chaque ellipse, pour celle (C) par exemple, la conique supplémentaire qui a mêmes axes qu'elle et AB pour diamètre de contact; on tracera pareillement l'hyperbole *équilatère* qui correspond au cercle auxiliaire et a le diamètre compris sur SB pour axe de contact; cherchant ensuite celle des sécantes communes à ces supplémentaires qui est perpendiculaire à l'axe AB, ce sera évidemment (56) la sécante idéale commune au cercle auxiliaire et à l'ellipse (C).

Une opération semblable donnerait celle qui correspond à la courbe (C'), et le point où sa direction irait couper celle de la première serait nécessairement un de ceux du prolongement de la courbe des points I. Il est visible, en effet, que les points ainsi obtenus jouiront de la même propriété que les premiers : savoir que « si, de l'un quelconque d'entre eux, on abaisse des » perpendiculaires sur les diamètres AB et A'B', les rectangles des segments » qu'elles y formeront seront toujours entre eux dans le même rapport (56). »

Il est à remarquer, au surplus, que la construction précédente donnerait simultanément deux sécantes idéales correspondantes à chaque courbe génératrice, et qu'ainsi leur pénétration mutuelle donnerait à la fois quatre points appartenant à la courbe cherchée.

62. On voit, par cet exemple particulier, combien il devient nécessaire d'étendre le langage et les conceptions de la Géométrie ordinaire, et de les rapprocher de celles admises dans la Géométrie analytique. Vouloir repousser des expressions fondées sur des rapports exacts et rigoureux, quoique parfois purement figurés, pour leur substituer des noms insignifiants, et qui ne rappellent que des caractères particuliers et insolites de l'objet défini; éviter de se servir, dans le raisonnement géométrique, des expressions et des notions qui qualifient la non-existence et la rappellent, ce serait véritablement refuser à la Géométrie rationnelle les seuls moyens qu'elle ait de suivre les progrès de l'Analyse, et d'interpréter, d'une manière satisfaisante, les conséquences des résultats souvent bizarres auxquels elle parvient.

Mais il est temps que nous revenions à l'objet véritable des discussions que nous avons un instant abandonnées, dans le dessein de répandre quelque jour sur la nature du sujet.

63. Supposons donc que la sécante, réelle ou idéale, commune au système de deux sections coniques tracées sur un même plan, et qui satisfait aux

conditions ci-dessus prescrites (56), au lieu d'être d'ailleurs quelconque, comme le supposent ces conditions, soit telle, qu'elle ait même pôle dans l'une et l'autre courbe. Dans le premier cas, les deux sections coniques se toucheront (48 et 49) en deux points réels appartenant à cette droite, qui sera ainsi une sécante commune de contact, ou la réunion de deux sécantes réelles communes. Dans le second, les deux supplémentaires des sections coniques proposées, relativement à la direction de la sécante idéale, se toucheront évidemment en deux points réels, situés également sur la direction de cette sécante, qui sera ainsi la réunion de deux sécantes idéales communes aux proposées, ou, si l'on veut, une sécante *idéale de contact commune* à ces courbes. Dans ce même cas, on peut dire aussi, par analogie, que les deux courbes ont un *double contact idéal*, ou se touchent en deux points imaginaires placés sur la sécante commune.

64. Au surplus, quelle que soit l'espèce de sécantes idéales communes que l'on considère, il résulte de ce qui précède qu'elles sont assujetties, dans leur détermination, aux mêmes conditions générales que les sécantes communes réelles, et qu'elles n'en diffèrent absolument que par leur situation à l'égard des deux courbes; les unes et les autres forment naturellement avec ces courbes deux systèmes assujettis aux mêmes lois, en sorte qu'elles doivent jouir des mêmes propriétés et se comporter de la même manière dans les recherches; c'est au moins ce qui résulte, *à priori*, de la loi de continuité; et ce que nous établirons, par la suite, d'une manière entièrement rigoureuse, en donnant des moyens assez simples de les construire, dans tous les cas possibles, par des procédés généraux et indépendants de leur nature particulière. Pour le moment, nous nous contenterons de démontrer leur commune origine dans le cône du second ordre; ou, plus exactement, dans le cône qui a pour base l'ellipse, la parabole ou l'hyperbole.

65. Supposons que l'on coupe une telle surface par deux plans quelconques, il en résultera (41) deux sections coniques, qui auront, en général, deux points réels communs, situés sur la droite d'intersection des deux plans, laquelle sera, par conséquent, aussi en général, une sécante réelle commune à ces courbes et à celles qui proviendraient du rabattement de l'une d'elles, sur le plan de l'autre, autour de la droite d'intersection commune des deux plans. Or je dis que cette droite deviendra une sécante idéale commune, quand les deux courbes cesseront de s'entrecouper.

Soient, en effet, S (*fig.* 9) le sommet du cône, et *mn* la droite en question; on prouve aisément (37) que les centres de toutes les cordes parallèles d'une

surface conique du second ordre sont renfermés dans un même plan appelé *diamétral*, et qui renferme le sommet du cône. Concevons donc le plan diamétral qui est conjugué à la direction de *mn*, et divise les cordes qui lui sont parallèles en deux parties égales, il coupera le cône suivant deux arêtes SA, SB, et les deux plans des sections que l'on y considère suivant deux droites AO, A'O, qui se rencontreront évidemment en un point O de *mn*, et dont les parties AB, A'B', terminées aux arêtes SA, SB, seront les diamètres de ces deux sections, conjugués à la direction de la droite *mn* : or c'est la première des conditions que cette droite ait à remplir (56), pour être sécante idéale commune aux sections coniques dont il s'agit.

Il faut, en outre, qu'on ait, p et p' étant les constantes qui appartiennent aux diamètres AB et A'B',

$$p.\mathrm{OA}.\mathrm{OB} = p'.\mathrm{OA}'.\mathrm{OB}',$$

comme cela a lieu évidemment pour le cas où la droite *mn* rencontre à la fois les deux courbes. Mais on peut toujours déterminer, sur la surface du cône, deux sections (ab), $(a'b')$, parallèles et par conséquent *semblables* (*) aux premières, qui s'entrecoupent d'une manière réelle, et dans lesquelles la relation ci-dessus aura naturellement lieu entre les lignes et les constantes correspondantes ; de plus ces constantes seront nécessairement (43) égales à celles p, p' des sections coniques (AB), (A'B') dont il s'agit, et d'ailleurs toutes les lignes sont respectivement proportionnelles de part et d'autre ; donc enfin l'on a effectivement la relation ci-dessus, et partant la droite *mn* est une sécante idéale commune aux deux courbes (AB) et (A'B'), comme il s'agissait de le démontrer.

66. On prouverait, d'une manière tout aussi simple, que réciproquement deux sections coniques, situées dans des plans différents, et qui ont l'intersection de ces plans pour sécante idéale commune, sont susceptibles d'appartenir à une même surface conique, tout comme cela aurait lieu évidemment si cette droite était une sécante réelle commune ; or cela suffit pour prouver l'identité de nature et d'origine des unes et des autres dans le cas particulier où les deux courbes sont couchées sur un même plan. On peut, au surplus, remarquer que les raisonnements qui précèdent demeureraient applicables, d'une manière analogue, à une surface du second ordre quel-

(*) En effet, ces sections pourront être considérées, d'après un théorème connu de la Géométrie élémentaire, comme les limites respectives de deux polygones semblables de grandeur et de situation (42, note).

conque coupée par deux plans arbitraires. Enfin on prouverait également que toutes les sections qu'on pourrait former dans un cône ou une surface quelconque du second ordre, par des plans passant à la fois par une même droite extérieure à la surface, auraient la même corde idéale commune placée sur cette droite, etc.

67. Supposons maintenant que l'une (A'B') des deux sections, qui ont été considérées ci-dessus dans le cône, vienne à passer par le sommet S de ce cône; on pourra la regarder comme une section infiniment petite, semblable à celle qu'on obtiendrait par un plan quelconque parallèle au sien, et ayant par conséquent même constante p', par rapport à la direction de SO, qui représente la nouvelle direction du diamètre conjugué à la sécante idéale *mn*; donc, MN étant la corde idéale relative à cette sécante et à (AB), on aura (51 et 65)

$$\overline{OM}^2 = p.OA.OB = p'.\overline{OS}^2;$$

c'est-à-dire que le rapport de OM à OS représentera (39) le rapport des diamètres conjugués, parallèles à ces droites, qui appartiennent à la section conique infiniment petite que l'on considère.

Supposons, par exemple, que le plan SOM soit parallèle à celui d'une section circulaire du cône; SO sera évidemment perpendiculaire à *mn*, et p' égal à l'unité, de sorte qu'on aura OM = OS; c'est-à-dire que la longueur de SO sera précisément moitié de celle de la corde idéale MN : résultat qui nous sera utile par la suite.

On obtiendrait évidemment des conséquences analogues pour le cas où MN serait une corde réelle de la section conique (AB); car le plan passant par le sommet S et cette droite couperait le cône suivant deux arêtes, représentant les asymptotes de la section correspondante réduite à ces deux arêtes, et par conséquent le rapport des distances OM et OS serait encore celui des deux diamètres conjugués parallèles à leurs directions, tant pour la section dont il s'agit, que pour toutes celles qui lui sont semblables dans le cône et appartiennent à des plans parallèles.

68. En partant de ce qui précède, nous pourrions déduire, quant à présent, un grand nombre des propriétés des sections coniques et des surfaces du second degré relatives aux sécantes idéales communes; de là on s'élèverait, sans peine, aux considérations les plus générales concernant l'intersection et le contact de ces lignes et de ces surfaces; mais nous ne devons pas

oublier que notre objet actuel est seulement de poser des principes qui puissent servir à la recherche des propriétés projectives des figures.

Bornons-nous donc à considérer le système de deux circonférences de cercle (C) et (C'), *fig.* 10, situées sur un même plan.

69. D'après la définition que nous avons donnée en général (56) de la sécante idéale commune à deux sections coniques, il paraît évident que si *mn* est une telle droite sur le plan de deux cercles, elle doit être perpendiculaire à la distance CC' qui sépare leurs centres; de plus elle devra déterminer, sur chacun des diamètres correspondants AB, A'B', deux segments dont le rectangle soit le même de part et d'autre. Or ces conditions qui donnent la corde idéale commune à ces cercles quand ils n'ont aucun point d'intersection, appartiennent aussi à leur corde réelle commune quand ces cercles se pénètrent; donc ces cordes s'échangent réciproquement entre elles, sans jamais exister ensemble. Il résulte d'ailleurs des considérations qui précèdent, relatives aux sections coniques en général, que les sécantes réelles et idéales communes doivent jouir absolument des mêmes propriétés; mais c'est ce qu'on peut aussi démontrer, pour le cas particulier de deux cercles, d'une manière tout à fait directe et fort simple.

70. Car, si l'on imagine, par exemple, que les cercles se détachent du plan primitif qui les renferme, en tournant autour de leur sécante idéale commune *mn*, prise pour charnière, le système des nouveaux cercles, parvenus à une position quelconque, appartiendra à une même sphère, par suite de la définition ci-dessus de la sécante idéale commune à deux cercles; or il en résulte immédiatement que, *si, d'un point quelconque* P *d'une telle sécante, on mène des tangentes* PT, PT',..., *aux cercles qui lui correspondent, ces tangentes seront égales :* propriété qui appartient aussi aux sécantes communes ordinaires de deux cercles. Il est d'ailleurs évident qu'il n'existe que les seuls points de la sécante idéale commune qui jouissent de cette propriété sur le plan de ces cercles.

71. En partant de là, on démontre aisément toutes les autres propriétés des sécantes réelles ou idéales communes à deux ou à plusieurs cercles, par exemple :

Trois cercles étant tracés à volonté sur un plan, les sécantes, réelles ou idéales, qui leur sont communes, deux à deux, se coupent nécessairement en un même point, pour lequel les six tangentes correspondantes sont égales.

En effet, d'après ce qui précède, il ne saurait y avoir aucun autre point

du plan qui jouisse de cette propriété, s'il n'appartient à la fois aux sécantes dont il s'agit (*).

72. Cette propriété fournit un moyen graphique fort simple de construire la sécante idéale commune à deux cercles donnés sur un plan; car, si on les coupe par un troisième cercle quelconque, les deux sécantes communes qui en résulteront, et qui seront réelles, devront concourir sur celle dont il s'agit.

73. Pareillement, concevons sur un plan une suite de cercles (C), (C'),... (*fig.* 10), ayant tous une sécante réelle ou idéale commune *mn*; d'un point quelconque P de sa direction soient menées des tangentes PT, PT',..., aux différents cercles, toutes ces tangentes seront égales, et leurs points de contact T, T',..., appartiendront à une nouvelle circonférence, qui aura pour centre le point P d'où sont issues les tangentes; de plus, ce cercle et tous ses semblables (P'),..., coupant *orthogonalement*, ou à angles droits, tous ceux de la série qu'on examine, auront eux-mêmes évidemment la ligne CC' des centres de cette série pour sécante commune; mais cette sécante sera nécessairement idéale, quand l'autre sera réelle, et *vice versâ*. En effet, les tangentes CT, C*t*,..., à ces nouveaux cercles, partant d'un même point quelconque C de cette ligne, seront toutes égales entre elles (70).

74. Tout cercle (P), qui coupe orthogonalement les deux cercles (C), (C') de la série proposée, a évidemment son centre sur la sécante *mn* qui leur est commune, et par conséquent il coupe aussi à angles droits tous les autres cercles de cette série; donc il fait partie de la série *orthogonale réciproque* de la proposée.

75. Une condition quelconque, comme celle de passer par un point ou de toucher une droite donnée, suffit évidemment pour déterminer entièrement un cercle appartenant à l'une ou à l'autre série; or les propriétés qui précèdent serviront à tracer ce cercle, sans qu'il soit besoin de recourir aux points mêmes de l'intersection commune des cercles proposés, lesquels peuvent par conséquent être imaginaires; donc les sécantes idéales se comportent, en tout, comme les sécantes réelles, et ne peuvent nullement en être distinguées dans les recherches.

76. Le cas où la sécante *mn*, commune à une série de cercles (C), (C'),....

(*) La démonstration de Monge, à qui l'on doit cet élégant théorème, démonstration qui ne s'applique qu'au seul cas où les trois sécantes sont réellement communes, à moins qu'on n'admette le principe de continuité, est trop généralement connue des géomètres, pour qu'il soit nécessaire de la rappeler ici.

est idéale offre une circonstance particulière qui mérite d'être remarquée : c'est que, parmi l'infinité de cercles dont elle se compose, il en est toujours deux qui ont des dimensions infiniment petites, ou qui sont réduits à des points K et L symétriquement placés sur la ligne des centres à l'égard de la sécante commune. Ces points sont précisément ceux où passent à la fois tous les cercles de la série orthogonale réciproque de la proposée ; on peut les appeler les *points* ou *cercles limites* de cette dernière série : ceux de la série réciproque sont évidemment imaginaires quand les premiers sont réels, et *vice versâ*.

77. D'après toutes ces propriétés de la sécante idéale commune à deux ou plusieurs cercles, il est aisé de reconnaître la droite que des géomètres ont appelée l'*axe radical* de ces cercles (*) ; ils ont de même désigné par l'expression de *centre radical* de trois cercles tracés sur un plan, le point où concourent (71) les trois sécantes réelles ou idéales qui leur sont deux à deux communes. Ces définitions sont aussi simples que naturelles : mais elles ont l'inconvénient de ne présenter qu'un caractère particulier de l'objet défini, applicable seulement aux cas du cercle, et de faire perdre de vue par conséquent la dépendance générale et purement graphique qui lie cet objet aux autres parties de la figure. Enfin elles ne sauraient nullement convenir aux sécantes communes à des sections coniques quelconques.

Au reste, les sécantes communes à deux ou plusieurs cercles, tracés sur un plan, jouissent d'un grand nombre d'autres propriétés non moins remarquables ; il nous suffira, pour le moment, d'exposer rapidement quelques-unes de celles qui nous seront utiles par la suite, et qui se rattachant plus particulièrement au sujet qui nous occupe, deviennent, par là, susceptibles d'être démontrées sans le secours de considérations qui lui soient étrangères.

78. Soit A (*fig.* 11) un point pris, à volonté, sur le plan d'une suite de cercles (C), (C'),..., ayant une sécante réelle ou idéale commune mn ; concevons, par ce point, la circonférence ABKL qui coupe orthogonalement tous les cercles de cette série, et a par conséquent son centre P placé sur mn (74) ; joignons le point A au centre C de l'un quelconque des cercles de la suite dont il s'agit, par une droite indéfinie AC, elle rencontrera de nouveau le cercle (P) en B', et déterminera, par ses intersections avec (C), le diamètre FG. Cela posé, soit T l'un des points appartenant à la fois au cercle (P) et au

(*) *Voyez* le Mémoire de M. Gaultier, de Tours, inséré au XVIe Cahier du *Journal de l'École Polytechnique*

cercle (C), le rayon CT ou son égal CG sera moyen proportionnel entre les segments CB′ et CA ; mais le diamètre FG est divisé en deux parties égales en C, donc (31) il est aussi divisé harmoniquement aux points A et B′, et par conséquent le point B′ est le conjugué harmonique du point A, relativement au diamètre dont il s'agit.

Il suit de là évidemment que le point B′ n'est autre chose (48) que le milieu de la corde de contact ou polaire MN qui répond au point A dans le cercle (C) ; ce qui a lieu d'ailleurs quelle que soit sa position par rapport à ce cercle, puisque les raisonnements qui précèdent en sont tout à fait indépendants. Donc :

Tous les milieux des cordes de contact qui correspondent à un même point quelconque du plan d'une suite de cercles, ayant une sécante commune, sont distribués sur une nouvelle circonférence coupant orthogonalement toutes les premières.

79. On peut remarquer en passant, que, quel que soit le diamètre du cercle (C) que l'on considère, il sera divisé harmoniquement aux deux points où sa direction rencontre le cercle (P) qui lui est orthogonal ; et, comme il en doit être de même réciproquement des diamètres de ce dernier cercle, on conclut généralement que :

Deux cercles qui se coupent orthogonalement sur un plan sont réciproquement tels, que les diamètres de l'un sont coupés harmoniquement par la circonférence de l'autre.

Et, par conséquent (76),

Si une suite de cercles, ayant une sécante commune, possède deux points limites, ces deux points divisent à la fois harmoniquement tous les diamètres qui leur correspondent dans les différents cercles de cette suite.

80. On peut conclure de cette propriété des points limites K et L (*fig.* 11) de deux ou plusieurs cercles (C), (C′),..., qui ont une sécante idéale commune *mn*, que chacun d'eux est à la fois (48 et 49), pour les différents cercles, le pôle de la droite qui, passant par l'autre, est parallèle à la sécante commune dont il s'agit.

La même propriété a lieu évidemment à l'égard de chacun de ces points limites et du point situé à l'infini sur la sécante commune *mn*, puisque la polaire de ce dernier, par rapport aux différents cercles, se confond nécessairement avec la ligne des centres CC′ qui renferme les deux autres. Enfin, il serait facile de prouver, à l'aide des considérations de l'article 78, qu'il n'existe, sur le plan de la suite des cercles que l'on considère, que les trois

points ci-dessus qui jouissent de la propriété d'avoir à la fois même polaire par rapport à tous ces cercles. Donc on peut énoncer généralement la proposition suivante :

Deux ou plusieurs cercles, tracés sur un plan, ayant une sécante idéale commune, il existe trois points et il n'existe que trois points sur ce plan, savoir : les deux points limites et le point à l'infini de la sécante commune, tels, que l'un quelconque d'entre eux soit le pôle de la droite qui renferme les deux autres, par rapport à tous les cercles que l'on considère.

81. Revenons à l'objet des raisonnements de l'article 78; puisque tous les centres B' des cordes de contact ou polaires MN, qui correspondent à un même point A et à chaque cercle (C) de la suite qui a *mn* pour sécante commune, appartiennent à la circonférence de cercle invariable (P), ces polaires iront toutes concourir à l'autre extrémité A' du diamètre de ce cercle qui passe par A ; c'est-à-dire que :

Toutes les cordes de contact, ou polaires, qui correspondent à un même point quelconque et à une suite de cercles ayant une sécante commune, vont concourir en un point unique du plan de ces cercles.

82. Si l'on appliquait au point A' les raisonnements faits sur le point A, on trouverait évidemment que le concours des polaires qui lui correspondent est sur le même cercle (P), à l'extrémité du diamètre qui passe par ce point, c'est-à-dire en A; donc les points A et A' sont *réciproques* l'un de l'autre.

On peut remarquer aussi que, quand le point A est pris sur la direction de la sécante commune *mn*, son réciproque A' s'y trouve nécessairement aussi, ou, ce qui revient au même,

Tous les points de la sécante commune à une suite de cercles tracés sur un même plan sont tels, que les polaires correspondantes vont concourir réciproquement en des points appartenant à cette sécante.

Cette proposition n'est, au reste, qu'un corollaire fort simple des articles 71 et 73.

83. Supposons toujours que *mn* (*fig.* 11) soit une sécante idéale commune à une suite de cercles (C), (C'),..., situés sur un même plan ; tous les cercles orthogonaux (P) passeront par les deux points K et L, limites des premiers (76); et, si DE est une droite quelconque donnée arbitrairement sur le plan de la figure, chacun des cercles (P) la coupera en deux points A, B, dont les réciproques A', B' seront situés à l'extrémité des diamètres correspondants, sur une droite ou corde A'B', constamment parallèle à DE, et qui

viendra rencontrer la ligne des centres CC′ en un point S tel, qu'on aura

$$SA'.SB' = SK.SL;$$

relation qui indique (35) que tous les points A′, B′ sont sur une conique, puisque la courbe passe d'ailleurs par les points K et L, et que la suite des points I′, milieux des cordes A′B′, est sur une droite ou diamètre HE (*).

84. Quand la droite *mn* est une sécante réellement commune aux cercles de la suite (C), (C′),...., les points limites K et L deviennent imaginaires (76), et les raisonnements qui précèdent cessent d'être applicables; mais, comme la courbe existe toujours, il résulte du principe de continuité qu'elle devra être encore une section conique, ayant la droite CC′ pour sécante idéale commune avec tous les cercles (P); car, d'après ce qui précède (69 et 75), cette droite doit jouir des mêmes propriétés dans tous les cas possibles. C'est, au reste, ce qu'on pourrait démontrer d'une manière entièrement directe, quoiqu'un peu plus pénible (**); ainsi nous pouvons énoncer généralement la proposition suivante :

Tous les points qui sont réciproques (82) de ceux d'une droite, donnée sur le plan d'un système de cercles ayant une sécante réelle ou idéale commune, sont situés sur une seule et même section conique, passant par les deux points, réels ou imaginaires, qui sont la limite des cercles dont il s'agit; c'est-à-dire que toutes les courbes pareilles ont la ligne des centres des cercles du système pour sécante réelle ou idéale commune avec la suite orthogonale réciproque de ces cercles.

85. Du centre C d'un cercle quelconque de la suite proposée, menons la perpendiculaire CA à DE, et concevons la circonférence orthogonale (P) qui passe par le pied A de cette perpendiculaire; elle rencontrera de nouveau CA au point B′, qui sera (48 et 78) le pôle de DE par rapport au cercle (C), et la droite DE au point B qui sera évidemment le réciproque de B′, puisque BB′ est un diamètre de (P). Donc :

La section conique qui renferme tous les points réciproques de ceux d'une droite donnée sur le plan d'une suite de cercles ayant une sécante commune, est aussi le lieu de tous les pôles de cette même droite par rapport aux cercles dont il s'agit.

(*) Cette dernière assertion paraîtra évidente, si l'on considère que la double perpendiculaire II′ aux cordes AB, A′B′ du cercle (P) demeure toujours parallèle à elle-même, et qu'elle est toujours divisée également au point P de son intersection avec la sécante commune *mn* des cercles (C), (C′),....

(**) *Voyez* la Note I placée à la fin de cette Section.

86. Nous avons déjà observé que la section conique des réciproques passe par les points limités K et L du système des cercles (C), (C'),...; il est évident, en outre, qu'elle passe aussi par le point situé à l'infini sur la sécante commune *mn*; car les polaires qui répondent au point D, où la directrice DE rencontre la ligne des centres CC', sont évidemment parallèles à la sécante dont il s'agit, ou concourent à l'infini sur cette sécante en un point qui, étant le réciproque (**81**, **82**) de D, appartient nécessairement à la courbe. Enfin les polaires qui correspondent au point à l'infini de DE, étant parallèles entre elles et perpendiculaires à la direction de cette droite, la courbe a deux points à l'infini situés, l'un sur la sécante commune, l'autre sur la perpendiculaire à la directrice DE; c'est-à-dire que c'est une hyperbole dont les asymptotes sont parallèles à ces même droites.

87. Il suit de là que, si l'on se donne deux droites ou directrices quelconques sur le plan de deux ou plusieurs cercles ayant une sécante commune, les courbes des réciproques de ces droites passeront à la fois par les deux points limites de ces cercles et par le point à l'infini de leur sécante commune; il est visible d'ailleurs que le point réciproque de celui où se coupent les deux directrices données est aussi un point commun aux deux courbes dont il s'agit, ainsi l'on peut déterminer, à l'avance, les quatre points d'intersection qui leur appartiennent.

88. La courbe des réciproques dégénère en deux lignes droites dans les circonstances suivantes :

1° *Quand la directrice* DE *se confond avec la ligne des centres* CC'. Les polaires des points qui s'y trouvent deviennent, en effet, toutes parallèles entre elles et à la sécante commune *mn*; elles concourent donc toutes à l'infini sur cette sécante, en sorte que la courbe des réciproques semblerait se réduire toujours à un point unique: mais, comme il y a des cas où il existe deux points K et L de CC' pour lesquels les polaires correspondantes se confondent (**80**) ou plutôt n'ont aucun point d'intersection distinct, la courbe se réduit véritablement alors à deux droites, parallèles à la sécante commune, et passant par les points limites K et L dont il s'agit.

2° *Quand la directrice* DE *passe par l'un*, L, *des points limites du système*. Les points A, D, L se confondant à la fois en un seul L (*fig.* 12), les angles BLB', LKA', sous-tendus par les diamètres BB', A'L, sont droits, et par conséquent les réciproques B' des points B de la directrice LE sont constamment sur la perpendiculaire B'L, tandis que ceux A' du point L demeurent, d'un autre côté, sur la parallèle KA' à la sécante commune *mn*. Ainsi la courbe dégénère elle-même en ces deux droites.

Si d'ailleurs la directrice LE se confondait avec la ligne des centres CC', B'L deviendrait parallèle à *mn* et par conséquent à A'K ; et, au contraire, si la directrice était parallèle à *mn*, la droite B'L se confondrait avec la ligne des centres CC'.

3° Enfin, *quand la directrice* DE (*fig.* 11), *sans passer par aucun des points limites* K et L *du système, est d'ailleurs parallèle à la sécante commune mn.* La section conique des réciproques dégénère évidemment encore en deux lignes droites, dont l'une, polaire du point à l'infini de la directrice DE se confond entièrement avec la ligne des centres CC', et dont l'autre, parallèle à la directrice, se trouve symétriquement placée de l'autre côté de la sécante commune *mn*, qui ainsi forme avec elles (29) les trois premières droites d'un faisceau harmonique dont la dernière est à l'infini.

Si, d'ailleurs, la directrice se confondait avec la sécante commune *mn*, la droite des réciproques, qui lui est symétrique d'après ce qui précède, s'y confondrait nécessairement aussi ; ce qui revient évidemment à la proposition de l'article 82.

89. Ces remarques nous seront très-utiles pour la partie des applications ; mais c'est assez nous arrêter, pour le moment, sur les propriétés dont jouissent les sécantes communes au système de deux ou plusieurs cercles tracés sur un plan, et il est temps que nous revenions aux sections coniques en général. Or les diverses considérations présentées, dans le cours de ce Chapitre, sur les sécantes réelles ou idéales communes au système de ces courbes, conduisent immédiatement à quelques notions nouvelles, que nous allons exposer, en nous bornant à celles qui peuvent présenter le plus d'intérêt par leur généralité.

Considérons d'abord le système de deux ou plusieurs hyperboles s. et s. p. (c'est-à-dire *semblables et semblablement placées*) sur un plan ; ces hyperboles ont évidemment (42, note) leurs asymptotes parallèles ; donc elles ont deux points communs situés à l'infini sur ces asymptotes (4, note) ; ou, en d'autres termes, *elles ont une sécante commune à l'infini.*

90. Parcillement, quand deux ou un nombre quelconque d'ellipses sont s. et s. p. sur un plan, il existe une infinité de systèmes d'hyperboles supplémentaires (54) à ces courbes, relativement à des directions données quelconques, dont les diamètres de contact sont parallèles ou concourent à l'infini ; or, pour chacun de ces systèmes pris en particulier, les hyperboles supplémentaires sont évidemment (13) toutes s. et s. p. ; et, d'après ce qui précède, elles ont une corde ou sécante réelle commune à l'infini, qu'on peut

supposer parallèle à la direction donnée ; donc aussi (56) les ellipses proposées ont une *sécante idéale* commune à l'infini, ou, en d'autres termes, elles ont deux *points imaginaires* communs à l'infini.

91. On remarquera que les propositions réciproques ne sont pas toujours vraies, quant aux hyperboles qui ont une sécante commune à l'infini, c'est-à-dire que ces courbes ne sont pas nécessairement s. et s. p. ; il est évident, en effet, que, pour que des hyperboles aient une sécante commune à l'infini, il suffit que leurs asymptotes soient parallèles ; or elles ne seront nullement semblables, si elles se trouvent comprises dans des angles d'asymptotes différents. Il n'en est plus ainsi des ellipses qui ont une sécante idéale commune à l'infini, parce qu'elles doivent avoir nécessairement des hyperboles supplémentaires à asymptotes parallèles et dont les diamètres de contact avec ces ellipses, ou les diamètres réels, soient également parallèles (56) ; c'est-à-dire que des ellipses qui ont une sécante idéale commune à l'infini sont nécessairement semblables de grandeur et de position.

92. Maintenant, si l'on suppose que les courbes, déjà s. et s. p., soient en outre concentriques, les hyperboles se toucheront évidemment toutes aux deux points communs à l'infini, ou auront une *sécante réelle de contact à l'infini* ; donc aussi (63) les ellipses auront une *sécante idéale de contact à l'infini*, ou, si l'on veut, un *double contact imaginaire à l'infini*.

93. Ces considérations ne sauraient s'appliquer directement à la parabole, à cause que la supplémentaire d'une telle courbe est nécessairement aussi une parabole (54) ; mais, toutes les paraboles étant des courbes semblables (44), pour qu'elles soient semblablement situées entre elles, il suffit qu'elles aient leurs axes parallèles : si donc on les considère comme des ellipses infiniment allongées, on pourra supposer qu'elles aient même extrémité de grand axe à l'infini avec une tangente commune également à l'infini ; c'est-à-dire que des *paraboles semblablement situées se touchent en un point réel dont la tangente est à l'infini*.

Nous ne chercherons pas à justifier directement ces notions relatives aux sections coniques s. et s. p., notre intention étant d'y revenir, plus tard, d'une manière générale et qui ne laisse rien à désirer sous le point de vue géométrique ; il nous suffit, pour le moment, d'avoir donné une idée des conséquences auxquelles conduisent les principes posés dans ce Chapitre ; c'est pourquoi nous terminerons par dire quelques mots du cas particulier où les sections coniques sont remplacées par des cercles.

94. Deux ou un nombre quelconque de circonférences de cercles, situées

arbitrairement sur un plan, sont évidemment des courbes s. et s. p. sur ce plan; donc elles ont une sécante idéale commune à l'infini, et, si elles sont à la fois concentriques, cette droite sera pour elles une *sécante idéale de contact*, la seule commune alors à ces cercles.

Des cercles placés arbitrairement sur un plan ne sont donc pas tout à fait indépendants entre eux, comme on pourrait le croire au premier abord; ils ont idéalement deux points imaginaires communs à l'infini, et, sous ce rapport, ils doivent jouir de certaines propriétés appartenant à la fois à tout leur système, et analogues à celles dont ils jouissent quand ils ont une sécante commune ordinaire: ainsi, par exemple, les tangentes issues d'un point quelconque de la sécante commune à l'infini sont égales entre elles (**28**), et les cordes de contact ou polaires correspondantes sont parallèles, ou concourent réciproquement en un autre point de la sécante dont il s'agit: propriétés qui se rapportent à celles déjà trouvées ci-dessus (**70** et **82**).

95. Par conséquent, deux cercles quelconques, situés sur un plan, ayant toujours une autre sécante commune, réelle ou idéale, à distance donnée et finie, sauf les cas où ils sont concentriques et où cette sécante passe elle-même à l'infini en se confondant avec la première; et, de plus, ces deux cercles n'en ayant qu'une seule de cette sorte (**69**), on peut les considérer idéalement comme deux sections coniques qui ont *quatre points communs*, dont deux sont nécessairement *imaginaires* et à l'infini, tandis que les deux autres, à la fois *réels* ou *imaginaires*, sont, en général, situés à distance donnée et finie.

Relativement à la suite des cercles que déterminent les deux proposés et leur sécante commune ordinaire (**73**), cette sécante et la sécante idéale qui leur est, en outre, commune à l'infini, d'après ce qui précède, sont évidemment les limites de tous ces cercles par rapport à l'*infiniment grand*, de même que les points que nous avons appelés K et L (**76**) en sont les limites par rapport à l'*infiniment petit*; c'est-à-dire que le cercle de la suite que l'on considère, dont le rayon est infini, se confond exactement avec l'une et l'autre des sécantes dont il s'agit.

Ainsi, quand une circonférence de cercle quelconque devient infinie, elle dégénère en deux lignes droites, l'une à distance donnée, et l'autre à distance infinie. Cette notion est plus générale et plus exacte que celle communément admise par les géomètres, et elle laisse apercevoir comment la ligne du deuxième degré peut se convertir en une autre du premier degré seulement.

96. Au surplus on peut remarquer que la sécante à l'infini, commune à

plusieurs cercles ou à plusieurs ellipses, est nécessairement indéterminée de situation à l'égard des autres objets de la figure, puisqu'il n'y a aucune direction, donnée sur le plan de ces courbes, pour laquelle le système d'hyperboles supplémentaires correspondantes n'ait une sécante commune réelle à l'infini. La même indétermination subsiste évidemment dans la direction de la sécante à l'infini, commune à plusieurs hyperboles tracées dans un même plan ou dans des plans parallèles ; car rien n'indique, *à priori*, si la corde correspondante fait plutôt partie de tel système de cordes parallèles que de tel autre. Enfin elle a encore lieu pour la sécante de contact commune, à l'infini, au système de plusieurs sections coniques concentriques, s. et s. p.

En général, quand une ligne droite se transporte d'un mouvement continu, mais d'ailleurs quelconque, jusqu'à une distance infinie, sans quitter le plan de la figure à laquelle elle appartient, elle devient nécessairement indéterminée de direction à l'égard des autres objets de la figure ; c'est du moins ce qui résulte de l'admission du principe de continuité, qui veut que *tous les points à l'infini d'un plan puissent être considérés idéalement comme distribués sur une droite unique, située elle-même à l'infini sur ce plan.*

97. Les considérations qui viennent de nous occuper peuvent servir, dès à présent, à justifier cette notion purement métaphysique ; nous la verrons se reproduire, sous plusieurs formes, dans diverses circonstances particulières, et nous aurons même occasion de l'établir d'une manière générale, et d'en donner une explication satisfaisante au moyen des considérations propres à la perspective. Au surplus cette notion et toutes celles établies dans ce qui précède pourraient se justifier directement par les principes reçus dans l'Analyse des coordonnées ; mais nous croyons la chose pour le moins peu utile, si ce n'est superflue ; car là, comme en Géométrie, les notions abstraites et purement figurées ont pour principe unique la volonté qu'on a d'étendre la conception d'une figure, où tout est actuellement géométrique et possible, aux divers états par lesquels peut passer cette figure, même à ceux où certains objets perdent leur existence absolue et réelle.

98. Il nous parait d'ailleurs assez inutile d'examiner ce que deviennent ces notions et les propriétés des sécantes réelles ou idéales, communes aux sections coniques et aux circonférences de cercle, dans les diverses circonstances particulières que ces courbes peuvent présenter ; comme il arriverait, par exemple, si une ou plusieurs d'entre elles se réduisaient à des points, ou dégénéraient en des droites (54, 76 et 95) : il est évident que ces notions et ces propriétés subsisteront d'une manière analogue, et avec des modifications

qu'indiqueront toujours la loi de continuité et l'examen attentif de ce qui arrive dans le passage de la figure générale à la figure particulière.

Dans ce qui suit, nous nous occuperons spécialement des principes de projection à l'aide desquels on peut ramener la recherche des propriétés générales des sections coniques à celle des propriétés du cercle. En nous appuyant sur les diverses considérations qui précèdent, nous établirons ces principes d'une manière entièrement géométrique et bien simple, si on compare nos démonstrations à celles qu'on pourrait déduire de la Géométrie analytique.

CHAPITRE III.

PRINCIPES RELATIFS A LA PROJECTION DES FIGURES PLANES LES UNES DANS LES AUTRES.

99. Il résulte de la nature même des *propriétés projectives*, telles qu'elles ont été définies (art. 5), que, voulant établir une semblable propriété sur une figure donnée, il suffira de démontrer qu'elle a lieu pour l'une quelconque de ses projections. Or, parmi toutes les projections possibles de cette figure, il peut en exister qui soient réduites à des circonstances plus simples, et sur lesquelles la démonstration ou la recherche qu'on se propose devienne de la première facilité, et n'exige qu'un léger coup d'œil, ou, tout au plus, la connaissance de quelques propriétés élémentaires de la Géométrie, pour être aperçue ou sentie. Par exemple, la figure renfermant, en particulier, une section conique, pourra être regardée comme la projection d'une autre, pour laquelle la section conique sera remplacée par une circonférence de cercle; et cette seule remarque suffira pour ramener les questions les plus générales, sur les sections coniques, à d'autres qui soient purement élémentaires.

100. On conçoit, d'après cela, de quelle importance peut être la doctrine des projections pour toutes les recherches géométriques, et combien les considérations qu'elle offre peuvent abréger et rendre faciles ces recherches.

Une figure étant donnée, tout se réduira, comme on voit, à rechercher celle de ses projections qui présentera des circonstances plus élémentaires, et plus propres, par leur simplicité, à faire découvrir les relations particulières que l'on a en vue. La doctrine des projections fournit déjà quelques principes pour y parvenir; mais il s'en faut de beaucoup qu'elle n'en

puisse fournir encore d'autres, et notre objet actuel est précisément de les rechercher et de les faire connaître, d'une manière purement géométrique, à l'aide des notions établies dans ce qui précède.

101. Rappelons d'abord quelques principes généralement connus, et dont la démonstration est on ne peut plus facile.

Une figure plane quelconque, qui renferme un système de droites ou de courbes ayant un point commun d'intersection, peut toujours être regardée comme la projection d'une autre, du même genre ou ordre (3), *dans laquelle le point d'intersection est passé à l'infini et les lignes correspondantes sont devenues* parallèles.

Il suffit évidemment, pour que cela ait lieu, que le plan de projection soit pris parallèle à la droite qui joint le point de concours du premier système au centre, d'ailleurs arbitraire, de projection.

102. Réciproquement,

Une figure plane qui renferme un système de lignes droites ou courbes, parallèles ou concourantes à l'infini, a en général pour projection, sur un plan quelconque, une figure du même genre, dans laquelle les lignes correspondantes concourent en un point commun à distance finie, projection de celui du premier système.

Quand le plan de projection est parallèle à la droite qui joint le point de concours au centre de projection, les lignes du système demeurent évidemment parallèles ou concourantes à l'infini; et, si l'on suppose, de plus, qu'il soit parallèle au plan de la figure primitive, la projection devient semblable à cette figure et semblablement placée (art. 65, note).

103. Ces propositions donnent l'interprétation géométrique de cette notion généralement admise : *Les lignes parallèles concourent en un point unique à l'infini*. On voit, en effet, que les points de concours à distance infinie et à distance donnée s'échangent réciproquement par l'effet de la projection.

104. Si le point de concours que l'on considère était, en même temps, un point de contact pour certaines lignes de la figure primitive, il serait également, d'après la nature de la projection centrale, un point de contact de la projection de ces mêmes lignes; de sorte que, ce point passant à l'infini, les lignes en question deviendraient tangentes à l'infini, au lieu d'avoir leurs branches correspondantes simplement parallèles : ce qu'on exprime ordinairement en disant qu'elles sont *asymptotiques*.

D'ailleurs elles seraient asymptotiques du premier, du second.... ordre, si les primitives étaient elles-mêmes *osculatrices* de cet ordre.

Ainsi les lignes asymptotiques et les lignes dont le cours est simplement parallèle dans certaines régions, ou qui ont des droites asymptotes parallèles, jouissent des mêmes propriétés projectives que les lignes du même genre qui se coupent ou se touchent en un point donné ; en sorte qu'elles ne diffèrent de celle-ci qu'en ce que leur point de concours ou de contact est situé à l'infini.

105. *Une figure plane quelconque, où entre une certaine ligne droite, peut être considérée comme la projection d'une autre, dans laquelle la droite correspondante est passée tout entière à l'infini ; en sorte que tout système de droites ou de courbes concourant en un point de la première, sur la figure primitive, est devenu un système de lignes parallèles ou concourantes à l'infini dans la projection qui en dérive.*

Il suffit évidemment, pour que cela ait lieu, que le plan de projection soit pris parallèle à celui qui renferme la droite de la figure primitive et le centre, d'ailleurs arbitraire, de projection.

106. Réciproquement,

Une figure plane quelconque, qui renferme un nombre arbitraire de systèmes de lignes, droites ou courbes, respectivement parallèles ou asymptotiques, c'est-à-dire qui concourent à l'infini dans chaque système respectif, a, en général, pour projection sur un plan quelconque une autre figure, dans laquelle les points de concours à l'infini de la première se trouvent rangés sur une seule et même ligne droite, à distance donnée et finie.

107. Ces dernières considérations, déduites uniquement des principes élémentaires de la projection centrale, donnent l'interprétation de cette notion métaphysique que nous avons déjà fait connaître (96) :

Tous les points situés à l'infini sur un plan peuvent être considérés idéalement comme distribués sur une ligne droite unique, située elle-même à l'infini sur ce plan.

On voit, en effet, par ce qui précède, que tous ces points sont représentés, en projection, par ceux d'une ligne droite unique située, en général, à distance donnée et finie.

Cette notion paradoxale reçoit ainsi un sens fixe et naturel, quand on l'applique à une figure donnée sur un plan, et qu'on suppose cette figure mise en projection sur un autre plan quelconque. L'indétermination, observée dans la direction de la droite à l'infini, vient précisément de l'indétermination même qui existe dans celle du plan qui projette cette droite, au moment où il va devenir parallèle au plan de la figure donnée ; mais on voit aussi

que cette indétermination n'a lieu que parce qu'on persiste à donner mentalement une existence réelle à la droite de leur intersection commune, quand ils sont devenus tout à fait parallèles. Au reste, l'indétermination n'existe véritablement que dans la loi ou la construction primitive, qui donnait cette droite lorsqu'elle était à distance finie, et non dans sa direction même, puisque réellement elle cesse d'exister d'une manière absolue et géométrique.

108. Dans tous les principes qui précèdent, rien ne fixe la position du centre de projection dans l'espace ; elle est tout à fait arbitraire, et, pour un point quelconque donné, on pourra toujours remplir l'une ou l'autre des conditions prescrites. Il n'en est pas ainsi des principes qui suivent ; ils ne peuvent avoir lieu que pour une série de positions particulières du centre de projection ; et, comme la démonstration en est assez difficile, et n'est pas encore connue des géomètres, il est à propos que nous nous y arrêtions quelque temps, et que nous la donnions d'une manière complète.

109. *Une figure plane quelconque, où entrent une certaine droite et une section conique, peut, en général, être regardée comme la projection d'une autre, pour laquelle la droite est passée entièrement à l'infini, et la section conique est devenue une circonférence de cercle.*

Pour démontrer ce principe d'une manière qui ne laisse absolument rien à désirer sous le point de vue géométrique, nous supposerons qu'il s'agisse de résoudre la question suivante :

110. *Étant données une section conique* (C), *fig.* 9, *et une droite* MN, *située à volonté sur son plan, trouver un centre et un plan de projection tels, que la droite donnée* MN *soit projetée à l'infini sur ce plan, et que la section conique y soit en même temps représentée par un cercle.*

Soit S le centre inconnu de projection ; d'après les conditions du problème, le plan qui passe par ce point et par la droite MN doit être parallèle au plan de projection, et ce dernier doit couper la surface conique, dont (C) est la base et S le sommet, suivant une circonférence de cercle ; or de là résulte, en premier lieu, que la droite MN doit être entièrement extérieure à la section conique (C), c'est-à-dire *sécante idéale* de cette courbe.

En second lieu, si l'on détermine (54) la corde idéale MN qui répond à cette droite et à la conique (C), puis qu'on joigne son milieu O au centre S de projection par la droite SO, cette droite devra être égale (67) à la demi-corde idéale OM, et faire avec elle un angle MOS qui soit droit : c'est-à-dire que :

Le centre auxiliaire de projection doit se trouver sur une circonférence de cercle, décrite du milieu de la corde idéale qui répond à la droite donnée, comme centre, avec un rayon égal à la moitié de cette corde (*), *et dans un plan qui lui soit perpendiculaire.*

Comme il n'y a aucune condition à remplir, on peut en conclure qu'il existe une infinité de centres et de plans de projection qui satisfont aux données de la question; mais, pour cela, il faut que la droite MN ne rencontre pas la courbe, car autrement la distance OS ou OM deviendrait imaginaire.

111. Ainsi la proposition énoncée ci-dessus (**109**) est vraie pour une série de positions générales et indéterminées de cette droite, et elle cesse de l'être pour une autre série de positions semblables de la même droite : ou, si l'on veut, elle devient purement idéale pour les positions qui correspondent à cette dernière série. C'est dans ce sens seulement que nous avons entendu dire, dans l'énoncé, que le principe avait lieu en général : à peu près comme l'on pourrait dire que « d'un point donné sur le plan d'un cercle, on peut, « *en général*, mener deux tangentes à ce cercle. » Cette manière de s'exprimer étant universellement admise dans l'Analyse des coordonnées, nous ne croyons pas qu'on puisse la récuser en Géométrie, ni par conséquent avoir des doutes sur le sens que nous lui attribuerons dans ces recherches.

La question qui vient de nous occuper donne lieu à quelques observations intéressantes, auxquelles il ne sera pas hors de propos de s'arrêter.

112. Nous venons de remarquer que, quand la droite donnée rencontre la section conique (C), telle que celle M'N' par exemple, la projection de cette courbe, suivant un cercle, devient impossible ou imaginaire ; on peut alors demander que cette projection soit une hyperbole équilatère, dont le diamètre parallèle à la droite donnée soit l'axe idéal : or on voit que le problème aura une infinité de solutions, et que la suite des centres auxiliaires de projection se trouvera, comme précédemment (**67**), sur une circonférence de cercle, décrite du milieu O' de la corde M'N' qui correspond à la droite donnée, comme centre, avec un rayon égal à la moitié de cette corde, et dans un plan perpendiculaire à sa direction.

Plus généralement, si l'on demande que la projection soit une hyperbole

(*) Algébriquement, cela revient à dire que le carré de ce rayon est égal au carré de la demi-corde interceptée dans la section conique par la droite correspondante, mais pris avec un signe contraire ; en sorte que ce rayon est *réel* ou *imaginaire*, selon que, au contraire, la corde sera *imaginaire* ou *réelle*.

équilatère quelconque, le lieu des centres auxiliaires de projection ne sera plus simplement un cercle, mais une sphère qui aura la corde ci-dessus pour diamètre.

En effet, puisque la section conique de projection doit être une hyperbole équilatère, ses asymptotes doivent comprendre entre elles un angle droit ; mais, si l'on conçoit par le sommet du cône projetant un plan parallèle à celui de cette hyperbole, il le coupera suivant deux arêtes SM', SN' parallèles aux asymptotes (4, note), et passant par les deux points M', N' d'intersection de la droite donnée avec la base (C) ; donc la corde qui correspond à ces deux points sera le diamètre d'une sphère, sur la surface de laquelle devront se trouver tous les centres auxiliaires de projection.

113. Si l'on demandait, plus généralement encore, que la courbe de projection fût une hyperbole quelconque semblable à une hyperbole donnée, ses asymptotes devraient, de même, comprendre entre elles un angle égal à celui qui correspond aux asymptotes de cette dernière (43, note) ; par conséquent la surface, lieu des centres auxiliaires de projection, ne serait plus simplement une sphère, mais une surface *annulaire*, engendrée par un arc de cercle capable de l'angle donné, et qui, s'appuyant par ses extrémités sur les deux points M', N', communs à la droite et à la section conique proposées, tournerait autour de cette droite comme axe de révolution.

L'arc générateur dont il s'agit pouvant être prolongé au-dessous de la corde correspondante, on voit que la surface annulaire se trouve réellement composée de deux nappes continues, dont l'une appartient aux hyperboles comprises dans l'angle même donné, et l'autre à celles qui seraient comprises dans le supplément de cet angle. En outre, si l'on joint, par une droite, le milieu de la corde commune à tous les cercles générateurs et un point quelconque de ce cercle, l'angle qu'elle formera avec cette corde représentera évidemment (67) l'angle de deux diamètres conjugués de l'hyperbole correspondante, et le rapport de cette droite elle-même à la demi-corde sera précisément le rapport de ces diamètres. Or il est aisé de conclure de là que, si l'on mène par le centre de la corde une droite quelconque terminée de part et d'autre au cercle générateur, ce centre y interceptera deux segments, dont l'un sera égal au produit de la demi-corde par le rapport des diamètres conjugués correspondants, et l'autre au produit de cette même demi-corde par le rapport inverse du précédent.

114. Enfin, si l'on demandait que la section conique de projection, au lieu d'être une hyperbole, fût une ellipse semblable à une ellipse donnée,

la droite MN devrait être entièrement extérieure à la courbe (C), comme dans le cas ci-dessus du cercle, et par conséquent la corde correspondante et les asymptotes deviendraient imaginaires ou impossibles à construire. Or il est très-facile de prouver que, malgré cela, il existe encore une infinité de centres de projection, remplissant les conditions du problème, tous situés sur une autre surface de révolution, ayant toujours la droite donnée MN pour axe.

En effet, soit S un tel centre de projection, s'il existe; concevons la droite SO qui passe par ce centre et par ce milieu de la corde idéale MN répondant à la droite donnée; tout plan, parallèle à celui qui renferme le point S et la droite MN, coupera le cône, dont ce même point est le sommet et la conique (C) la base, suivant une ellipse dont deux diamètres conjugués seront parallèles (67) aux droites SO, MN, et tels, que leur rapport sera précisément égal au rapport de SO à OM. Or, pour que cette ellipse soit semblable à une ellipse donnée, il suffit que les diamètres en question soient proportionnels à deux diamètres conjugués de cette dernière, et fassent entre eux le même angle (43). Prenant donc SO de façon que l'angle SOM soit celui de deux diamètres conjugués quelconques de l'ellipse de comparaison, et que le rapport de SO à la demi-corde OM soit précisément celui de ces diamètres, le point S sera un centre de projection tel qu'on l'a demandé; et il en sera de même de tous ceux (*) qui appartiennent au cercle engendré par ce point dans la révolution de l'angle SOM autour de MN comme axe.

La suite des cercles pareils, relatifs aux divers systèmes de diamètres conjugués de l'ellipse de comparaison, formera la surface de révolution lieu des centres de projection cherchés, laquelle, existant aussi bien que pour le cas où la courbe de comparaison est une hyperbole, devra être nécessairement encore une surface annulaire engendrée par un arc de cercle, qui alors aura MN pour corde idéale commune avec la section conique proposée (C) : c'est au moins ce qui résulterait facilement de l'application du principe de continuité, et ce qu'on peut démontrer, d'une manière tout à fait directe, par les seuls principes de la Géométrie rationnelle (**).

115. Il resterait à examiner le cas où la courbe de projection de la sec-

(*) Cette remarque se trouve consignée dans le Rapport de M. Cauchy. Quoique je fusse, depuis longtemps, parvenu à la proposition générale qui fait l'objet du présent article et de ceux qui précèdent, je n'avais pas jugé à propos d'en faire mention dans le Mémoire présenté à l'Institut, parce que, en effet, elle est en quelque sorte étrangère au but que l'on s'y propose, « la projection des sections coniques suivant des cercles. »

(**) *Voyez* la Note II, placée à la fin de cette Section.

tion conique (C) doit être une parabole, d'ailleurs quelconque, car toutes les paraboles sont nécessairement des courbes semblables (44) ; mais alors il est nécessaire et il suffit que le plan de projection soit parallèle à une certaine arête du cône projetant (4, note), ou que celui qui lui est mené parallèlement par le sommet de ce cône, et qui projette la droite donnée MN, soit tangent à la surface de ce cône; ce qui exige simplement que cette droite, au lieu d'être quelconque comme dans ce qui précède, soit elle-même tangente à la section conique donnée (C) : cela étant, tous les points de l'espace seront aptes à projeter la courbe donnée suivant une parabole; c'est-à-dire que le problème sera entièrement indéterminé.

Revenons maintenant au cas général où la courbe de projection est quelconque.

116. Le pôle O′ (49) de la droite MN et de la section conique proposée (C) jouit d'une propriété très-remarquable, c'est qu'il est la projection invariable, sur le plan de cette courbe, de tous les centres des sections qu'on obtiendrait dans la surface d'un cône projetant dont le sommet serait en un point quelconque S de l'espace, et qui, ayant la courbe (C) dont il s'agit pour base, serait coupé par des plans parallèles à celui qui renferme ce sommet et la droite donnée MN ; car (65 et 67) tous les diamètres de ces sections, conjugués à la direction de MN, sont parallèles entre eux et à la droite SO, et se trouvent terminés aux deux arêtes projetantes SA, SB partant des extrémités du diamètre correspondant AB de la base. D'une autre part, les quatre droites SA, SO′, SB, SO formant un faisceau harmonique (48 et 24), chacun des diamètres dont il s'agit se trouve partagé en deux parties égales (27) au point de son intersection avec SO′, lequel est par conséquent à la fois le centre de la courbe correspondante et la projection du point O′ sur le plan de cette courbe. Ainsi :

Quand, d'un point quelconque de l'espace, on projette une section conique et une ligne droite, situées dans un même plan, sur un nouveau plan parallèle au plan projetant de cette droite, ou, en d'autres termes (105), *de manière que la droite passe entièrement à l'infini, le pôle de cette même droite a précisément pour projection, sur le nouveau plan, le centre de la section conique projetée.*

117. Réciproquement :

Si l'on projette une section conique sur un nouveau plan quelconque, son centre aura pour projection le pôle de la ligne droite qui est la représentation, ou la projection, de celle à l'infini du plan primitif.

Il résulte d'ailleurs directement, des définitions admises (48 et 49) pour

le pôle et la polaire, que le centre d'une section conique quelconque a pour polaire la droite située à l'infini sur son plan; en sorte que, dans l'espèce de projection qui précède (116), le pôle de la droite dont il est question demeure, en projection, le pôle de la droite à l'infini qui correspond à la première; mais on peut démontrer, plus généralement, que la polaire et le pôle sont *projectifs*, c'est-à-dire que :

118. *Si l'on projette une section conique quelconque sur un plan arbitraire, le pôle de toute droite, située sur le plan de cette section conique, demeurera, en projection, le pôle de la droite qui représente la première.*

En effet, supposons que l'on coupe la surface conique projetante par un plan quelconque, parallèle au plan projetant qui renferme la droite donnée et sa projection; d'après ce qui précède, le centre de la nouvelle section conique aura à la fois pour projections, sur les deux premiers plans, les pôles des droites qui leur correspondent respectivement, ce qui exige nécessairement que ces pôles soient projections l'un de l'autre. On déduirait, au reste, la même conséquence de la propriété qu'a le pôle d'une droite quelconque d'être le point de concours, réel ou idéal, des tangentes qui lui correspondent dans la courbe, mais elle ne pourrait recevoir toute son extension qu'à l'aide du principe de continuité.

119. Les conséquences qui précèdent étant indépendantes de l'espèce de sections coniques que l'on considère, elles demeurent toutes applicables au cas particulier de la circonférence du cercle : ainsi, par exemple, « un cercle » et une droite étant donnés sur un plan, on peut, en général, mettre la » figure en projection sur un nouveau plan, de façon que la droite passe à » l'infini, et que le cercle demeure toujours un cercle. »

Au reste, si nous nous sommes autant arrêtés à ces conséquences, c'est qu'elles sont élémentaires et servent de base à toutes celles qui vont suivre.

120. *Une figure plane quelconque, qui renferme une certaine section conique et un point, peut, en général, être regardée comme la projection d'une autre, pour laquelle la section conique est devenue un cercle, ayant précisément pour centre la projection du point que l'on considère.*

Ce principe est un corollaire très-simple des théorèmes qui précèdent.

En effet, (C) et O' (*fig.* 9) étant la conique et le point que l'on considère, si l'on détermine la droite MN qui est la polaire de O', elle sera évidemment telle que, en lui appliquant, ainsi qu'à la section conique (C), la question résolue à l'article 110, le cercle de projection aura précisément pour centre (116) la projection du point donné O'.

Ainsi le principe qui nous occupe est assujetti, en tout, à des conditions et à des limitations semblables à celles du principe de l'article 109; comme lui, il s'applique à toutes les sections coniques possibles, et le lieu des centres auxiliaires de projection demeure toujours un cercle.

121. *Une figure plane quelconque, qui renferme deux sections coniques, peut, en général, être regardée comme la projection d'une autre, pour laquelle les sections coniques sont devenues des circonférences de cercle* (*).

Ce principe peut être regardé comme un corollaire immédiat et presque évident de ce qui précède; car, deux sections coniques quelconques ayant, en général (59), des sécantes idéales communes, tout comme elles en ont de réelles également communes, il est clair, d'après l'article 110, que, si l'on met une de ces sections coniques en projection sur un plan, de façon qu'elle devienne un cercle, et que l'une des sécantes idéales en question passe en même temps à l'infini, l'autre de ces sections coniques deviendra nécessairement aussi un cercle sur le plan de projection. De plus, il est visible qu'il n'y a que les cordes idéales communes aux deux sections coniques proposées qui puissent remplir les conditions prescrites; en sorte qu'en rapprochant ces conséquences de celles de l'article 110 déjà cité, on peut conclure la proposition suivante :

Tous les points de l'espace, susceptibles de projeter à la fois, suivant des cercles, deux sections coniques quelconques situées sur un même plan, sont distribués sur autant de circonférences de cercle qu'il y a de cordes idéales communes aux deux courbes proposées. Ces circonférences sont décrites du milieu de chaque corde, comme centre, avec un rayon égal à la demi-corde, et dans un plan perpendiculaire à cette même corde. Enfin le plan qui donne des sections circulaires est parallèle à celui qui passe par le centre de projection et la corde idéale que l'on considère en particulier.

122. On pourrait énoncer cette proposition d'une manière moins restreinte et plus conforme à l'esprit de l'Analyse, en disant qu'il y a autant de circonférences, lieux des centres auxiliaires de projection, qu'il y a de sé-

(*) La question à laquelle donne lieu ce principe a déjà fixé l'attention des géomètres; je ne sache pas que, depuis l'appel qui leur a été fait à ce sujet dans les *Annales de Mathématiques* (t. VII, p. 128), personne soit encore parvenu à une solution bien satisfaisante; l'ébauche purement algébrique qu'on en trouve, dans le volume déjà cité de cet intéressant recueil, est plutôt propre, en effet, à faire sentir la difficulté de la question qu'à la résoudre. Au reste, cette difficulté tient au fond même des choses; car le calcul doit naturellement conduire, pour l'expression du lieu des centres auxiliaires de projection, à des équations du 12ᵉ degré, composées de six facteurs représentant autant de cercles, et inséparables d'une manière explicite et rationnelle.

cantes communes aux deux sections coniques proposées, pourvu qu'on ajoutât que le carré du diamètre de chacune de ces circonférences est égal à celui de la corde commune correspondante, mais pris avec un signe contraire; car cette condition détermine quelles sont celles de ces circonférences dont les diamètres, étant imaginaires, sont par là même impossibles à construire : on voit, en effet, que ces circonférences appartiennent aux cordes réelles communes.

En adoptant cette généralité dans les expressions, généralité qui ne saurait induire en erreur, d'après ce qui précède, et faisant attention que ce que l'on a dit de deux sections coniques s'applique naturellement à un nombre quelconque de sections coniques qui ont une sécante idéale commune, on pourra énoncer ainsi, d'une manière plus générale, le principe de projection qui fait le sujet de l'article **121** :

Deux ou plusieurs sections coniques, situées sur un même plan et qui ont une sécante ou corde commune, peuvent, en général, être regardées comme la projection d'un égal nombre de circonférences de cercle, pour lesquelles la droite dont il s'agit est passée tout entière à l'infini, et est devenue par conséquent (**94** et **107**) *la sécante idéale commune, à l'infini, à tous ces cercles.*

123. En cherchant ainsi à étendre le sens et l'énoncé des divers principes qui se présentent, notre objet est de généraliser les conceptions de la simple Géométrie, et de les rapprocher de celles qui découlent de l'Analyse algébrique. Cette extension se trouve justifiée, d'une manière en quelque sorte rigoureuse, par l'identité de nature qui règne (**66**) entre les sécantes réelles et idéales communes; si, de plus, nous prouvons qu'elles répondent aux mêmes questions, qu'elles se déterminent et se construisent de la même manière, il devra paraître évident qu'il n'y a aucune distinction à faire entre elles, et qu'on peut appliquer aux unes ce qu'on a dit des autres, pourvu qu'on ait soin de ne pas prononcer sur la réalité ou la non-réalité des points qui en dépendent, et qu'on n'entende s'occuper que de leur direction indéfinie sur le plan des deux courbes : or c'est, en effet, ce que nous ferons plus tard, dans la partie des applications.

Nous reviendrons au reste, à la fin de ce Chapitre, d'une manière générale sur ces diverses remarques, en nous attachant à les éclaircir davantage et à en faire sentir le véritable but; on nous permettra jusque-là de poursuivre, sans plus de réflexions, l'objet particulier de nos recherches.

124. Dans la proposition de l'article **121**, nous n'avons envisagé que le cas où il s'agirait de projeter deux sections coniques données suivant des cir-

conférences de cercle; mais si l'on demandait, plus généralement, que les courbes de projection fussent d'autres sections coniques semblables entre elles et à une section conique quelconque donnée, non-seulement la projection serait possible, en général, comme dans le cas particulier du cercle, mais encore, au lieu d'être simplement une ligne, le lieu des centres auxiliaires de projection serait une surface tout entière, engendrée (113 et 114) par la révolution d'un cercle, qui aurait une corde, réelle ou idéale, commune avec les sections coniques proposées, et tournerait autour de cette corde comme axe. Le nombre des surfaces annulaires ainsi formées étant d'ailleurs égal à celui des cordes communes aux sections coniques proposées, c'est-à-dire en général six, on voit que le centre de projection pourra être pris partout où l'on voudra sur l'une de ces surfaces, pourvu que le plan de projection correspondant soit parallèle à celui qui passe par ce point et par la sécante commune à laquelle appartient la surface que l'on considère en particulier. Le problème présente, du reste, des restrictions analogues à celles observées pour le cas particulier des cercles; et l'on peut remarquer que non-seulement les deux sections coniques de projection seront semblables entre elles et à celle prise pour terme de comparaison, mais qu'encore elles seront semblablement placées sur le nouveau plan.

Cette dernière circonstance peut être établie d'ailleurs, d'une manière beaucoup plus générale, quand on n'exige point que les sections coniques deviennent précisément semblables à une autre section conique choisie en particulier.

125. Concevons, en effet, que, d'un point quelconque de l'espace, on projette deux ou plusieurs sections coniques situées sur un même plan et ayant une sécante commune, sur un nouveau plan parallèle à celui qui renferme cette sécante et le centre de projection; toutes les sections coniques seront nécessairement devenues des courbes s. et s. p. sur le nouveau plan : car, si l'on mène une droite par le sommet commun des cônes projetants et par le centre de la corde, réelle ou idéale, qui répond à la sécante dont il s'agit, cette droite et la demi-corde seront parallèles et proportionnelles (67) à deux diamètres conjugués de l'une et de l'autre des sections faites dans les cônes projetants par un plan parallèle à ces droites; ces sections auront donc elles-mêmes un système de diamètres conjugués parallèles et proportionnels, ce qui exige nécessairement (42, note) qu'elles soient toutes s. et s. p. entre elles (*).

(*) Il y a cependant un cas d'exception, c'est celui où, la corde commune étant réelle, les hyperboles de la projection se trouvent situées dans des angles différents d'asymptotes; ce cas

Dans cette projection, la sécante commune aux courbes primitives est devenue évidemment (89, 90 et 107) la sécante, à l'infini, commune à toutes celles du nouveau système ; de sorte que :

Quand on met deux ou plusieurs sections coniques, situées sur un même plan et ayant une sécante commune, en projection sur un nouveau plan, de façon que cette sécante passe à l'infini, ces sections coniques deviennent, en général, toutes semblables entre elles, semblablement placées et ayant pour sécante commune, à l'infini, la projection de la première.

Il est évident que la même chose aurait encore lieu si les sections coniques proposées avaient toutes un point de contact avec une tangente commune en ce point ; car elles deviendraient, en projection, des paraboles à diamètres parallèles, lesquelles seraient, par là même, des courbes s. et s. p. ayant un point de contact commun à l'infini (93).

126. On prouverait réciproquement, et de la même manière, que :

Quand on met deux ou plusieurs sections coniques, semblables et semblablement situées sur un plan, en projection sur un nouveau plan quelconque, les sections coniques qui en résultent ont une sécante commune, qui est la projection de celle à l'infini du premier système.

Ainsi, dans l'espèce de projection qui précède, la sécante commune à toutes les courbes de l'un des systèmes demeure la sécante commune à toutes les courbes de l'autre, que cette sécante soit d'ailleurs réelle ou idéale ; mais on peut démontrer, plus généralement, que les sécantes réelles ou idéales communes sont projectives, c'est-à-dire que :

127. *Les sécantes réelles ou idéales, communes au système de deux ou de plusieurs sections coniques situées sur un même plan, demeurent aussi des sécantes communes à leur projection sur un plan quelconque.*

En effet, concevons un plan quelconque parallèle à celui qui projette la sécante commune à toutes les courbes primitives, il coupera (125) toutes les surfaces coniques projetantes suivant des courbes en général s. et s. p. entre elles, et qui auront pour sécante idéale commune, à l'infini, la projection de

arrive nécessairement (91) quand, parmi les diamètres des sections coniques proposées, conjugués à la direction de la corde commune, il en est qui sont réels tandis que d'autres ne le sont pas ; alors les sections coniques qui ont leurs diamètres à la fois réels, et celles qui ont leurs diamètres à la fois imaginaires, sont, en projection, les seules qui soient s. et s. p. entre elles. Quant au système complet des unes et des autres, elles n'en conservent pas moins une corde commune à l'infini et des diamètres conjugués parallèles et proportionnels, pourvu qu'on substitue, à chacun des diamètres imaginaires, le diamètre idéal qui lui correspond. En un mot, la similitude est devenue *imaginaire*.

la première ; mais on peut considérer, à leur tour, ces courbes semblables comme ayant pour projection les sections coniques qui résultent des mêmes surfaces projetantes coupées par un plan quelconque ; donc (126) ces sections coniques ont une sécante commune à tout leur système, qui est à la fois la projection de celle à l'infini des courbes semblables, et de celle qu'on suppose commune aux courbes primitives.

128. D'après cela, il est permis de dire que, quand deux ou plusieurs sections coniques ont deux points réels ou imaginaires communs, leur projection sur un plan quelconque jouit de la même propriété ; en sorte que l'on peut considérer, à leur tour, les deux nouveaux points comme la projection des deux premiers, c'est-à-dire, en d'autres termes, que les *points imaginaires sont projectifs*, de même que les points réels ; et il en est évidemment ainsi de tous les autres objets décrits ou figurés qui, appartenant à ces points, seraient réels ou imaginaires.

D'ailleurs ces considérations sont indépendantes de l'espèce particulière des sections coniques, qui peuvent être par conséquent, en tout ou en partie, des paraboles ou des circonférences de cercle.

129. Quand les sections coniques proposées auront deux sécantes réelles ou idéales communes réunies en une seule, c'est-à-dire quand elles auront une sécante, réelle ou idéale, commune de contact, ou enfin un double contact réel ou idéal, les projections de ces courbes sur un nouveau plan quelconque jouiront aussi de la même propriété ; car il suffit que la sécante commune à ces projections ait même pôle dans toutes (63) : or, c'est ce qui a évidemment lieu, de même que pour les sections coniques proposées, puisque, d'après ce qui précède (118 et 127), les sécantes communes, les polaires et les pôles sont projectifs.

130. Si l'on suppose, en outre, que la projection se fasse de manière que la sécante commune passe à l'infini sur le nouveau plan, les sections coniques seront devenues (125, 116), en général, s. s. p. et concentriques ; elles auront une sécante de contact commune, à l'infini, projection de la première (92).

131. Si enfin, sans changer cette hypothèse, le centre de projection, au lieu d'être entièrement arbitraire, était pris parmi ceux qui sont susceptibles de projeter l'une des sections coniques données suivant un cercle, toutes les autres sections coniques deviendraient également des circonférences de cercle concentriques à la première ; d'où ce nouveau principe :

Une figure plane, qui renferme deux ou un nombre quelconque de sections coniques ayant un double contact commun, peut, en général, être regardée comme la projection d'une autre, dans laquelle les sections coniques sont devenues des circonférences de cercle, toutes concentriques entre elles, et ayant une sécante idéale de contact commune, à l'infini, projection de celle qui appartient à la figure primitive.

132. Les divers principes de projection, exposés dans ce qui précède, peuvent servir à interpréter et à justifier, d'une manière entièrement rigoureuse, les notions établies par une voie directe, dans le second Chapitre, sur les sections coniques s. et s. p. et sur les circonférences de cercle; ils donnent lieu à beaucoup d'autres principes également propres à étendre les conceptions géométriques, et à interpréter certaines notions abstraites de l'infini. Ainsi, par exemple, nous avons déjà eu l'occasion de remarquer (115) que, si l'on met une section conique quelconque en projection sur un nouveau plan parallèle à une tangente quelconque de la courbe, on obtient nécessairement une parabole, qui est touchée, par la droite qui représente celle à l'infini de son plan, en un point appartenant à la fois à tous les diamètres parallèles de cette parabole.

Réciproquement, si l'on projette une parabole quelconque sur un nouveau plan également quelconque, la section conique qui en résultera aura, pour une de ses tangentes, la droite à l'infini du plan de la parabole : c'est la conséquence nécessaire de la définition même de la parabole, en tant qu'on la considère comme issue du cône (4); or il résulte de là, plus généralement, et de ce que tous les points à l'infini d'un plan doivent être considérés comme appartenant à une même droite (107), que :

Deux ou plusieurs paraboles quelconques, situées sur un même plan, sont touchées, à la fois, par la droite à l'infini de ce plan; en sorte que, si on les met en projection sur un nouveau plan arbitraire, il en résultera un égal nombre de sections coniques ayant une tangente commune, avec des points de contact différents, si les axes des paraboles ne sont pas parallèles (125).

La proposition réciproque est également vraie, et résulte, *à priori*, de la définition même de la parabole.

133. Parcillement encore :

Deux sections coniques, tracées sur un même plan, peuvent, en général, être mises en projection sur un nouveau plan, de façon que l'une quelconque d'entre elles devienne une circonférence de cercle, concentrique à la section conique, d'ailleurs quelconque, qui répond à l'autre.

En effet, deux sections coniques quelconques ont, en général, quatre points communs; par conséquent, si on les met en projection sur un nouveau plan, de façon que l'une d'elles devienne un cercle ayant pour centre (120) le point d'intersection de deux des sécantes communes à ces sections coniques, en les choisissant parmi celles qui ne se coupent pas à la fois sur les deux courbes, ce centre sera commun au cercle et à la section conique de projection, puisqu'il divisera en parties égales deux cordes qui leur appartiennent à la fois.

134. Il deviendrait fastidieux de multiplier davantage le nombre des exemples; ce que nous venons de dire suffira pour mettre sur la voie propre à en faire trouver d'autres, quand cela deviendra nécessaire pour faciliter une recherche sur une certaine figure. On voit d'ailleurs qu'il dépendra tout à fait de la sagacité du géomètre de choisir dans chaque cas particulier, parmi tous les principes que peut fournir la doctrine des projections, ceux qui seront susceptibles de conduire plus directement ou plus facilement au but qu'il se propose d'atteindre : la partie de ces recherches que nous destinons aux applications pourra tenir lieu de préceptes généraux à cet égard. Dans ce qui nous reste à dire sur la doctrine des projections, nous nous bornerons à présenter quelques réflexions propres à résoudre certaines difficultés, et à étendre les conséquences géométriques auxquelles l'emploi de ces mêmes principes peut faire parvenir.

135. La plupart des théorèmes, ou principes, qui viennent de nous occuper sont susceptibles d'une plus ou moins grande limitation; c'est-à-dire qu'ils sont vrais pour une série de positions indéterminées des parties de la figure que chacun d'eux concerne, mais qu'ils peuvent cesser de l'être, d'une manière absolue et géométrique, pour une série d'autres positions également indéterminées de ces parties; nous avons vu, en effet, que la projection d'une figure, selon des conditions données, pouvait devenir, dans certains cas, impossible ou imaginaire, quoique dans d'autres, non moins généraux, elle fût possible et réelle.

Il résulte de là que les propriétés projectives qu'on pourra déduire de la considération de ces principes, selon ce qui a été enseigné au commencement de ce Chapitre, ne seront elles-mêmes des conséquences absolues et rigoureusement nécessaires des raisonnements établis que pour une série de positions indéterminées de la figure, comprises entre certaines limites; tandis que, pour une autre série de positions pareillement renfermées entre ces limites, mais qui sont au delà, quand les autres sont en deçà et récipro-

quement, la même chose ne saurait plus avoir lieu, à cause que la projection correspondante aura elle-même cessé d'exister d'une manière absolue et purement géométrique. Ainsi les propriétés examinées ne seront démontrées, d'une manière rigoureuse et absolue, que pour les premières de ces positions, et elles cesseront de l'être pour les autres.

Toutefois on ne doit pas conclure que, l'objet des raisonnements primitifs étant devenu illusoire, la propriété ait par là même cessé de subsister; car les deux séries de positions que l'on considère renferment toutes celles que peut prendre la figure, sans changer les conditions qui la déterminent; et, par hypothèse, ces positions sont telles, qu'on peut regarder, à volonté, les unes comme provenant des autres par le mouvement progressif et continu de certaines parties de cette figure, sans violer la liaison et les lois primitivement établies entre elles. Or, quand deux figures géométriques sont ainsi liées entre elles, les propriétés de l'une sont directement applicables à l'autre, sauf les modifications qui peuvent arriver dans les signes de position, ou dans la réalité et la grandeur absolue des parties; modifications qu'il est toujours facile de reconnaître à l'avance, à la simple inspection de la figure. C'est là ce qui constitue en effet, pour la Géométrie, le principe de continuité, généralement admis dans toutes les recherches qui se fondent sur l'Analyse algébrique; principe que nous avons déjà mis en usage, plusieurs fois, dans le cours de cette première Section, mais seulement dans des circonstances où son application devenait conforme aux idées reçues, et pouvait se justifier, d'une manière naturelle et entièrement rigoureuse, par des principes directs.

136. Son admission ouverte en Géométrie ne saurait donner lieu à aucune difficulté sérieuse; car, si la propriété qu'on examine et qui, par hypothèse, a été établie pour une situation non singulière, mais indéterminée, des parties de la figure, ne concerne que des objets actuellement réels et constructibles, elle aura lieu d'une manière entièrement absolue et géométrique; dans la supposition contraire, elle cessera d'être applicable à ces objets d'une manière absolue, sans pour cela devenir ni fausse ni absurde à l'égard des objets demeurés réels; en sorte que, si l'on conserve mentalement une existence de signe ou d'expression aux objets impossibles, la propriété devient purement idéale à l'égard de ces objets. C'est précisément dans ce sens que nous avons entendu dire, jusqu'ici, qu'une propriété ou une relation quelconque est vraie, en général, alors même qu'elle l'est pour une série indéfinie de positions de la figure, tandis qu'elle cesse de l'être pour une autre série de positions assujetties à la même loi et aux mêmes conditions.

137. D'ailleurs il est essentiel de remarquer que certains objets, qui ont avec d'autres, devenus impossibles, une dépendance connue et donnée, ne deviennent pas pour cela eux-mêmes inconstructibles; car ces objets peuvent être liés aux autres parties de la figure par des dépendances plus générales, et qui demeurent toujours réelles.

Ainsi la sécante indéfinie, qui passe par les deux points de contact d'une section conique et de deux tangentes issues d'un certain point, demeure toujours constructible et réelle (48), quoique les tangentes elles-mêmes puissent devenir imaginaires lorsque le point passe dans l'intérieur de la courbe : la même chose a lieu, comme nous l'avons vu, à l'égard de la sécante commune de deux cercles ou de deux sections coniques situées sur un même plan, etc. En général, on peut poser, pour principe propre à faire reconnaître à l'avance les objets figurés qui peuvent demeurer réels, quand les parties qui les construisent deviennent imaginaires, que ces objets doivent nécessairement dépendre, d'une manière symétrique et simultanée, d'un nombre pair de ces dernières. La considération de ces sortes d'objets est extrêmement importante en Géométrie, et nous ne craignons pas d'avancer qu'elle seule peut parvenir à donner une interprétation satisfaisante de certains résultats étranges de l'Analyse algébrique, concernant les grandeurs qui sont imaginaires.

138. En ayant égard à ces diverses remarques, ainsi qu'à toutes celles qui se trouvent répandues dans le cours de cette Section, nous regarderons comme générales, et applicables à tous les cas possibles, les propriétés géométriques qu'il sera possible de déduire des principes de projection qui viennent d'être exposés, quand bien même ces principes pourraient cesser d'avoir lieu géométriquement pour certaines dispositions de la figure, et qu'en conséquence sa projection pût devenir imaginaire.

Ainsi, par exemple, toutes les propriétés projectives qui appartiennent au système de deux circonférences de cercle concentriques appartiennent aussi (131) au système de deux sections coniques qui ont un double contact, que ce contact soit d'ailleurs réel ou idéal; nous avons vu, en effet (63), que l'un de ces cas ne diffère pas essentiellement de l'autre, et qu'ils sont assujettis à la même loi; de sorte que, sans violer cette loi et sans particulariser les deux courbes, on peut faire coïncider celles d'un système avec celles de l'autre par un mouvement progressif et continu.

Pareillement toutes les propriétés projectives dont jouit le système général de deux circonférences de cercle situées sur un même plan, appartiennent aussi au système de deux sections coniques quelconques situées également

sur un même plan ; et ces propriétés demeureraient applicables au cas même où les deux courbes se pénétreraient en quatre points réels; circonstance pour laquelle leur projection, suivant des cercles, serait évidemment impossible. Nous en dirons tout autant des autres principes exposés dans le cours de ce Chapitre; et c'est pour cette raison principalement que nous les avons tous énoncés sous une forme générale, qui ne puisse rappeler, en aucun cas, la restriction dont ils peuvent être susceptibles.

139. Nous le répétons encore avant de terminer : en regardant comme générales et applicables à tous les cas les propriétés qui peuvent découler de ces principes, nous n'entendons pas, pour cela, dire qu'elles ont toujours un sens absolu et réel, mais seulement qu'elles ne peuvent, à proprement parler, devenir fausses, ni entrainer par conséquent, dans leur adoption et dans leurs conséquences, à des erreurs véritables, à des absurdités manifestes et contraires aux axiomes incontestables de la raison. Ainsi ces propriétés pourront bien ne conserver, dans certains cas, qu'une signification purement idéale dans ce qu'elles expriment, à cause qu'une ou plusieurs des parties qu'elles concernent auront perdu leur existence absolue et géométrique; elles deviendront, si l'on veut, illusoires, paradoxales, dans leur objet; mais elles n'en seront pas moins logiques, et propres, si on les emploie d'une manière convenable, à conduire à des vérités incontestables et rigoureuses, d'ailleurs susceptibles des mêmes limitations et des mêmes restrictions que les premières.

140. Il me parait actuellement inutile de développer davantage ces idées, d'autant plus que, la suite de ce travail ayant spécialement pour objet d'appliquer les notions qui précèdent à la recherche des propriétés projectives des sections coniques, cette application servira d'éclaircissement naturel à tout ce que ces notions pourraient encore conserver d'obscur ou de difficile à comprendre. On verra, au reste, avec quelle simplicité ces notions conduisent aux propriétés déjà connues et à une infinité d'autres que la Géométrie ordinaire semblerait ne pouvoir facilement atteindre; et cela, sans employer aucune construction auxiliaire, et en ne se fondant que sur les propositions les plus simples, celles qui, ne concernant que la direction et la grandeur des lignes des figures élémentaires, n'exigent, la plupart du temps, qu'un léger coup d'œil pour être aperçues et senties. Aussi me contenterai-je, fort souvent, de citer ces propositions, sans m'astreindre à les démontrer, lorsqu'elles seront évidentes par elles-mêmes, ou des conséquences faciles d'autres propositions déjà généralement connues.

NOTES DE LA PREMIÈRE SECTION.

NOTE I.

DÉMONSTRATION DIRECTE DU THÉORÈME DE L'ARTICLE 84, POUR LE CAS OÙ LES POINTS LIMITES DE LA SUITE DES CERCLES PROPOSÉS DEVIENNENT IMAGINAIRES.

Soient toujours CC' (*fig.* 13) la ligne des centres des cercles relatifs à la suite dont *mn* est la sécante *réelle* commune; DE la droite donnée, rencontrée en A, B par un cercle quelconque (P) de la suite orthogonale réciproque de la proposée, qui a *mn* pour ligne des centres, et CC' pour sécante idéale commune; les points A' et B', situés aux extrémités des diamètres qui répondent à A et B, seront, d'après ce que nous avons vu (82), deux points de la courbe qu'on cherche; et HE, divisant en deux parties égales toutes les cordes A'B' aux points I', et allant concourir en E. avec la droite donnée, sur la sécante commune *mn*, sera d'ailleurs un diamètre de cette courbe.

Au point D, où la droite donnée DE rencontre la ligne des centres CC', élevons la perpendiculaire DH à cette droite; par le point H, où celle-ci rencontre le diamètre EH, menons de nouveau la perpendiculaire indéfinie HG à la ligne des centres CC'; elle sera parallèle à la sécante commune *mn*, et rencontrera la droite donnée en G et la ligne des centres en F.

Cela posé, puisque *mn* divise en deux parties égales les perpendiculaires II' sur les milieux des cordes AB, A'B', en tant qu'on suppose ces perpendiculaires terminées au diamètre EH et à la droite DE, elle divisera pareillement en deux parties égales, au point *n*, la parallèle HD, terminée aux mêmes lignes; donc le point E sera le milieu de DG, et le diamètre HE divisera aussi en parties égales toutes les droites parallèles à DG, terminées aux droites HD et HG. Par conséquent, si l'on prolonge, de part et d'autre, la corde A'B' jusqu'à sa rencontre en D' et G' avec ces mêmes droites, I' sera à la fois le milieu de A'B' et de D'G', et l'on aura D'A' = B'G'; mais le rectangle D'B'.D'A' est évidemment égal au rectangle DA.DB, lequel est constant (73), puisque CC' est sécante idéale commune à tous les cercles (P); donc le rectangle B'D'.B'G' est aussi constant et égal au rectangle DA.DB, propriété qui ne peut convenir qu'à une hyperbole comprise entre les asymptotes HD et HG.

Qu'on mène, en effet, les ordonnées B'X et B'Y parallèles à ces deux droites; les triangles B'G'Y, B'D'X, semblables au triangle DGH, donneront

$$B'G' = \frac{DG}{DH}\cdot B'Y, \quad B'D' = \frac{DG}{GH}\cdot B'X;$$

d'où

$$B'D'.B'G' = \frac{\overline{DG}^2}{DH.HG}\cdot B'X.B'Y = DA.DB.$$

Mais le triangle DGH est invariable, donc le rectangle B'X.B'Y est constant : propriété connue de l'hyperbole entre ses asymptotes, et d'où résulte par conséquent la première partie de la proposition qu'il s'agit de démontrer.

Recherchons maintenant les points où la direction du diamètre HE rencontre la courbe ; pour ces points, la corde A'B' doit être nulle ainsi que celle AB qui lui est égale ; par conséquent le cercle correspondant (P) doit être tangent en I à la droite donnée DE, ainsi qu'on la voit exprimé *fig.* 14, ou HI' est nécessairement le demi-diamètre appartenant à HE, et D'I' la grandeur de son conjugué idéal mesurée sur la tangente au sommet I' de la courbe, parallèle à ce diamètre ; mais II' est parallèle à DH ; décrivant donc le cercle (D), qui a son centre en D et fait partie de la suite (C), (C'),..., des cercles proposés, il coupera la droite donnée DE en deux points I et T tels, qu'en les projetant sur la direction de HE par des parallèles II', TT' à DH, les points I' et T', qui en résultent, seront les extrémités du diamètre correspondant (*), dont le conjugué idéal est, d'après ce qui précède, égal et parallèle à D'G'.

Maintenant il nous sera facile de démontrer que la ligne des centres CC' est une sécante idéale commune, à la fois, à tous les cercles (P) et à la section conique des réciproques de DE.

En effet, puisque les droites DG et DH sont divisées également en E et *n* par la parallèle *mn* à GH, DF est aussi divisée également au point O par cette parallèle ; mais HD et HG sont les asymptotes de la courbe ; donc HO est la direction du diamètre conjugué au parallèle à DF : c'est-à-dire que le point O est le milieu de la corde idéale qui répond à DF ou CC' dans la courbe (54), comme il est aussi évidemment le milieu de la corde idéale qui répond à cette droite dans le cercle (P) et dans tous ses semblables. Reste donc à prouver (56) que le point O détermine, sur le diamètre qui appartient à HO, deux segments dont le rectangle, multiplié par le rapport inverse du carré de ce diamètre et de celui qui lui est conjugué, est égal au rectangle OV.OU des segments formés par ce même point sur le diamètre UV du cercle (P), qui répond à *mn* ; rectangle qui, d'ailleurs, est le même pour tous les cercles de la suite dont le premier fait partie (73), puisque CC' est leur sécante idéale commune.

Or les triangles rectangles DFH, DGH sont évidemment semblables ; donc les droites HO et HE, qui divisent les côtés homologues DF et DG en parties égales, sont aussi des lignes homologues ; et par conséquent l'angle DHO = EHG, et l'angle DOH = HEG = HI'G' : c'est-à-dire que les diamètres correspondants à HO et HI' forment les mêmes angles avec leurs conjugués respectifs et avec les asymptotes de la courbe, en sorte qu'ils sont parfaitement égaux. Portant donc sur HI' la distance HO' = HO, O'I'.O'T' représentera le rectangle des segments formés par le point O sur le diamètre qui répond à HO, et il ne s'agira plus que de prouver, selon ce qui vient d'être observé ci-dessus, que

$$\frac{\overline{D'I'}^2}{\overline{HI'}^2}\cdot O'I'.O'T' = OV.OU = \overline{OP}^2 - \overline{VP}^2.$$

Projetons le point O' en ω sur DE, par la parallèle indéfinie ωO' à DH, on aura évidemment, à cause des triangles semblables,

$$\omega I = O'I'\cdot\frac{D'I'}{HI'},\quad \omega T = O'T'\cdot\frac{D'I'}{HI'};$$

et par conséquent

$$\frac{\overline{D'I'}^2}{\overline{HI'}^2}\cdot O'I'.O'T' = \omega I.\omega T = \overline{DI}^2 - \overline{\omega D}^2.$$

D'un autre côté, Dω est égal à DO, car leur rapport à la même ligne HO', ou HO, est évidemment égal, pour les deux, au rapport des diamètres conjugués D'I', HI' que l'on considère ; donc la

(*) En effet, puisque le cercle (D) fait partie de la suite des cercles (C), (C'),..., il coupe orthogonalement le cercle inconnu (P) de la suite réciproque, et par conséquent (173) son rayon sur DE est, en grandeur et en direction, la tangente DI relative au cercle (P) ; c'est-à-dire que le cercle (D) passe par les points de contact du cercle (P) et de son analogue.

relation à démontrer devient simplement

$$\overline{OP}^2 - \overline{VP}^2 = \overline{OP}^2 - \overline{PI}^2 = \overline{DI}^2 - \overline{DO}^2,$$

laquelle a lieu, en effet, à cause que les triangles rectangles OPD, PDI ont l'hypoténuse commune DP.

Donc enfin la ligne des centres CC' des cercles proposés est une sécante idéale, commune à la fois à tous les cercles (P) et à la section conique des réciproques de la droite donnée DE, comme il s'agissait de le prouver directement, d'une manière entièrement géométrique et rigoureuse.

Cet exemple et celui que renferme la Note suivante peuvent servir à donner une idée des avantages qui résultent de l'admission du principe de continuité en Géométrie : nous aurons l'occasion d'en rencontrer un grand nombre d'autres, dans le cours de ces recherches, et il ne serait pas difficile de les multiplier davantage, si cela pouvait être nécessaire à notre objet. Nous nous contenterons d'en citer un, d'autant plus frappant qu'il est dû à l'un des plus célèbres disciples de Monge dans la science de l'étendue : c'est celui qui est offert par M. Dupin, dans son beau *Mémoire sur la description des lignes et des surfaces du second degré*, inséré au XIVe Cahier du *Journal de l'École Polytechnique;* l'auteur part, en effet, d'un mode de génération qui ne saurait s'appliquer qu'aux courbes et aux surfaces du second ordre entièrement fermées; mais il n'en étend pas moins les conséquences auxquelles il parvient à toutes les lignes et surfaces de cet ordre, et par conséquent au cas où ce même mode de génération est impossible ou imaginaire. A la vérité, ce savant géomètre s'appuie sur les considérations offertes par l'Analyse algébrique pour justifier cette extension du cas réel au cas imaginaire, mais il reste toujours à démontrer que l'Analyse a la singulière faculté de traiter les êtres de non-existence comme les êtres absolus; et, si elle ne lui vient précisément que parce qu'on y admet le principe de continuité, il n'y aura aucune raison de ne pas admettre, dans les recherches géométriques de même nature, le principe lui-même, d'une manière entièrement directe et sans recourir aucunement à l'Analyse algébrique.

NOTE II.

SUR LE LIEU DES POINTS DE L'ESPACE SUSCEPTIBLES DE PROJETER UNE SECTION CONIQUE DONNÉE ET UNE DROITE TRACÉE DANS SON PLAN DE FAÇON QUE, LA DROITE PASSANT A L'INFINI SUR LE NOUVEAU PLAN, LA SECTION CONIQUE Y DEVIENNE, EN MÊME TEMPS, UNE ELLIPSE SEMBLABLE A UNE ELLIPSE DONNÉE.

Nous avons vu que, *mn* et (C), *fig.* 9, étant la droite et la section conique données, O le centre de la corde idéale MN répondant à ces lignes, si l'on traçait une suite de droites OS dans l'espace, dont le rapport à la demi-corde idéale OM fût égal à celui de deux diamètres conjugués quelconques de l'ellipse de comparaison, et qui fissent entre elles le même angle SOM, toutes les extrémités S, ainsi obtenues, pouvaient être prises pour des centres auxiliaires de projection, et que la suite de tous ces centres formait nécessairement une surface de révolution.

Or on peut remarquer que rien ne fixe l'ordre dans lequel les distances OS, OM doivent être proportionnelles aux diamètres conjugués correspondants de l'ellipse, ni le sens dans lequel doivent être situés les points S par rapport au point O; ce qui donne naturellement quatre points pour chaque droite indéfinie OS, également propres à satisfaire aux conditions du problème, et par conséquent quatre circonférences de cercle appartenant à la surface de révolution, lieu des centres de

projection ; mais on voit, en même temps, que la considération de ceux de ces points qui sont au delà du point O, par rapport à S, devient inutile, attendu que les circonférences qui leur correspondent sont reproduites par les points qui appartiennent à la position symétrique de la droite OS en dessous de OM, et qui fait avec cette dernière un angle supplément de l'angle SOM.

Soient donc S et S' (*fig.* 15) les deux points que l'on considère d'un même côté du point O ; soient a', b' les diamètres conjugués de l'ellipse de comparaison, qui correspondent à l'angle SMO, on aura

$$OS = OM\frac{a'}{b'}, \quad OS' = OM\frac{b'}{a'};$$

d'où

$$OS.OS' = \overline{OM}^2.$$

En partant de là et des propriétés connues des diamètres conjugués de l'ellipse, on en conclut sans peine que tous les points S, S', appartenant à un même plan méridien, sont distribués sur une circonférence de cercle unique, ayant la droite MN pour corde idéale commune avec la section conique qui sert de base aux différents cônes projetants.

Soit, en effet, K le milieu de la distance SS', on aura

$$OK = \frac{OS + OS'}{2} = OM\frac{a'^2 + b'^2}{2a'.b'},$$

supposons que, du point K, on abaisse la perpendiculaire KP sur OM, et qu'on élève, au contraire, la perpendiculaire KC sur SS' ; cette dernière ira rencontrer celle OA, qui correspond à MN et au point O, en un point C, tel que le triangle OKC sera semblable au triangle OKP, et qu'on aura

$$KP : OK \text{ ou } OM\frac{a'^2 + b'^2}{2a'.b'} :: OK : OC = OM\frac{a'^2 + b'^2}{2a'.b'}\cdot\frac{OK}{KP}.$$

Mais la surface du parallélogramme formé sur les diamètres conjugués a', b' est, comme on sait, constante et égale à $a.b$, en appelant a et b les axes principaux de l'ellipse de comparaison ; et, d'une autre part, cette surface est au rectangle $a'.b'$ des côtés a' et b' comme le sinus de l'angle SOM de ces côtés est à l'unité, ou comme KP est à OK ; donc $a'.b' = a.b\frac{OK}{KP}$. On a d'ailleurs $a'^2 + b'^2 = a^2 + b^2$, et partant

$$OC = OM\frac{a^2 + b^2}{2a.b}.$$

Mais si l'on détermine, sur la direction de OC, les points A et A' analogues à S et S', on aura, à cause que l'angle AOM est celui des axes de l'ellipse de comparaison $OA = OM\frac{a}{b}$, $OA' = OM\frac{b}{a}$; donc le point C est le milieu de la distance AA', comme le point K l'est de SS' ; et, puisqu'on a d'ailleurs $OS.OS' = \overline{OM}^2 = OA.OA'$, on voit que tous les points S, S' appartiennent, en effet, à une circonférence de cercle unique, dont C est le centre, et qui a la distance MN pour corde idéale commune avec la courbe de base donnée. Le lieu de tous les centres auxiliaires de projection cherchés est donc une surface annulaire, engendrée par la révolution de ce cercle autour de MN comme axe, ainsi qu'il s'agissait de le démontrer d'une manière directe.

Quand les deux axes a, b de l'ellipse de comparaison sont égaux, cette ellipse devient un cercle, et l'angle SOM est constamment droit ; donc OS se confond toujours avec OA ; et comme d'ailleurs OS = OS', on voit que la circonférence méridienne (C) se réduit à un point, et la surface annulaire par conséquent à une circonférence de cercle dont le plan est perpendiculaire sur le milieu de OM : ce qui revient à ce qui a déjà été démontré directement, art. 110.

SECTION II.

PROPRIÉTÉS FONDAMENTALES DES LIGNES DROITES, DES SECTIONS CONIQUES ET DES CERCLES.

141. Nous croyons devoir commencer ces applications par l'exposition des intéressantes propriétés des *transversales* et des *points de concours*, en nous bornant toutefois à celles de ces propriétés qui peuvent mériter le plus d'intérêt, soit par leur élégance, soit par leur généralité ou leur fécondité. Indépendamment de l'importance qui leur est propre, et des ressources qu'elles offrent dans les applications de la Géométrie aux opérations qui s'exécutent sur le papier et sur le terrain, elles se reproduisent si souvent dans les recherches, qu'on doit les considérer comme la base essentielle de toutes les autres propriétés projectives des figures. Bien que, pour la plupart, elles soient assez généralement connues des géomètres, et qu'elles appartiennent à des théories quelquefois purement élémentaires, nous n'en pensons pas moins faire une chose utile que de les réunir ici sous un même point de vue et par des principes qui puissent les faire retrouver, sans peine, au besoin. Nous promettons, au reste, d'être aussi courts que possible, dans un sujet naturellement fort étendu, et de ne nous arrêter, sur chaque théorème, qu'autant qu'il sera nécessaire pour mettre le lecteur sur la voie propre à lui faire entrevoir, par lui-même, toutes les conséquences.

CHAPITRE PREMIER.

GÉOMÉTRIE DE LA RÈGLE ET DES TRANSVERSALES.

142. La *Géométrie de la règle*, ou *Théorie des points de concours*, ne s'occupant, d'une part, que des propriétés descriptives ou de situation des systèmes de lignes droites indéfinies, et la *Géométrie des transversales* n'ayant pour objet, d'une autre, que les relations métriques relatives aux figures com-

posées également de systèmes de lignes droites indéfinies, coupées d'une manière quelconque par des droites ou courbes appelées, pour cette raison, *transversales*; on conçoit, *à priori*, qu'elles se trouvent toutes deux comprises implicitement dans la définition que nous avons donnée des relations et des *figures projectives*, et que, par conséquent, tout ce que nous avons pu dire, en général, de ces dernières propriétés s'applique naturellement à celles qui font le sujet ordinaire de la Géométrie de la règle et des transversales. Ce qui suit montrera, en outre, que toutes les relations de la Géométrie des transversales sont de la nature particulière de celles qui ont été définies art. 20; de sorte que nous pouvons dès à présent conclure, d'une manière générale, que les théorèmes des articles 18 et 19 de la première Section subsistent pour ces sortes de relations.

143. M. Carnot avait déjà montré d'une manière directe, dans sa *Géométrie de position* et son *Essai sur la Théorie des transversales*, que les relations de cette théorie s'appliquent également aux figures tracées sur la surface d'une sphère quelconque, en substituant des arcs de grands cercles aux transversales rectilignes. Le savant rédacteur des *Annales de Mathématiques*, M. Gergonne, a depuis fait observer que la même chose avait lieu pour les propriétés de situation des sections coniques et des lignes droites, quand on les projette sur la surface de la sphère au moyen de cônes et de plans partant du centre de cette sphère, considéré comme centre de projection. Ce qui précède est plus général, et fait voir sous quelles conditions l'une ou l'autre extension est possible.

144. On conçoit également, d'après ce qui a été dit art. 11, que quelques-unes des propriétés des transversales et des points de concours doivent s'étendre, d'une manière analogue, aux figures situées dans l'espace et dont les premières pourraient être considérées comme des projections (13).

Enfin les relations de la Géométrie des transversales auront nécessairement encore lieu pour l'espèce de projections définies art. 14 et 15, c'est-à-dire pour la projection dans un plan et pour la projection sur une droite.

Nous faisons à l'avance toutes ces remarques, pour ne pas être obligés d'y revenir, à chaque pas, dans la suite. Notre objet étant d'ailleurs de nous occuper spécialement des figures décrites sur un plan, nous ne donnerons que par aperçu la manière dont certains théorèmes, relatifs aux polygones plans, peuvent s'étendre aux polygones gauches coupés par des plans ou des surfaces du second ordre, etc.; seulement, afin de faire connaître les beaux

résultats auquels est parvenu M. Carnot, dans sa *Géométrie de position* et dans sa *Théorie des transversales*.

145. *Si tous les côtés* AB, BC, CD, DE, EA *d'un polygone plan* ABCDE (*fig.* 16), *ou leurs prolongements, sont coupés par une transversale droite quelconque, mr, aux points respectifs m, n, p, q, r, il y aura sur chaque côté, ou sur son prolongement, deux segments formés par la transversale, tels que le produit de tous ceux de ces segments, qui n'auront point d'extrémités communes, sera égal au produit de tous les autres, c'est-à-dire qu'on aura* (*)

$$Am.Bn.Cp.Dq.Er = Ar.Bm.Cn.Dp.Eq.$$

Cette relation étant projective de sa nature (20), il suffit de prouver qu'elle a lieu pour l'une quelconque des projections de la figure. Or c'est ce qui est en effet, puisque, si on la projette sur un nouveau plan de façon que la transversale passe à l'infini, c'est-à-dire (105) sur un plan parallèle à cette transversale, tous les segments ci-dessus deviendront eux-mêmes infinis, et par conséquent le rapport de deux quelconques d'entre eux sera l'unité (28).

146. La même relation s'étend évidemment à un polygone gauche quelconque coupé par un plan transversal arbitraire : pour le prouver, il suffit de mettre la figure en projection sur un nouveau plan parallèle au plan transversal, pourvu qu'on prenne pour centre de projection un point quelconque de ce dernier plan; car alors tous les segments deviendront encore infinis et égaux, comme dans le premier cas. D'ailleurs ce dernier théorème se ramène immédiatement au premier, quand on projette la figure sur un plan quelconque, à partir d'un point du plan transversal pris pour centre de projection; et le premier se réduit à une simple identité, quand on projette la figure qui le concerne sur une droite quelconque de son plan (15), à partir d'un point de la transversale pris pour centre de projection.

147. Si l'on considère une nouvelle transversale $m'r'$ dans le polygone ABCDE, on aura, comme ci-dessus,

$$Am'.Bn'.Cp'.Dq'.Er' = Ar'.Bm'.Cn'.Dp'.Eq'.$$

Donc, si l'on représente simplement par (Am) le produit $Am.Am'$, par (Bn) le produit $Bn.Bn'$, et ainsi de suite pour les autres, il viendra, en

(*) M. Brianchon a déjà remarqué (*Correspondance Polytechnique*, t. II, p. 257) que ce théorème et son analogue pour la sphère ont été connus des anciens, quant à ce qui concerne le cas du triangle. *Voyez* l'*Almageste* de Ptolémée, liv. I, chap. XII.

multipliant terme à terme,

$$(Am)(Bn)(Cp)(Dq)(Er)=(Ar)(Bm)(Cn)(Dp)(Eq);$$

relation qu'on peut étendre, de la même manière, à un polygone plan coupé par un système de droites arbitraires, en nombre quelconque, et (146) à un polygone gauche coupé pareillement par un nombre quelconque de plans arbitraires.

148. Cette même relation s'étend encore au cas où l'on remplace le système des deux droites par une section conique quelconque, comme cela a déjà été démontré par anticipation (34), pour le cas particulier où l'on ne considère qu'un simple triangle : c'est-à-dire que :

Si tous les côtés d'un polygone plan quelconque ABCDE, *ou leurs prolongements, sont rencontrés par une section conique quelconque, et qu'on nomme, comme ci-dessus,* (A*m*), (B*m*) *les produits des segments interceptés, sur* AB, *entre chacun des sommets* A *et* B *respectivement et les deux branches de la courbe, par* (B*n*) *et* (C*n*) *les produits semblables relatifs au côté* BC, *etc., on aura*

$$(Am)(Bn)(Cp)(Dq)(Er)=(Ar)(Bm)(Cn)(Dp)(Eq).$$

La démonstration est évidemment la même que celle de l'article 34 déjà cité (*).

149. Enfin la proposition qui nous occupe peut s'étendre, avec la même facilité, aux polygones gauches coupés par des surfaces quelconques du même ordre. En effet, elle a évidemment lieu pour le cas particulier où le polygone se réduit à un simple triangle, puisque le plan de ce triangle rencontre nécessairement la surface suivant une section conique: si donc on décompose le polygone ci-dessus en triangles partiels, au moyen de diagonales partant d'un même angle; puis qu'ayant écrit les relations qui correspondent à ces divers triangles, on les multiplie entre elles dans un ordre convenable, les rectangles des segments formés sur chaque diagonale disparaîtront tous à la fois du résultat, et il ne restera plus qu'une relation entre les segments relatifs aux côtés du polygone, identique avec celle qui précède.

150. M. Carnot, en exposant, dans sa *Géométrie de position*, ces théorèmes d'une élégance et d'une simplicité vraiment admirables, a fait voir, en outre, qu'ils s'étendent, d'une manière analogue, à toutes les *courbes géométriques*

(*) On doit à Pascal un théorème qui revient à celui-ci, pour le cas particulier où l'on ne considère que le système de quatre droites dans le plan d'une section conique. *Voyez* son *Essai pour les Coniques*, qui a paru en 1640, et qui se trouve imprimé parmi ses *Œuvres*, t. IV, édition de la Haye, 1779.

prises pour transversales, lorsque le polygone est plan, et à toutes les surfaces dont les sections faites par des plans quelconques sont des courbes géométriques, lorsque le polygone est gauche. Or, d'après le raisonnement qui vient d'être établi pour les surfaces du second ordre, on voit que tout consiste à démontrer la proposition dans le cas particulier du triangle et d'une courbe géométrique, de degré quelconque, prise pour transversale, c'est-à-dire qu'en adoptant les conventions déjà admises ci-dessus (145 et 147), il s'agit simplement de prouver qu'on a

$$(Am)(Bn)(Cp)=(Ap)(Bm)(Cn).$$

Supposons, en effet, qu'on mette la figure en projection sur un nouveau plan, de façon que l'un des sommets, C par exemple, passe à l'infini, ce qui est possible d'une infinité de manières (101); tous les segments, qui se mesurent à partir de ce point, deviendront infinis et par conséquent égaux (28); et, comme la relation ci-dessus est nécessairement projective (20), il s'agira finalement de prouver que, dans la nouvelle figure, on a

$$(Am)(Bn)=(Ap)(Bm),$$

ou

$$(Am):(Bm)::(Ap):(Bn),$$

c'est-à-dire que « le produit des abscisses Am, Am',..., est au produit des » abcisses Bm, Bm',..., formées sur la même droite AB, comme le produit » des appliquées Ap, Ap',..., correspondantes aux premières, est au produit » des appliquées parallèles Bn, Bn,..., qui appartiennent aux secondes : » or cette propriété des courbes géométriques est connue, et a été donnée par Newton dans son *Énumération des lignes du troisième ordre*.

151. Ces divers théorèmes prouvent, dans leur généralité, que les lignes et surfaces géométriques des divers ordres doivent jouir de certaines propriétés qui leur sont communes avec les systèmes analogues de lignes droites et de surfaces planes; il nous serait d'ailleurs facile d'en déduire, dès à présent, un grand nombre de conséquences particulières; mais notre objet ici est seulement de faire voir comment on peut arriver directement aux diverses relations connues de la Géométrie des transversales, au moyen des principes de projection posés dans la première Section; et nous réservons pour un autre travail de faire connaître les résultats auxquels nous ont conduits ces mêmes relations, quant à ce qui concerne les lignes et les surfaces courbes géométriques d'un ordre quelconque.

152. Il est d'ailleurs évident que ces relations, ayant été établies d'une

manière générale, s'appliquent aux divers cas particuliers qui peuvent se présenter, pourvu qu'on y introduise les modifications que nécessite le nouvel état du système, et qu'indique toujours la loi de continuité : ainsi plusieurs des points d'intersection peuvent se réunir en un seul, ou s'éloigner à l'infini, etc.

Supposons par exemple, avec M. Carnot, que la section conique ou la surface du second ordre, transversale d'un polygone plan ou gauche, devienne tangente à tous les côtés de ce polygone, les segments qui appartiennent à un même sommet et à un même côté seront évidemment égaux : en sorte qu'on a la proposition suivante, qui est une extension de celle déjà établie à l'article 36, pour le cas du triangle et des sections coniques :

Un polygone, plan ou gauche, ayant tous ses côtés tangents à une même ligne ou à une même surface du second ordre, il existe, à partir de chaque point de contact, deux segments sur le côté correspondant ; et le produit de tous les segments non contigus, *ou qui n'ont point d'extrémités communes, est égal au produit de tous les autres.*

153. On voit que ce théorème a la plus grande analogie avec celui (146) qui est relatif au polygone gauche coupé par un plan transversal arbitraire; et il résulte en particulier, de ce rapprochement, que, si tous les points de contact, moins un, des côtés d'un polygone gauche quelconque, circonscrit à une surface du second ordre, étaient situés dans un même plan, le dernier s'y trouverait nécessairement aussi, pourvu toutefois que la disposition des points soit telle, qu'il y en ait un nombre pair ou impair sur le prolongement des côtés, suivant que le polygone est lui-même d'un ordre pair ou impair. Cette circonstance ayant lieu, en particulier, pour le cas d'un quadrilatère circonscrit à une surface de second ordre, il en résulte ce corollaire déjà connu (*) :

Dans tout quadrilatère gauche circonscrit à une surface du second ordre, les quatre points de contact sont dans un même plan.

Mais en voilà assez sur ces considérations générales; revenons maintenant aux propositions élémentaires de la Géométrie des transversales, relatives aux figures décrites sur un plan.

154. Soit ABCD (*fig.* 17 et 18) un quadrilatère *simple* quelconque, dont les côtés opposés, AB et CD, AD et BC, prolongés jusqu'à leurs rencontres respectives en E et F, forment ce qu'on appelle le quadrilatère *complet* BAEDFCB

(*) *Mémoire sur les lignes du second ordre*, par C.-J. Brianchon, p. 14, note.

avec les trois diagonales AC, BD et EF, dont les deux premières, appartenant au quadrilatère simple ABCD, se rencontrent en G et rencontrent la troisième en I et H respectivement. Traçons les droites indéfinies GE, GF, qui joignent le point G d'intersection des diagonales avec les points de concours E et F des côtés opposés du quadrilatère simple ABCD; ces deux droites iront rencontrer les côtés de ce quadrilatère, auxquels elles n'appartiennent pas, en quatre nouveaux points : la première aux points P et M de AD et BC, la seconde aux points L et N de AB et CD. On aura ainsi formé une figure composée de neuf lignes droites, sur chacune desquelles se trouveront quatre points : or je dis que *ces différents systèmes de quatre points formeront autant de groupes harmoniques* (24).

En effet, si l'on met la figure en projection sur un nouveau plan, de façon (105) que l'une des trois diagonales du quadrilatère complet, EF par exemple, passe à l'infini, les droites dirigées vers le point E deviendront parallèles entre elles, et il en sera de même de celles qui aboutissent au point F; le quadrilatère simple ABCD sera transformé en un parallélogramme avec ses deux diagonales AC et BD, se croisant au centre G : or toutes les lignes de la nouvelle figure porteront trois points, indépendamment de celui qui est à l'infini, dont les deux extrêmes seront à égale distance de celui du milieu; donc (27) ils pourront être regardés, avec le point à l'infini, comme autant de groupes de quatre points harmoniques, et par conséquent il en sera de même des lignes et des points correspondants de la figure primitive.

Il reste à démontrer que la troisième diagonale EF est aussi divisée harmoniquement aux points H et I; or, c'est ce qui paraîtra évident, *à priori*, si l'on considère que les quatre droites GE, GF, GH et GI, qui se croisent au point G et appartiennent aux quatre points harmoniques E, N, D, C, forment naturellement un faisceau harmonique (25) : il suit de là évidemment, et de ce qui précède, que :

155. *Dans tout quadrilatère complet ayant ses trois diagonales, chacune d'elles est divisée harmoniquement, ou en segments proportionnels, par les deux autres.*

Ce théorème a été connu des anciens, comme il paraît d'après la Proposition CXXI du livre VII des *Collections mathématiques* de Pappus. Il a été reproduit depuis par Grégoire de Saint-Vincent (*), et de Lahire s'en sert (**)

(*) *Opus geometricum* (1647), p. 6, Propos. X.

(**) *Sectiones conicæ*, in-fol., 1685, p. 9, Propos. XX.

pour déterminer, avec la règle seule, le quatrième harmonique I de trois points E, F, H donnés sur une même droite : il suppose qu'on forme, à volonté, un quadrilatère ABCD dont une des diagonales passe par H, et dont les côtés opposés concourent en E, F respectivement. La même construction est employée par Schooten (*) pour mesurer la distance d'un point inaccessible I à un point donné, F, sur le terrain.

156. Les *fig.* 17 et 18, qui viennent de nous occuper, appartiennent évidemment aussi au système des six distances qui joignent, deux à deux, les quatre points A, B, C, D, et des trois lignes droites qui réunissent, dans le même ordre, les nouveaux points d'intersection E, F, G des premières : or ces figures donnent lieu à beaucoup d'autres relations faciles à reconnaître.

Par exemple, on peut remarquer que les quatre points L, M, N, P déterminent deux segments sur les côtés de chacun des trois quadrilatères simples ABCD, AFCE, BEDF, et que le produit de quatre de ces segments, qui ne sont pas contigus et appartiennent aux côtés d'un même quadrilatère, est égal au produit des quatre autres, c'est-à-dire qu'on a, pour le quadrilatère simple ABCD pris en particulier,

$$AL.BM.CN.DP = AP.BL.CM.DN.$$

Pour le prouver, il suffit de se reporter à la projection ci-dessus de la figure, pour laquelle cette relation, qui d'ailleurs est projective, devient évidemment identique.

On voit pareillement que les côtés opposés du quadrilatère LMNP, qui a pour sommets les quatre points que l'on considère, devenant respectivement parallèles aux diagonales AC et BD du parallélogramme de la projection, doivent nécessairement, dans la figure primitive, concourir aux points I et H où ces mêmes diagonales rencontrent la droite EF.

157. Soit D (mêmes *figures*) un point situé quelque part sur le plan d'un triangle ABC; par le point D, et des sommets du triangle, abaissons des droites AF, BG et CE sur les côtés opposés à ces sommets; joignons deux à deux, par de nouvelles droites, les points F, G, E ainsi obtenus sur ces côtés,

---

(*) *Exercitationum mathematicarum lib. II: De constructione problematum simplicium geometricorum, seu quæ solvi possunt, ducendo tantum rectas lineas*, 1656; *Appendix*, Propos. V. Dans cet *Appendice*, on traite les cas où certains points sont *inaccessibles*; il y est fait aussi mention d'un écrit intitulé : *Geometria peregrinans*, qui a le même objet, et que Schooten attribue à un noble polonais ; on y résout, dit-il, seize problèmes relatifs aux points et lignes inaccessibles sur le terrain, *sans autre instrument que des jalons*.

il en résultera un second triangle EFG *inscrit* ou *exinscrit* au premier. Or l'ensemble de toutes ces lignes, au nombre de neuf et prolongées jusqu'à leurs intersections respectives, produira une figure entièrement identique avec celles qui nous ont occupés dans ce qui précède, et qui jouira par conséquent des mêmes propriétés. Ainsi chacune de ces neuf lignes portera quatre points, qui formeront autant de groupes harmoniques (*); et les six nouveaux points H, I, L, M, N, P, obtenus par le croisement de ces lignes, seront, trois à trois, sur quatre droites LPH, MNH, PNI, LMI, dont la dernière appartient aux points de concours des côtés respectivement opposés des deux triangles ABC et EFG. Je dis, de plus, qu'on aura, dans le triangle ABC,

$$AE.BF.CG = BE.CF.AG,$$

propriété qui peut s'énoncer de cette manière :

158. *Si, par un point quelconque pris dans le plan d'un triangle, on abaisse, de chaque angle, une droite sur le côté opposé, on obtiendra, sur chacun de ces côtés, deux segments tels, que le produit de trois segments quelconques, non contigus, sera égal au produit des trois autres* (**).

En effet, cette relation est projective, et devient évidemment identique dans la projection ci-dessus (154) du quadrilatère ABCD suivant un parallélogramme.

159. On arriverait d'ailleurs directement (16) à cette relation, en remarquant qu'elle a lieu, également d'une manière identique, entre les sinus des angles formés autour du point D, pris pour centre de projection des six segments correspondants; et, comme cette remarque s'applique à un polygone quelconque d'un nombre impair de côtés, des sommets duquel on aurait abaissé des droites sur les côtés respectivement opposés, en les faisant toutes passer par un même point pris à volonté sur le plan de la figure, on voit que la relation ci-dessus a encore lieu, d'une manière analogue, entre les différents segments formés, par ces droites, sur les côtés du polygone; donc on a ce théorème général, qui n'a, je crois, encore été établi nulle part :

Si, par un point pris à volonté dans le plan d'un polygone quelconque d'un nombre impair de côtés, on abaisse, de chaque angle, une droite sur le côté

(*) *Géométrie de position*, p. 287 et 288; *Application de la Théorie des transversales, etc.*; par C.-J. Brianchon. Paris, 1812, § 53.

(**) Suivant la remarque faite par M. Servois, ce théorème appartient à Jean Bernoulli. *Voyez* les *OEuvres* de ce dernier, t. IV, n° CLV.

opposé, on obtiendra sur chacun de ces côtés deux segments, et le produit de tous les segments non contigus sera égal au produit de tous les autres.

160. Cette proposition s'étendant, en vertu du principe de continuité, au cas où un ou plusieurs des côtés deviennent nuls en conservant une direction donnée, a lieu, comme on voit, également pour un polygone d'un nombre pair de côtés, pourvu qu'en menant par l'un quelconque de ses sommets une droite arbitraire, on la considère comme la direction d'un côté nul ou infiniment petit du polygone.

Il est, au surplus, à remarquer que la réciproque de cette proposition n'aura lieu en général que pour le cas particulier du triangle; c'est-à-dire que, si la relation ci-dessus (157) subsiste entre les segments formés par trois points E, F, G pris *convenablement* sur les côtés d'un triangle ABC, ou sur leurs prolongements, les trois droites AF, CE, BG se croiseront en un même point D.

Je dis que les trois points E, F, G doivent être pris convenablement sur les côtés, parce qu'en effet, suivant la remarque déjà faite par M. Brianchon, ils doivent toujours être en nombre pair sur les prolongements de ces côtés. S'il en était autrement, ces trois points appartiendraient à une même droite, d'après le théorème de l'article 145, appliqué au cas particulier du triangle.

161. Quand un triangle quelconque ABC (*fig.* 19) est circonscrit à une section conique, les trois points de contact E, F, G déterminent sur les côtés de ce triangle six segments, qui ont entre eux (36 et 152) la relation de position et de grandeur que nous venons de définir; donc toutes les propriétés démontrées aux articles 154 et 156 lui sont applicables directement (*) : ainsi, par exemple, les droites AF, BG et CE iront se croiser en un même point D.

Il suit de là que, si l'on se donnait trois tangentes d'une section conique et les points de contact de deux de ces tangentes, ou trois points et les tangentes en deux de ces points, on obtiendrait de suite, avec la règle seule, soit le troisième point de contact, soit la troisième tangente de la courbe (**). Nous verrons bientôt (191) comment, d'après ces données, on peut décrire entièrement cette courbe par points.

(*) *Géométrie de position*, p. 293 et 453.

(**) *Algèbre posthume* de Mac-Laurin, 1748, *Appendice*, § 42.

162. Enfin si, sur la direction des côtés d'un triangle ABC (*fig.* 17 et 18), on prend, à volonté, trois points L, M, I, situés en ligne droite, puis les quatrièmes harmoniques E, F, G des premiers par rapport aux côtés ou aux sommets correspondants du triangle, ces six points jouiront encore des propriétés qui viennent d'être énoncées. Ainsi, par exemple, les trois droites AF, BG, CE se croiseront en un même point D, et l'on aura la relation

$$AE.BF.CG = BE.CF.AG,$$

qu'il serait d'ailleurs facile de vérifier directement, en écrivant (145) que la droite LMI est une transversale par rapport au triangle ABC (*).

163. Prenons maintenant, sur les côtés du triangle ABC, de nouveaux points X, Y, Z, tels, que les distances EL, FM, GI soient partagées en deux parties égales en ces points respectifs, ou, si l'on veut (31), tels que

$$\overline{LX}^2 = AX.BX, \quad \overline{MY}^2 = CY.BY, \quad \overline{IZ}^2 = AZ.CZ,$$

on aura (31)

$$\frac{AX}{BX} = \frac{\overline{AE}^2}{\overline{BE}^2}, \quad \frac{BY}{CY} = \frac{\overline{BF}^2}{\overline{CF}^2}, \quad \frac{CZ}{AZ} = \frac{\overline{CG}^2}{\overline{AG}^2};$$

d'où (162)

$$\frac{AX.BY.CZ}{BX.CY.AZ} = \frac{\overline{AE}^2.\overline{BF}^2.\overline{CG}^2}{\overline{BE}^2.\overline{CF}^2.\overline{AG}^2} = 1.$$

Ce qui démontre évidemment que les trois nouveaux points X, Y, Z, sont en ligne droite, comme les trois premiers L, M, I qui leur correspondent respectivement, puisque d'ailleurs ils sont nécessairement à la fois extérieurs au triangle ABC, quelle que soit la position de la droite LMI.

Nous ferons usage de ces considérations plus tard ; pour le moment, nous nous bornerons à en déduire ce théorème déjà connu :

164. *Dans tout quadrilatère complet, les milieux des trois diagonales sont situés sur une même ligne droite.*

En effet, dans le quadrilatère complet BAEDFCB (*fig.* 17), par exemple,

(*) Ces propriétés s'étendent, d'une manière analogue, au tétraèdre, sur chacune des arêtes duquel on aurait pris deux points, divisant cette arête en segments harmoniques. Ainsi ces douze points seront trois par trois sur de nouvelles droites, et six à six sur de nouveaux plans, renfermant quatre de ces droites ; ce qui fait en tout seize droites et huit plans pareils, dont les derniers s'entrecoupent tous suivant ces mêmes droites. *Voyez* à ce sujet le *Mémoire* de M. Brianchon *sur les surfaces du second degré*, inséré au XIIIe Cahier du *Journal de l'École Polytechnique*, et le théorème XII de l'*Essai sur la Théorie des transversales*, par M. Carnot.

les trois diagonales forment un triangle GHI dont les côtés sont divisés harmoniquement par les sommets correspondants du quadrilatère (155), lesquels sont d'ailleurs disposés, trois par trois, sur quatre lignes droites, comme les six points E, F, G, L, M, I du théorème qui précède (162).

165. On peut généraliser ainsi qu'il suit les théorèmes de l'article 156, relatifs aux quadrilatères.

Supposons qu'au lieu de mener les transversales EPM, FNL (*fig.* 17 et 18) par le point de croisement G des diagonales du quadrilatère ABCD, comme on l'a supposé au même endroit, on leur donne une direction quelconque (*fig.* 20), en les faisant toujours passer par les points de concours E et F des côtés opposés de ce quadrilatère; la démonstration employée pour le cas particulier prouve qu'on aura encore, entre les segments formés par ces transversales sur les côtés, la relation

$$AL.BM.CN.DP = AP.BL.CM.DN,$$

c'est-à-dire que :

Si, de chacun des points de concours E, F *des côtés respectivement opposés d'un quadrilatère* ABCD, *on mène des transversales arbitraires* EPM, FNL *sur les deux autres côtés, il en résultera, en tout, quatre points* L, M, N, P *et huit segments sur ces côtés; or le produit de quatre de ces segments, non contigus, sera égal au produit des quatre autres.*

Je dis, de plus, que :

Si l'on joint deux à deux, par de nouvelles droites, les quatre points d'intersection L, M, N, P, *pour former le quadrilatère simple* LMNP, *les points de concours* I *et* H *des côtés opposés de ce quadrilatère seront situés respectivement sur les deux diagonales du quadrilatère proposé* ABCD.

166. Pour prouver la chose dans toute la généralité qui lui est propre, nous considérerons un quadrilatère quelconque ABCD (*fig.* 21), sur les côtés duquel on ait pris respectivement les quatre points L, M, N, P satisfaisant à la relation ci-dessus, sans que, pour cela, les points qui appartiennent à des côtés opposés se trouvent, comme précédemment, sur des droites concourant avec les deux autres côtés du quadrilatère.

Or, la figure peut être considérée comme la projection d'une autre, dans l'espace, pour laquelle le quadrilatère plan ABCD serait devenu gauche; et, comme la relation ci-dessus aura également lieu (11) pour le nouveau quadrilatère, les quatre points L, M, N, P seront situés (146) dans un même plan, ce qui ne peut être évidemment sans que les droites LM, PN, AC, d'une part, et les droites LP, MN, BD, d'une autre, concourent respective-

ment en un même point, soit dans l'espace, soit sur le plan de la figure primitive (*).

La réciproque s'ensuit nécessairement, et peut d'ailleurs se démontrer de la même manière, c'est-à-dire que :

Si, d'un point quelconque I *de l'une* AC *des diagonales d'un quadrilatère plan ou gauche* ABCD, *on mène des transversales* IML, INP *dans les triangles* ABC, ACD *formés par cette diagonale, elles iront déterminer, sur les côtés correspondants de ces triangles, quatre points* L, M, N, P *qui jouiront des mêmes propriétés que les précédents. Ainsi l'on aura la relation ci-dessus* (165), *et les nouvelles droites* MN *et* LP, *qui appartiennent aux triangles formés par l'autre diagonale* BD, *iront concourir en* H *sur cette diagonale.*

167. Ces divers théorèmes pourraient encore se démontrer directement, soit au moyen de la propriété (145) du triangle coupé par une transversale quelconque, soit en mettant la figure en projection sur un nouveau plan, de façon que la diagonale AC passe à l'infini. Dans ce dernier cas, les triangles BLM, DNP se changeant nécessairement en deux triangles semblables, semblablement placés et ayant le point H pour *centre de similitude*, ou point de concours des trois droites qui joignent, deux à deux, les sommets homologues, toutes les relations ci-dessus se trouveront à la fois satisfaites dans la nouvelle figure. On voit, en outre, que la proportionnalité des lignes homologues donnera lieu aux nouvelles relations

$$HP.HM.AL.CN = HL.HN.AP.CM,$$
$$HP.HB.AL.CD = HL.HD.AP.CB,$$
$$LB.MI.PN.AD = LM.NI.PD.AB,$$

analogues aux précédentes.

La relation graphique qui lie entre eux les deux triangles BLM, DNP peut évidemment s'exprimer ainsi :

168. *Deux triangles quelconques étant tellement disposés, sur un plan, que leurs sommets respectifs s'appuient, deux à deux, sur trois droites convergeant en un même point, les côtés opposés aux sommets qui se correspondent iront*

(*) Cette propriété du quadrilatère gauche et sa réciproque peuvent servir à démontrer, d'une manière très-simple, la double génération de l'hyperboloïde à une nappe au moyen d'une droite. (*Voyez* un article de M. Chasles, p. 466 du tome II de la *Correspondance Polytechnique*.) Les propositions des articles 170, 171, celles surtout des articles 201, 208, 215 et 217 conduiraient à ce but d'une manière plus directe encore. Ces propositions et leurs corollaires ont donc entre elles la plus grande analogie, et se rapportent toutes à des propriétés des surfaces gauches du second degré. *Voyez*, à la page 332 du tome I des *Annales de Mathématiques*, une démonstration du principe de l'article 201, par M. Servois.

concourir, dans le même ordre, en trois points situés en ligne droite; et réciproquement, si ces côtés concourent, deux à deux, en trois points situés en ligne droite, les droites qui joignent, dans le même ordre, les sommets correspondants des triangles iront converger en un même point (*).

Soient, par exemple, ABC, A'B'C' (*fig.* 22 et 23) deux triangles tellement disposés, que les droites AA', BB', CC' concourent en un même point S; les côtés AB et A'B', BC et B'C', AC et A'C' iront concourir respectivement aux trois points I, K, L situés en ligne droite; et réciproquement, si ces trois points sont sur une même droite, les trois droites AA', BB', CC' concourront en un même point S.

Cette relation nous offre le premier exemple de deux figures qui sont la projection ou perspective l'une de l'autre dans un plan (14), et il est bien digne de remarque que, pour l'établir, il n'est point indispensable d'avoir recours aux relations métriques des figures; car elle est évidente, *à priori*, pour le cas où les triangles sont dans l'espace, et elle le devient, par là même, pour celui où ils sont dans un plan, puisque l'une de ces figures peut toujours être considérée comme la projection de l'autre. Nous reviendrons, au reste, plus tard sur ces considérations, en les exposant dans toute leur généralité.

169. Retournons maintenant aux circonstances particulières offertes par la *fig.* 20 et ses analogues, où les droites PM, LN, passent par les points de concours E, F des côtés opposés du quadrilatère ABCD.

On remarquera, en premier lieu, que ces droites et les côtés du quadrilatère forment naturellement un hexagone ALNCMPA dont les côtés de rang impair AL, CN, MP concourent en E, tandis que ceux de rang pair LN, MC, AP concourent en F; or, d'après ce qui précède (165), les trois droites LM, AC, PN, qui joignent les sommets respectivement opposés de l'hexagone, concourent aussi en un même point I; donc on a ce nouveau théorème :

Dans tout hexagone plan, dont trois côtés non contigus quelconques concourent en un même point, tandis que les trois autres concourent également en un point, les trois diagonales qui joignent les sommets respectivement opposés vont aussi se croiser en un seul et même point.

(*) Desargues est, je crois, le premier qui ait exposé cette propriété des triangles (*voyez* la fin du *Traité de perspective*, publié par Bosse, en 1648). Elle paraissait complétement oubliée, lorsque M. Servois la reproduisit dans un excellent ouvrage publié à Metz, en l'an XII (1804), sous le titre modeste de : *Solutions peu connues de différents problèmes de Géométrie pratique*, p. 23. On est parvenu depuis à une proposition beaucoup plus générale. *Voyez* la page 326 du tome XI des *Annales de Mathématiques*, et la page 69 du tome XII du même recueil.

170. On peut remarquer pareillement que la figure ENPFMLE forme un autre hexagone, dont les sommets s'appuient alternativement sur les deux droites EM et FL, et qui est ce qu'on appelle *inscrit* à ces droites : or, les côtés EN et FM, NP et LM, PF et LE, qui sont respectivement opposés dans cet hexagone, vont concourir aux trois points C, I, A, placés sur une même droite; donc on a cet autre théorème, qui a la plus grande analogie avec le premier :

Dans tout hexagone inscrit à deux droites situées sur un plan, les points de concours des côtés respectivement opposés sont tous trois sur une même droite (*).

171. Ces deux théorèmes ne sont, comme on voit, que des manières différentes d'exprimer la propriété de l'article 165, relative au quadrilatère complet coupé par deux transversales passant par deux de ses sommets opposés; ce qui n'empêche pas que, sous cette nouvelle forme, ils ne soient très-importants à considérer, car les figures auxquelles ils se rapportent sont essentiellement distinctes, si l'on ne veut point avoir égard au prolongement indéfini des lignes, ce qui arrive presque toujours dans les recherches géométriques. La figure que l'on considère peut d'ailleurs être tellement disposée, qu'il soit difficile de reconnaître celle à laquelle elle se rapporte en particulier, et il en est de cela évidemment comme des diverses transformations qu'on fait subir à une même relation métrique appartenant à une figure.

Considérons, par exemple, l'hexagone ABCDEFA (*fig.* 24), inscrit au système des deux droites DB et AE; il résulte de ce qui précède que les points de concours I, K, L des côtés opposés sont sur une autre droite; or il serait très-difficile de reconnaître cette particularité, *à priori*, si l'on voulait avoir recours à la propriété ci-dessus (165) du quadrilatère.

On remarquera, au surplus, que la distinction que nous venons d'établir entre les diverses manières d'énoncer les propriétés d'une même figure ne saurait s'appliquer à des figures qui, quoique présentant un aspect différent, sont pourtant de même nature et composées des mêmes lignes diversement placées entre elles; en un mot, à des figures qui peuvent être censées provenir les unes des autres par la simple transposition de quelques parties : car ces figures, étant *corrélatives* (53), jouissent absolument des mêmes propriétés, en vertu de la loi de continuité. Ainsi, par exemple, quelle que soit la position respective des sommets A, B, C, D, E, F de l'hexagone ci-des-

(*) C'est la CXXX^e Proposition du livre VII des *Collections Mathématiques* de Pappus, ou le lemme XIIIe pour les *Porismes* d'Euclide.

sus, pourvu qu'ils ne cessent pas d'appartenir aux deux mêmes droites AE et BD, la propriété qui les concerne sera toujours vraie et applicable : la même remarque devra s'étendre, en général, à tout ce qui va suivre.

172. Soient maintenant ABCD (*fig.* 25) un quadrilatère simple quelconque avec ses deux diagonales AC et BD, *ae* une droite ou transversale arbitraire rencontrant les directions indéfinies de ces diagonales aux points *e*, *f* et celles des côtés AB, BC, CD, DA aux points *a*, *b*, *c*, *d* respectivement; je dis qu'on aura les sept relations suivantes, dont une quelconque doit nécessairement comporter toutes les autres, c'est-à-dire que, par des transformations convenables, on doit pouvoir les rendre identiques :

$$\frac{ab.ad}{ae.af}=\frac{cb.cd}{ce.cf},\quad \frac{ba.bc}{be.bf}=\frac{da.dc}{de.df},\quad \frac{ea.ec}{eb.ed}=\frac{fa.fc}{fb.fd},$$
$$ec.ab.df=eb.af.dc,\quad ea.cd.bf=ed.cf.ab,$$
$$ad.be.cf=ae.bc.df,\quad ad.bf.ce=de.af.bc.$$

Pour le prouver, on remarquera d'abord que les quatre dernières relations peuvent se déduire des trois autres par voie de multiplication. Cela posé, si l'on met la figure en projection sur un plan, de façon (**105**) que les points de concours E et F des côtés opposés du quadrilatère passent à l'infini, ce quadrilatère se changera en un parallélogramme, pour lequel il sera facile de vérifier les trois premières relations, en comparant les triangles qui sont semblables; et, comme elles sont projectives (**20**), il s'ensuit qu'elles auront lieu également pour le quadrilatère proposé.

173. Ces relations fort remarquables ont été données, d'une manière analogue, par M. Brianchon, dans son intéressant *Mémoire sur les lignes du second ordre*, § VIII. Pappus avait déjà démontré, dans le VIIe livre des *Collections Mathématiques* (Propos. CXXX), une propriété qui, envisagée sous un autre point de vue, exprime l'une des dernières de ces relations; enfin on trouve également dans la *Géométrie de position*, p. 456, un théorème sur le quadrilatère qui revient encore aux premières d'entre elles : l'auteur l'a déduit comme conséquence particulière d'une proposition beaucoup plus générale, relative aux polygones inscrits aux sections coniques, et que nous ferons connaître par la suite. Il fait observer que cette propriété du quadrilatère est une extension de celle (**155**) qui concerne la division harmonique des diagonales du quadrilatère complet, puisqu'il suffit, pour obtenir cette dernière, de supposer, dans les relations ci-dessus, que la transversale *ae* s'applique sur la troisième diagonale EF du quadrilatère BAEDFCB.

Nous ajouterons qu'on obtiendrait des résultats analogues pour les droites

qui joignent les points E, F au point de croisement G des deux autres diagonales, et qu'on arriverait à des conséquences également dignes de remarque, si l'on supposait que la transversale passât seulement par l'un des points de concours E, F des côtés opposés du quadrilatère ABCD, ou par le point d'intersection G de ses diagonales : le nombre des relations non identiques se réduirait alors à quatre (*), dont l'une quelconque comporterait les trois autres; en sorte qu'une seule d'entre elles ayant lieu entre cinq points rangés sur une droite, les dernières s'ensuivraient nécessairement.

174. M. Brianchon, en faisant connaître les relations générales ci-dessus, remarque qu'elles sont précisément celles qui auraient lieu entre les douze segments formés sur un quadrilatère complet dont les trois diagonales seraient *ef*, *ac*, *bd*, relations qu'on obtient de suite (**) en considérant la direction de l'un quelconque des côtés de ce quadrilatère comme une transversale (145) par rapport au triangle formé par les trois autres. Or cette correspondance découle naturellement du principe de l'article 15; car six points rangés sur une même droite, entre lesquels une seule des relations dont il s'agit aurait lieu, pourraient, par cela même, être considérés comme la projection, sur cette droite, des six sommets qui appartiennent à un quadrilatère complet, en supposant que toutes les lignes de la figure et le centre de projection soient dans un seul et même plan.

On voit par là que ces considérations pourraient être étendues à un nombre quelconque de points rangés, suivant un certain ordre, sur une même droite, et qu'il en résulterait une infinité de relations analogues à celles qui précèdent, lesquelles, comme nous l'avons déjà fait observer (32), seraient autant de propositions dans le genre des lemmes analytiques des anciens.

175. Le principe que nous venons de citer conduit à une autre remarque non moins intéressante, et qui donne, en quelque sorte, l'interprétation des sept relations de l'article 172.

Supposons que l'on considère la droite *ae* comme une transversale par rapport au triangle ACD formé avec trois des sommets du quadrilatère simple ABCD, on aura la relation (145)

$$dA.eC.cD = dD.eA.cC,$$

laquelle devient évidemment, d'après le principe cité et en supposant qu'on

(*) *Voyez* l'article 178, plus loin.

(**) *Géométrie de position*, p. 278 et 279.

la projette du quatrième sommet B du quadrilatère sur la transversale ae,

$$ad.be.cf = ae.bc.df,$$

qui est identique avec la sixième des relations trouvées ci-dessus.

En prenant à son tour chacun des trois derniers sommets du quadrilatère pour centre de projection par rapport au triangle formé par les trois autres, supposé coupé par la transversale ae, on obtiendrait évidemment les trois relations analogues à celles qui précèdent. Quant aux relations qui ont lieu entre huit segments, il est aisé de s'assurer qu'elles sont la projection sur la transversale ae, et par rapport aux points de concours E, F, G des côtés et des diagonales, pris successivement pour centres de projection, de la relation qui existe entre les huit segments formés par cette même transversale sur la direction indéfinie des quatre côtés du quadrilatère.

176. Les sept relations qui viennent de nous occuper se rapportent évidemment à celles qui auraient lieu entre les segments formés, sur une transversale arbitraire, par les directions indéfinies des six distances qui séparent deux à deux quatre points A, B, C, D, pris à volonté sur un même plan : par où l'on voit que, si ces quatre points étaient situés d'une manière quelconque dans l'espace, auquel cas les six distances qui les séparent deux à deux formeraient naturellement un tétraèdre quelconque, les sept relations dont il s'agit devraient également avoir lieu entre les douze segments correspondants formés, sur ces distances ou leurs prolongements, par un plan transversal arbitraire; car cette dernière figure peut être considérée comme ayant pour projection la première, par rapport à un point quelconque du plan transversal pris pour centre de projection. Et, comme d'ailleurs les relations dont il s'agit peuvent s'établir directement, en considérant successivement les quatre faces triangulaires et les trois quadrilatères gauches qui appartiennent au tétraèdre comme coupés par le plan transversal (145, 146), il en résulte, *à priori*, une nouvelle démonstration fort simple de la proposition de l'article 172.

177. Enfin les sept relations qui nous occupent peuvent encore être considérées comme exprimant la propriété d'un quadrilatère plan quelconque ABCD, inscrit aux systèmes de deux droites BD, AC (c'est-à-dire dont les sommets s'appuieraient alternativement sur ces droites), relativement à une transversale ae tracée arbitrairement dans le plan de la figure; or je dis que ces mêmes relations auront lieu aussi, quand on remplacera le système des deux droites AC et BD par une section conique quelconque ABCD (*fig.* 26).

En effet, si l'on met la figure en projection sur un nouveau plan, de façon que cette section conique devienne un cercle, et que les points de concours des côtés opposés du quadrilatère passent à l'infini (109), ce quadrilatère se changera (105) en un rectangle inscrit, coupé, ainsi que le cercle, par la transversale ae, et dans lequel on aura évidemment, d'après la propriété connue des sécantes,

$$\frac{ae.af}{ce.cf}=\frac{aA.aB}{cD.cC}.$$

Mais, à cause des triangles semblables, on aura aussi

$$\frac{aA}{cD}=\frac{ad}{cd},\quad \frac{aB}{cC}=\frac{ab}{cb};$$

donc

$$\frac{ae.af}{ce.cf}=\frac{ab.ad}{cb.cd},$$

relation qui revient évidemment à la première des sept relations de l'article 172, lesquelles par conséquent ont lieu à la fois pour un quadrilatère inscrit à une section conique, coupé par une transversale quelconque.

178. Ce beau principe fait la base du Mémoire, souvent cité, de M. Brianchon : d'après un passage de l'*Essai sur les Coniques* de Pascal (*), il paraîtrait que Desargues avait connu quelques-unes des relations qui le concernent ; ce que confirme également une lettre de Beaugrand, publiée en 1639. Cette lettre, vraiment digne de Zoïle, contient la critique d'un écrit de Desargues, imprimé la même année, et ayant pour titre : *Brouillon projet d'une atteinte aux événements des rencontres du cône avec un plan, etc.* Selon Beaugrand, le tiers de cet écrit était employé à examiner les propriétés qui résultent de l'assemblage de six points rangés sur une même droite, entre lesquels auraient lieu les trois premières relations de l'article 172 ; il ajoute que Desargues nommait cette liaison remarquable: *involution de six points*, laquelle se réduit simplement à une de cinq, quand deux de ces six points (qui sont conjugués ou jouent le même rôle par rapport aux quatre autres) se confondent en un seul, et à une de quatre, quand la même chose arrive pour deux autres points également conjugués, ce qui donne alors lieu à ce que nous avons nommé *relation harmonique*. (ANNOTATIONS de l'*Errata*.)

Supposons, par exemple, que les points e, f (*fig.* 25), qui sont évidemment conjugués, se confondent en un seul g, les relations (172) se rédui-

(*) *Voyez* la note de l'article 148.

ront simplement aux quatre suivantes :

$$\frac{ab.ad}{\overline{ag}^2}=\frac{cb.cd}{\overline{g}^2},\quad \frac{ba.bc}{\overline{bg}^2}=\frac{da.dc}{\overline{dg}^2},$$

$$gc.gd.ab=ga.gb.cd,\quad gb.gc.ad=ga.gd.bc,$$

lesquelles constituent ainsi une involution de cinq points.

La plus grande partie du surplus de l'ouvrage de Desargues aurait été consacrée, d'après ce qu'en dit le même Beaugrand, à établir la proposition suivante, ainsi que ses corollaires : *Un quadrilatère étant inscrit à une section conique quelconque, toute transversale détermine, par ses intersections avec la courbe et les côtés du quadrilatère, six points qui sont en* involution (*).

179. On voit, d'après cela, que l'ouvrage de Desargues, qui ne nous est point parvenu, devait contenir plusieurs des intéressantes propriétés du quadrilatère inscrit qui sont aujourd'hui généralement connues ; et, en effet, le théorème de l'article 177 est un des plus féconds qui existent sur les coniques, comme on peut le voir par l'excellent parti qu'en a su tirer M. Brianchon, dans le Mémoire déjà plusieurs fois cité.

Supposons, par exemple, que l'on connaisse cinq points A, B, C, D et f d'une section conique ; et qu'ayant mené arbitrairement, par le point f, une transversale indéfinie fe qui coupe, en a et c, b et d, les deux couples de côtés respectivement opposés du quadrilatère ABCD, formé au moyen des quatre autres points donnés pris pour sommets, on demande le second point d'intersection e de la transversale et de la courbe.

On construira le nouveau quadrilatère A'B'C'D' dont la diagonale B'D' passe par f, et dont les couples des côtés opposés concourent respectivement, en a et c, b et d, avec les côtés opposés du premier quadrilatère ; la seconde diagonale A'C' ira (172 et 177) rencontrer la transversale au point e demandé ; et ce procédé, comme le remarque M. Brianchon (**), s'appliquera même au cas où, étant situés sur le terrain, les quatre points A, B, C, D seraient inaccessibles, quoique visibles dans les directions AB, BC, CD et DA.

Cette construction ingénieuse donne, comme on voit, le moyen de résondre *linéairement*, c'est-à-dire avec la règle ou des jalons, le problème qui suit : *Par cinq points, donnés à volonté, faire passer une section conique.*

180. Supposons encore qu'ayant rendu fixes les trois points a, b, c de la

(*) On retrouve aussi quelques-unes de ces propriétés du quadrilatère inscrit dans le Vᵉ Livre du *Traité des Sections coniques*, par Robert Simson (2ᵉ édition ; Édimbourg, 1750), mais étendues au cas où la transversale touche ou cesse de rencontrer la courbe.

(**) *Mémoire sur les lignes du second ordre*, § XXX.

transversale ci-dessus, on fasse mouvoir le quadrilatère ABCD, de façon que, demeurant toujours inscrit à la courbe, ses trois premiers côtés passent, dans le même ordre, par les points dont il s'agit ; le quatrième côté CD pivotera évidemment sur un dernier point fixe *d*, situé sur la droite qui renferme les trois autres ; théorème qu'on peut énoncer ainsi :

Si l'on inscrit à une section conique une suite de quadrilatères dont les trois premiers côtés aillent concourir sans cesse, et dans un ordre assigné, en trois points pris à volonté sur la direction d'une même droite, le quatrième côté pivotera également sur un quatrième point fixe, placé sur la droite dont il s'agit.

181. Cette propriété, qui subsiste évidemment quand on remplace la section conique par le système de deux lignes droites quelconques, n'est qu'un cas très-particulier d'une proposition beaucoup plus générale qui sera démontrée par la suite. Il serait d'ailleurs aisé de l'établir directement à l'aide de nos principes ; car, en mettant la figure en projection de façon que la section conique devienne un cercle et que la transversale des points fixes passe à l'infini (**109**), les trois premiers côtés du quadrilatère demeureront sans cesse parallèles à eux-mêmes ; donc il en sera de même aussi du quatrième : c'est-à-dire que ce côté concourra sans cesse en un point de la transversale à l'infini.

182. On pourrait encore déduire, comme l'a montré M. Brianchon, beaucoup d'autres conséquences du théorème de l'article **177** ; en supposant, par exemple, que la transversale touche la courbe, passe par l'un des points de concours des côtés opposés du quadrilatère, ou les renferme tous deux à la fois, et enfin en supposant qu'un ou deux côtés opposés de ce même quadrilatère deviennent infiniment petits ou tangents à la courbe, auquel cas les deux autres côtés se confondent en un seul qui est la corde de contact même des deux premiers. Dans ces divers cas, les relations établies ci-dessus se réduisent à quatre (**178**), ou seulement à une seule, et expriment les propriétés qui lient entre eux les points correspondants de la transversale ; lesquels, d'après Desargues, forment alors des involutions de cinq ou de quatre points.

Je n'entrerai point dans le détail de cette discussion, qui est facile, et des diverses conséquences qui peuvent s'en déduire relativement aux figures inscrites aux sections coniques, mon but n'étant ici que de montrer comment la doctrine des projections peut conduire, d'une manière simple et directe, aux principales relations de la théorie des transversales.

183. C'est d'ailleurs le cas de remarquer la facilité avec laquelle les prin-

cipes de cette théorie conduisent immédiatement aux propriétés de situation des systèmes de lignes droites ; nous en avons présenté, à dessein, plusieurs beaux exemples dans ce qui précède, et il serait aisé de les multiplier davantage, en montrant, avec MM. Carnot, Servois et Brianchon, qu'il n'est aucune des propriétés des points de concours qui ne puisse être considérée comme un corollaire de quelque relation de la Géométrie des transversales ; mais ce n'est pas ainsi que nous nous sommes proposé de parvenir aux propriétés descriptives des figures ; et, de même que nous avons cherché à établir les premières d'une manière pour ainsi dire isolée, de même aussi nous voulons arriver à celles-ci directement et indépendamment de la connaissance des autres. Ce n'est pas qu'au fond, en y réfléchissant bien, on puisse réellement séparer ces deux genres de spéculations, si ce n'est peut-être en admettant, *à priori* et dans toute son étendue, le principe de continuité; toujours est-il, et nous pensons ainsi avec M. Gergonne (*), qu'on doit, le moins qu'il est possible, faire intervenir les unes de ces propriétés dans la démonstration des autres.

184. Et, comme les propriétés générales des systèmes de lignes droites indéfinies ne sont encore, ainsi que nous en avons déjà vu quelques exemples, que des cas particuliers des propriétés beaucoup plus générales appartenant aux sections coniques (**); que ces dernières propriétés sont souvent plus faciles à établir ; que d'ailleurs on peut passer immédiatement de celles-ci aux premières par la seule application de la loi de continuité, il entre dans le plan de cet ouvrage d'exposer d'abord les cas généraux, et d'en déduire ensuite les autres comme simples corollaires ; d'autant plus que, par là, on peut éviter bien des longueurs et des répétitions inutiles. C'est ainsi que nous procéderons désormais, soit dans le Chapitre suivant, soit dans tout le reste de l'ouvrage : souvent même il nous arrivera d'indiquer rapidement les conséquences, sans nous y arrêter; plus souvent encore il nous arrivera, à mesure que nous avancerons, de les négliger tout à fait pour les abandonner à la sagacité du lecteur.

Enfin il serait pareillement inutile de s'arrêter à chaque pas pour examiner ce que deviennent les propriétés des figures générales, quand, leur

(*) *Annales de Mathématiques*, t. VIII, p. 160.

(**) Pour apercevoir comment cette conséquence résulte immédiatement de la loi de continuité, on peut supposer que la courbe, étant d'abord une hyperbole, se soit confondue ensuite avec ses asymptotes, en restant ainsi (43, note) s. et s. p. par rapport à elle-même; il est évident que, dans ce nouvel état, elle aura conservé le même centre, la même direction et le même rapport de diamètres conjugués. Quant aux tangentes, elles passeront toutes alors par le centre devenu le sommet de l'angle des deux droites.

appliquant le principe de continuité, on suppose que certains points, certaines lignes se réunissent ou se confondent, disparaissent entièrement ou s'éloignent à l'infini, et nous nous bornerons là-dessus, comme pour ce qui précède, à donner quelques exemples et à indiquer rapidement les autres.

Après ces explications qui nous paraissaient indispensables, nous pouvons passer aux autres propriétés de la Géométrie de la règle.

CHAPITRE II.

CONTINUATION DU MÊME SUJET. — DES FIGURES INSCRITES ET CIRCONSCRITES AUX SECTIONS CONIQUES. — QUESTIONS QUI S'Y RAPPORTENT. — THÉORIE DES POLES ET POLAIRES RÉCIPROQUES.

185. Un quadrilatère quelconque étant inscrit à une conique, soit tracée la droite qui passe par les deux points de concours des côtés opposés; on pourra regarder la figure comme la projection d'une autre, pour laquelle la droite en question sera passée à l'infini, en même temps que la section conique sera devenue un cercle (109); le quadrilatère inscrit à cette section conique sera lui-même converti en un quadrilatère inscrit au cercle, et ayant les côtés opposés parallèles (105), c'est-à-dire que ce sera un rectangle.

Soit donc ABCD (*fig.* 27) le rectangle dont il s'agit; toutes les propriétés projectives qui lui appartiendront, ainsi qu'au cercle correspondant, seront aussi des propriétés de la figure primitive.

Cela posé, par chacun des sommets A, B, C, D menons une tangente au cercle pour former le parallélogramme circonscrit *abcd*, dont les côtés opposés vont par conséquent concourir à l'infini; traçons les diagonales AC et BD, *ac* et *bd*: elles passeront par le centre P, et, de plus, les deux dernières seront parallèles aux côtés du quadrilatère ABCD, ou concourront avec eux à l'infini. Menons enfin des tangentes aux points E et G, F et H où ces mêmes diagonales coupent la circonférence : elles seront, deux à deux, parallèles entre elles et aux côtés du rectangle inscrit, et iront par conséquent concourir avec eux en deux points à l'infini; de plus, toutes les droites, partant du centre P et terminées à la circonférence ou aux côtés opposés des deux quadrilatères ABCD, *abcd*, sont divisées en parties égales en ce point, et peuvent être regardées comme coupées harmoniquement par ce même point et par celui qui est à l'infini; etc., etc.

Si l'on se reporte maintenant à la figure primitive, les droites parallèles entre elles seront devenues concourantes en des points de la droite (106) qui représente celle à l'infini ; le centre P sera devenu (117) le pôle de cette droite, et tout le reste sera le même de part et d'autre; donc on a ce théorème :

186. *Si on inscrit à une section conique un quadrilatère quelconque* ABCD (*fig.* 28), *et qu'on lui en circonscrive un autre abcd, dont les côtés touchent la courbe aux sommets du premier :*

1° *Les quatre diagonales de ces deux quadrilatères se croiseront en un même point* P.

2° *Les points de concours* L *et* M, l *et m, des côtés opposés du quadrilatère inscrit et du quadrilatère circonscrit, seront tous quatre rangés sur une même droite polaire de* P.

3° *Les diagonales du quadrilatère circonscrit iront concourir respectivement aux points* L *et* M *où se coupent, deux à deux, les côtés opposés du quadrilatère inscrit.*

4° *Chacun de ces derniers points est le pôle de la droite, ou diagonale, qui passe par l'autre et par le point* P; *ou, ce qui revient au même, c'est le point de concours des tangentes qui correspondent à cette diagonale.*

5° *Toute ligne droite, passant par le point* P *et terminée à la section conique ou à deux côtés opposés de l'un des quadrilatères, est divisée harmoniquement en ce même point et en celui où la droite rencontre sa polaire* LM; *et pareille chose a lieu à l'égard des points* L, M *par rapport aux droites* PM *et* PL *dont ils sont les pôles.*

La *fig.* 27, étant symétrique, donne une infinité d'autres relations et d'autres alignements, et chacun d'eux fournit un théorème : ainsi, par exemple, en appelant F′ et H′ les points où la diagonale *bd* rencontre les côtés opposés AD et BC du quadrilatère inscrit, on a (20 et 28) les relations projectives suivantes :

$$\frac{\mathrm{PF.PF'}}{\mathrm{FF'}} = \frac{\mathrm{PH.PH'}}{\mathrm{HH'}}, \quad \frac{\mathrm{MF.MF'}}{\mathrm{FF'}} = \frac{\mathrm{MH.MH'}}{\mathrm{HH'}},$$

$$\frac{b\mathrm{F}.b\mathrm{H}}{\overline{b\mathrm{M}}^2} = \frac{d\mathrm{F}.d\mathrm{H}}{\overline{d\mathrm{M}}^2}, \quad \frac{\mathrm{F}b.\mathrm{F}d}{\overline{\mathrm{FM}}^2} = \frac{\mathrm{H}b.\mathrm{H}d}{\overline{\mathrm{HM}}^2},$$

$$\mathrm{M}b.\mathrm{MF.H}d = \mathrm{M}d.\mathrm{MH.F}b;$$

$$\frac{a\mathrm{B}.d\mathrm{D}}{b\mathrm{B}.c\mathrm{D}} = \frac{am.dm}{bm.cm}, \quad \frac{al.bl}{dl.cl} = \frac{a\mathrm{A}.b\mathrm{C}}{d\mathrm{A}.c\mathrm{C}},$$

$$\frac{\overline{\mathrm{PD}}^2}{\overline{\mathrm{BP}}^2}\cdot\frac{a\mathrm{B}.b\mathrm{B}}{c\mathrm{D}.d\mathrm{D}} = \frac{am.bm}{cm.dm}; \quad \frac{al.dl}{bl.cl} = \frac{a\mathrm{A}.d\mathrm{A}}{b\mathrm{C}.c\mathrm{C}}\cdot\frac{\overline{\mathrm{PC}}^2}{\overline{\mathrm{PA}}^2}, \text{ etc., etc.}$$

On remarquera que les quatre dernières relations expriment des propriétés du quadrilatère complet circonscrit *lbmcdal*, et que les trois précédentes appartiennent aux cinq points qui résultent, en général, de la courbe, d'un angle quelconque *bad* circonscrit à cette courbe et de la corde de contact AB de cet angle, quand on les coupe par une même transversale arbitraire *bd* (182). On voit d'ailleurs qu'on obtiendrait des relations analogues pour les autres diagonales *ac*, *lm* du quadrilatère complet circonscrit : la facilité avec laquelle on peut reconnaitre toutes ces propriétés nous dispense d'entrer dans de plus grands développements (*).

187. Quand la courbe est décrite, la *fig.* 28 indique des moyens fort simples de trouver le pôle par la polaire, et réciproquement, le tout en n'employant que la règle seulement : elle donne donc aussi un moyen, purement linéaire, de mener, d'un point extérieur à une section conique, deux tangentes à la courbe; car les points de contact se trouvent évidemment à l'intersection de cette courbe et de la polaire du point donné.

Par exemple, voulant mener du point M deux tangentes ME, MG à la courbe, on n'aura qu'à tracer les sécantes arbitraires MBA, MCD par ce point; joignant ensuite, par de nouvelles droites, les points d'intersection A, B, C, D ainsi obtenus, elles iront se croiser aux points P et L appartenant à la corde de contact ou polaire EG du point M (**).

188. On voit pareillement que, si l'on se donnait soit quatre points A, B, C, D d'une section conique et la tangente en l'un de ces points, soit quatre tangentes *ab*, *bc*, *cd*, *ad* et le point de contact de l'une d'elles, on obtiendrait de suite, par des constructions purement linéaires, les tangentes qui appartiennent aux trois autres points, ou les points de contact qui appartiennent aux trois autres tangentes.

189. En général, si l'un des quadrilatères ABCD, *abcd* est donné, on connaitra les trois points L, M, P qui lui sont communs avec l'autre, et l'on

(*) Les 4e et 5e des propriétés énoncées en tête de cet article ont été données par de Lahire, dans les deux premiers livres de ses *Traités des sections coniques*, imprimés à Paris en 1673 et 1685; les trois autres appartiennent à Mac-Laurin (*voyez* l'ouvrage déjà cité, art. 161, note) : elles ont été reproduites ensuite par R. Simson, Müller, etc. Ces différents géomètres n'ont probablement fait que répéter ce qu'avait déjà exposé le célèbre Pascal, dans le IIIe Livre de son *Traité* inédit *sur les sections coniques*. D'après les Propositions 154, 155, 156, 159, 161 du VIIe Livre des *Collections Mathématiques*, qui n'étaient que des lemmes pour les *Porismes* d'Euclide, il paraîtrait que les anciens ont aussi connu quelques-unes de ces propriétés.

(**) Cette construction se trouve indiquée dans le Mémoire de M. Brianchon, déjà cité plus haut, art. 162, note.

pourra s'en servir pour déterminer linéairement, ou avec la règle, toutes les parties de la figure qui en dépendent directement.

Qu'on se donne, par exemple, le quadrilatère circonscrit *abcd* et un point quelconque de la direction de l'un des côtés du quadrilatère inscrit, ce dernier sera entièrement déterminé de position, comme ci-dessus (188), aussi bien que les quatre points de contact du premier : il en arriverait de même évidemment si l'on se donnait le quadrilatère inscrit ABCD avec une droite quelconque renfermant l'un des sommets du quadrilatère circonscrit, car ce dernier serait entièrement déterminé de situation.

190. Supposons encore que l'on connaisse, soit le quadrilatère circonscrit *abcd* et un point H de la courbe, situé sur l'une *bd* de ses diagonales, soit le quadrilatère inscrit ABCD et la direction d'une tangente HL passant par l'un L des points de concours des côtés opposés de ce quadrilatère ; on voit, par la figure, que la tangente au point donné H, ou le point de contact de la tangente donnée HL, seront immédiatement connus. On aura donc cinq tangentes de la courbe et le point de contact de l'une d'elles dans le premier cas, et cinq points de la courbe et la tangente en l'un d'eux dans le second : au moyen de quoi, et de ce qui précède (188), on obtiendra de suite, toujours par des constructions linéaires, soit les points de contact des autres tangentes, soit les tangentes des autres points.

Enfin, si l'on se donnait généralement cinq points ou cinq tangentes quelconques de la courbe, on déterminerait encore sans peine et linéairement, au moyen des propriétés 2e et 3e de l'article 186, soit les tangentes aux points donnés, soit les points de contact des tangentes pareillement données (*) ; mais nous exposerons bientôt des moyens plus directs et plus simples pour résoudre ces dernières questions.

191. Dans les diverses circonstances particulières qui viennent de nous occuper, auxquelles il faut joindre celles de l'article 161, on pourra construire la courbe, qui est unique, par points, sans employer d'autre instrument que la règle ou de simples alignements.

Supposons, en effet, que l'on connaisse les deux tangentes *m*B, *m*D, se

(*) Ces constructions, aussi bien que celles de l'article 188, ont été données par Mac-Laurin dans l'*Appendice* placé à la fin de son *Traite d'Algèbre posthume*, §§ 38, 39, 40 et 41. Celles des articles 189 et 190 l'ont été par M. Brianchon, partie dans son *Mémoire sur les lignes du second ordre*, partie dans un article imprimé, p. 383 du tome II de la *Correspondance Polytechnique*, lequel renferme, en outre, la discussion des divers autres cas où la section conique peut se construire par points au moyen de la règle seule. Nous reviendrons plus loin sur quelques-uns d'entre eux.

rencontrant en *m*, les points de contact B, D de ces tangentes et un troisième point quelconque C de la courbe; la *fig.* 28 indique un moyen très-simple et purement linéaire d'en trouver à volonté un quatrième A, et par suite la tangente qui lui correspond : tout consiste évidemment à construire un triangle quelconque AML dont les côtés passent par les trois points connus B, D, *m*, et dont les sommets M, L s'appuient sur les droites données CB et CD.

Si, au lieu du point C de la courbe, on se donnait une troisième tangente quelconque *bc*, la figure montre qu'on en obtiendrait également une infinité d'autres *ad* et les points de contact correspondants A, en construisant une suite de triangles *a*P*d* dont les sommets s'appuient sur les deux premières tangentes données et sur la corde de contact BD qui leur appartient, et dont les côtés *a*P, *d*P, adjacents au sommet P situé sur cette corde, passent respectivement par les points d'intersection *c* et *b* de la troisième tangente donnée *bc* avec les deux premières *m*B et *m*D; car les derniers côtés *ad* des triangles ainsi construits seront évidemment les tangentes demandées (186).

Ces diverses constructions ne sont d'ailleurs que des cas particuliers de celles qui seront exposées un peu plus loin (203 et 209).

192. La relation qu'ont entre eux, et avec les quadrilatères inscrits et circonscrits, les trois points L, M, P et les droites qui les contiennent deux à deux est, comme nous l'avons vu, très-remarquable, et peut s'exprimer ainsi :

1° *Dans tout quadrilatère inscrit à une conique, les points de concours des diagonales et des côtés respectivement opposés sont trois points, tels que l'un quelconque d'entre eux est le pôle de la droite qui renferme les deux autres.*

2° *Dans tout quadrilatère complet, circonscrit à une conique, chacune des trois diagonales est la polaire du point d'intersection des deux autres.*

Il résulte d'ailleurs directement de ce qui précède (186) que :

« 1° Quand trois points P, L, M, situés sur le plan d'une section conique,
» sont tels, que l'un quelconque d'entre eux est le pôle de la droite qui con-
» tient les deux autres, tous les triangles ABC, BDC, etc., inscrits à la
» courbe de façon que les deux premiers côtés de ces triangles passent res-
» pectivement par deux des points donnés, ont naturellement leur dernier
» côté dirigé vers le troisième; de plus, chaque côté se trouve divisé *harmo-*
» *niquement* par le point correspondant et par la droite qui renferme les
» deux autres.

» 2° Dans les mêmes circonstances, il existe également une infinité de
» triangles *adm*, *abl*, etc., circonscrits à cette même courbe, dont les som-
» mets s'appuient respectivement sur les droites ML, MP, PL qui joignent,
» deux à deux, les points en question, et chacun des côtés du trian-
» gle LMP formé par ces droites est divisé *harmoniquement* par le som-
» met correspondant du triangle circonscrit et par le côté opposé à ce
» sommet (*). »

193. Ces propriétés des triangles inscrits et circonscrits s'appliquant, d'une manière analogue, aux quadrilatères inscrits dont les côtés opposés et les diagonales concourent aux trois points L, M, P, et aux quadrilatères complets circonscrits dont les sommets opposés s'appuient respectivement sur les droites qui joignent deux à deux ces trois points, il en résulte que, quand les droites et les points dont il s'agit seront connus, on pourra construire linéairement (155), et d'une manière très-simple, soit le quadrilatère inscrit quand un des sommets sera donné, soit le quadrilatère circonscrit quand un des côtés sera pareillement donné : or cette circonstance arrivera (192) toutes les fois qu'on aura, soit un autre quadrilatère inscrit, ou quatre points de la courbe, soit un autre quadrilatère circonscrit, ou quatre tangentes de cette même courbe.

Si donc on se donne, en outre, soit un nouveau point, soit une nouvelle tangente, on obtiendra immédiatement trois autres points ou trois autres tangentes de la courbe, laquelle ne pourra néanmoins se construire tout entière par ce procédé, qu'autant qu'on se serait donné à la fois cinq points ou cinq tangentes; car, si l'on avait au contraire quatre tangentes et un point, ou quatre points et une tangente, on obtiendrait bien trois nouveaux points ou trois nouvelles tangentes, ce qui ferait en tout quatre points et quatre tangentes, mais il serait impossible évidemment d'en obtenir d'autres de la même manière (**).

194. Les propositions de l'article 186 donnent encore lieu aux énoncés qui suivent :

Si l'on inscrit, à une section conique, une suite de cordes AB, A′B′, A″B″,...,

(*) Ces diverses propriétés ont été indiquées par M. Brianchon, aux §§ 20, 21, 22 et 23 du *Mémoire sur les lignes du second ordre;* elles sont (182) des corollaires fort simples du théorème (177) sur le quadrilatère inscrit, coupé par une transversale quelconque.

(**) Cette construction, pour le cas de quatre tangentes et un point, revient à celle du § 23 du Mémoire souvent cité de M. Brianchon. *Voyez* aussi le § 43 de l'Appendice de l'*Algèbre* de Mac-Laurin.

(*fig.* 29), *toutes dirigées vers un même point* P *choisi à volonté sur le plan de la courbe, il arrivera que :*

1° *Tous les points* C, C′,..., *qui sont, par rapport à ces cordes, les quatrièmes harmoniques conjugués du point* P, *seront situés sur une seule et même ligne droite, polaire ou corde de contact de* P (*).

2° *Tous les points de croisement* L *et* M, L′ *et* M′,..., *des nouvelles cordes qui joignent, deux à deux, les extrémités appartenant aux différents couples des premières, seront encore situés sur la polaire dont il s'agit.*

3° *Il en est de même de tous les points de concours* T, T′,..., *des paires de tangentes menées aux extrémités de chaque corde* AB, A′B′,....

4° *Réciproquement, si, des différents points* T, T′,..., *d'une droite prise arbitrairement sur le plan d'une section conique, on mène des paires de tangentes à cette courbe, les cordes de contact* AB, A′B′,..., *qui leur correspondent respectivement, iront toutes concourir en un point unique* P, *pôle de la droite dont il s'agit.*

195. Ces deux dernières propriétés peuvent s'énoncer ainsi, d'une manière beaucoup plus générale et plus simple, en remarquant que les points T, T′,..., sont les pôles des cordes de contact AB, A′B′,..., qui leur correspondent :

Si une ligne droite, mobile sur le plan d'une section conique, est assujettie, dans toutes ses positions, à pivoter autour d'un point fixe quelconque, le pôle de cette droite parcourra successivement tous les points de la polaire du point fixe dont il s'agit.

Si un certain point mobile est assujetti à demeurer sur une ligne droite quelconque, tracée dans le plan d'une section conique, la polaire de ce point pivotera constamment autour d'un point fixe, pôle de la droite dont il s'agit.

196. Toutes ces propriétés pourraient s'établir directement, de la même manière que celles de l'article 186 d'où elles dérivent : ce sont elles qui ont fait donner au point P le nom de *pôle* de la droite TT′, et à cette droite le nom de *polaire* du point P (**) ; leur ensemble constitue ce qu'on appelle la

(*) C'est la XXXVIIe Proposition du Livre III des *Coniques d'Apollonius*. De Lahire y a joint les trois suivantes, dans les deux premiers Livres de son *Traité* in-folio *des sections coniques*.

(**) Peut-être serait-il plus convenable d'appeler le point P le *conjugué harmonique* de la droite TT′, et cette droite la *conjuguée harmonique* du point P; en réservant, comme on le fait d'ordinaire, les expressions beaucoup plus générales de *pôle* et *polaire* pour le cas où l'on aurait à considérer des systèmes de droites mobiles autour de points donnés ou fixes. Le *conjugué harmonique* d'un point situé sur le plan d'une section conique étant d'ailleurs celui qui divise harmoniquement.

théorie des pôles, laquelle est presque tout entière renfermée dans la proposition suivante :

Si un certain point est situé sur une ligne droite tracée dans le plan d'une section conique, sa polaire passera par le pôle de cette même droite.

197. On peut remarquer, au surplus, que les propriétés 1[re] et 2[e] ci-dessus (194) s'appliquent (184, note) au cas particulier où la section conique dégénère en deux lignes droites MA, MB (*fig.* 30), ou est remplacée par le système de ces droites; la droite ML, qu'on peut continuer à appeler la polaire du point P, concourt alors avec les deux droites MA, MB au point M; elle est, par rapport à ces droites, la *conjuguée harmonique* (24) de celle qui passe par le point M et par le point P. Ces propriétés font partie de celles du faisceau harmonique, et peuvent se déduire immédiatement des principes de l'article 154; elles fournissent une solution bien simple et bien connue (*) du problème suivant :

Par un point donné L *tirer une droite* LL' *au point de concours de deux lignes droites* AA", BB", *dont les directions sont données, en ne faisant usage que de la règle ou de simples jalons.*

Cette solution s'applique, comme on voit, au cas où le point de rencontre M est inaccessible, et par conséquent à celui où les droites données sont parallèles. Elle conduit immédiatement à celle de cet autre problème, non moins intéressant, et qui nous sera utile par la suite :

198. *Par un point* L (*fig.* 31), *donné à volonté sur le plan d'un parallélogramme* ABCD, *mener, avec la règle, une parallèle à la droite* EF *située également dans ce plan.*

Soient E et F les points où la droite donnée rencontre les côtés adjacents à l'angle A du parallélogramme; par ces points et par un point quelconque K de la diagonale appartenant au même angle, menons les droites EK, FK; elles rencontreront les côtés respectivement opposés à ceux d'où elles proviennent aux nouveaux points G, H, et la droite GH sera parallèle à la droite donnée EF; car le triangle AEF sera évidemment semblable au triangle CGH et semblablement placé. Le problème se trouvera donc ainsi ramené à celui qui précède, et s'exécutera, comme lui, en ne faisant usage que de la règle.

La figure ABCD pourrait être un quadrilatère quelconque, dont la troi-

---

avec le premier, une corde quelconque de la courbe, il en résulterait que « tous les conjugués harmoniques d'un point donné sont sur la conjuguée harmonique de ce point. »

(*) *Perspective* de Lambert, 2[e] partie, p. 172 (Zurich, 1774). *Voyez* aussi un article de M. Hachette, imprimé p. 305 du tome I de la *Correspondance Polytechnique*.

sième diagonale représenterait celle à l'infini du parallélogramme; et, en la supposant toujours inaccessible comme auparavant, les constructions qui précèdent donneraient, comme on voit, des moyens fort simples pour trouver autant de points que l'on voudrait du prolongement de cette droite, de même qu'elles donnent aussi autant de systèmes de parallèles qu'on le désire au moyen des deux premières (*).

Au surplus, quand on a, sur le plan d'une figure, une droite quelconque et le point milieu de cette droite, on peut immédiatement mener des parallèles à cette droite, passant par des points donnés, au moyen de la propriété (155) du quadrilatère complet; tout consiste à observer que le conjugué harmonique du point milieu de la droite est situé (27) entièrement à l'infini. Si donc on se donnait deux distances semblables et leurs points milieux, on aurait tout ce qu'il faut pour déterminer deux systèmes quelconques de parallèles ou un parallélogramme, et par conséquent on aurait en sa possession deux points de la droite à l'infini du plan de la figure; au moyen desquels, et de ce qui précède, on en obtiendrait ensuite autant d'autres qu'on voudrait : on pourrait donc aussi déterminer des quatrièmes proportionnelles à des lignes données, diviser des lignes en un nombre quelconque de parties égales, etc. (**).

199. Lambert, qui a donné, à la fin de la seconde partie de son *Traité de perspective* (**197**, note), des réflexions très-judicieuses sur le même sujet, observe, en outre, que la conjuguée harmonique d'une droite, qui divise en deux parties égales l'angle formé par deux autres, est perpendiculaire à cette droite et divise en deux parties égales le supplément de cet angle (**25**); de sorte que, trois quelconques des quatre droites dont il s'agit étant données, la dernière s'ensuit nécessairement (**155**) par une construction purement linéaire. Mais la solution de Lambert est fautive pour le cas où l'un des côtés de l'angle est à déterminer.

Le même auteur donne, à l'endroit cité (p. 169, art. III), une solution très-directe du problème ci-dessus (**198**), lequel a aussi été résolu, d'une autre manière, par S'Gravesende (***), de même que quelques-unes des questions qui précèdent. La solution de Lambert est surtout remarquable en ce qu'elle s'obtient très-simplement au moyen des considérations de la perspec-

(*) *Voyez* plusieurs solutions élégantes de ce problème, p. 38 de l'ouvrage de M. Servois, déjà cité (167, note).

(**) Même ouvrage, p. 47.

(***) *Œuvres philosophiques*; Amsterdam, 1774; 1re partie, *Perspective*, p. 174, § 312.

tive. Elle est exprimée *fig.* 32, où EF, ABCD et L sont toujours la droite, le parallélogramme et le point donnés : tout consiste, comme on voit, à former un nouveau quadrilatère A′B′C′D′, qui ait le point donné L pour concours de deux côtés opposés, et dont les points de rencontre des côtés et de la diagonale A′C′, avec la droite donnée EF, soient les mêmes que ceux des côtés et de la diagonale qui leur correspondent, dans le parallélogramme ABCD, et portent les mêmes lettres différemment accentuées; car le second point de concours M des côtés opposés du quadrilatère A′B′C′D′ devra se trouver sur la parallèle LM demandée.

En effet, d'après la construction, le quadrilatère A′B′C′D′ peut être considéré comme la perspective ou projection du parallélogramme ABCD sur un autre plan, dont EF représente la trace avec le plan ABCD, et qui aurait été rabattu ensuite sur ce dernier. Or, dans cette projection, LM représente la droite qui renferme les points de concours des côtés respectivement opposés du parallélogramme; elle doit donc concourir à l'infini, avec elle, sur la droite EF, c'est-à-dire qu'elle doit être parallèle à EF.

200. On voit, d'après cela, que les figures qui viennent d'être considérées rentrent dans la définition que nous avons donnée de la projection ou perspective dans un plan (**14**); il est visible, en effet, que, si l'on joint par des droites les sommets homologues des quadrilatères ABCD, A′B′C′D′, ces droites iront concourir (**168**) en un même point S, qui est ainsi leur centre commun de projection; mais nous avons déjà promis de revenir, par la suite, d'une manière générale sur les propriétés de cette espèce de projection.

On remarquera également que les constructions précédentes ont la plus grande analogie avec celles ci-dessus (**179**) relatives au quadrilatère inscrit à une section conique; et, en effet, elles sont une suite évidente de la propriété (**172**) du quadrilatère inscrit à deux droites, c'est-à-dire du quadrilatère avec deux diagonales, coupé par une transversale arbitraire, qui, dans le cas actuel, est représentée par EF.

201. Revenons maintenant aux sections coniques, et soit ABCDEF (*fig.* 33) un hexagone quelconque inscrit à une telle courbe; prolongeons, deux à deux, les côtés opposés AB et DE, BC et EF, CD et AF jusqu'à leurs rencontres respectives en L, K, I; concevons qu'on mette (**109**) la figure en projection sur un nouveau plan, de façon que la droite qui renferme les deux premiers points L, K passe à l'infini, et que la section conique devienne en même temps un cercle; les côtés opposés AB et DE, de concourants qu'ils étaient, deviendront parallèles, et il en sera de même des côtés BC et EF.

Or cela ne peut avoir lieu pour un hexagone quelconque (convexe ou non convexe) inscrit au cercle, à moins que les deux derniers côtés CD et AF, qui sont opposés, ne soient également parallèles (*); car l'angle en B étant égal à l'angle en E, puisqu'ils ont, par hypothèse, les côtés parallèles, l'arc ABC sera nécessairement égal aussi à l'arc DEF. Donc (106) les points de concours I, K, L de la première figure sont tous trois rangés sur une même ligne droite, c'est-à-dire que :

Dans tout hexagone inscrit à une conique, les points de concours des côtés respectivement opposés sont tous trois situés sur une même droite.

202. Cette propriété, qui subsiste quelle que soit la position respective des six sommets A, B, C, D, E, F de l'hexagone sur la courbe, et qui s'applique (170) comme cas particulier au système de deux lignes droites quelconques AE, BD (*fig.* 24) tracées dans un même plan, est une des plus fécondes qui existent sur les sections coniques : elle a été énoncée, pour la première fois, par Pascal, dans son *Essai sur les Coniques* (148, note). Au rapport du célèbre Leibnitz (**), cette propriété n'est autre que celle de l'*hexagrammum mysticum*, sur laquelle Pascal composa ensuite un traité complet des sections coniques, qui ne nous est pas parvenu. Depuis lors, elle a été reproduite sous différentes formes par un grand nombre de géomètres, notamment par Mac-Laurin, R. Simson, etc., et en dernier lieu par l'auteur de la *Géométrie de position*. M. Brianchon, à qui l'on doit ces remarques historiques, a établi, sur le principe de Pascal, toute la théorie des pôles et polaires des sections coniques et des surfaces du second ordre (XIIIe Cahier du *Journal de l'École Polytechnique*).

203. Lorsque cinq points A, B, C, D, E d'une section conique sont donnés sur un plan, les *fig.* 33 et 34 indiquent un moyen fort simple d'en trouver à volonté un sixième F, et successivement autant d'autres qu'on voudra, en ne faisant usage que de la règle; mais, comme on peut varier cette construction de la courbe par points d'autant de manières différentes que l'on peut former d'hexagones distincts dont les cinq premiers sommets soient les points donnés, il est bon de remarquer qu'on n'obtiendra jamais qu'une seule et même courbe; car tous les hexagones dis-

(*) M. Gergonne a donné, de la propriété de l'hexagone inscrit et de celle de l'hexagone circonscrit qui sera exposée un peu plus loin (208), une démonstration fondée sur des principes de projection analogues à ceux qui viennent d'être mis en usage (*Annales de Mathématiques*, t. IV, p. 78).

(**) *Voyez* une lettre de Leibnitz à M. Perrier, imprimé dans le tome V des *Œuvres* de Pascal.

tincts, formés au moyen des six mêmes points pris à volonté sur une section conique, étant corrélatifs entre eux (171), jouissent également de la propriété d'avoir les points de concours des côtés opposés placés en ligne droite; ainsi :

Par cinq points, donnés à volonté sur un plan, on ne peut faire passer qu'une seule section conique.

204. Les figures qui nous occupent montrent encore comment on peut trouver, toujours avec la règle, le second point d'intersection F d'une droite quelconque AF passant par l'un A des cinq premiers qu'on suppose donnés. Enfin l'on en déduit sur-le-champ le corollaire suivant dû, ainsi que ce qui précède, à Mac-Laurin (*) :

Si les côtés d'un triangle mobile FIK, *situé sur le plan de deux droites* ICD, KCB, *sont assujettis à pivoter autour des trois points fixes* A, E, L, *comme* pôles (196, note), *et qu'en même temps les deux premiers sommets* I, K *soient astreints à parcourir les droites données* DCI, BCK, *comme* directrices, *le troisième sommet* F *parcourra, par suite du même mouvement, une section conique.*

205. La discussion directe apprend, en effet, que la ligne du second ordre, ainsi décrite, passera par les cinq points connus A, B, C, D, E. Elle se réduirait, selon la remarque de Mac-Laurin, à une du premier, si trois quelconques de ces cinq points se trouvaient en ligne droite, ce qui arrive dans deux cas distincts :

1° *Lorsque les trois pôles* A, E, L *sont disposés en ligne droite, la ligne des points* F *passe alors évidemment par le sommet* C *de l'angle des directrices.* (C'est aussi le corollaire (**) de la propriété de l'article 168.)

2° *Lorsque la droite qui renferme les pôles ou points fixes* A, E, *renferme en même temps* (*fig.* 24) *le sommet* C *de l'angle des deux directrices.* (C'est aussi le corollaire de la propriété (170) de l'hexagone inscrit à deux droites, due aux anciens.)

206. Supposons que, dans l'hexagone ABCDEF (*fig.* 33 et 34), inscrit à

(*) *Voyez*, dans les *Transactions philosophiques* de la Société Royale de Londres, pour 1735, la dispute qui s'est élevée, au sujet de ce théorème et de plusieurs autres, entre Braikenridge et Mac-Laurin.

(**) D'après la Préface du VIIe livre des *Collections Mathématiques* de Pappus, ce même corollaire faisait partie des *Porismes* d'Euclide.

Il a été démontré ensuite par R. Simson, dans un Mémoire sur les *Porismes*, et étendu à un nombre quelconque de pôles et directrices, comme l'indique Pappus à l'endroit cité; nous reviendrons sur ce sujet intéressant dans la quatrième Section.

une section conique, l'un des côtés EF devienne infiniment petit, ou que sa direction soit tangente à la courbe, la propriété de l'hexagone subsistera toujours (*) : étant donc donnés cinq points A, B, C, D, E (*fig.* 35) d'une section conique, on peut, en l'un d'eux E, mener une tangente KF à la courbe, en ne faisant usage que de la règle.

207. La même construction sert aussi à donner, à volonté, un cinquième point A de la courbe, quand on en connait quatre autres B, C, D, E et la tangente KF en l'un d'eux E; au moyen de quoi il devient facile de décrire la courbe tout entière par points (**), par un procédé analogue à celui qui précède (**204**) : les articles **188** et **191** offrent une autre solution de ce même problème.

Enfin la propriété de l'hexagone inscrit s'appliquerait encore, suivant la remarque de M. Carnot (*Géométrie de position*, p. 455 et 456), au cas où l'on supposerait que deux ou trois côtés non contigus devinssent à la fois infiniment petits ou tangents à la courbe, ce qui ferait retomber sur quelques-unes des propriétés et des constructions exposées ci-dessus relativement au quadrilatère et au triangle inscrits aux sections coniques, et conduirait de suite à toutes celles de la théorie des pôles et polaires.

208. Revenons à l'hexagone inscrit ABCDEF (*fig.* 33), et supposons qu'on circonscrive à la courbe le nouvel hexagone *abcdef* dont les points de contact sont les sommets du premier; d'après la construction, les sommets opposés *a* et *d* de l'hexagone circonscrit ont pour polaires deux côtés opposés AF et CD de l'hexagone inscrit; donc la diagonale *ad* est la polaire du point d'intersection I de ces côtés (**196**), donc elle renferme le pôle P de la droite ILK qui appartient aux points de concours des côtés opposés de l'hexagone inscrit, et par conséquent le point P est à la fois le croisement des trois diagonales qui joignent les sommets opposés de l'hexagone circonscrit. C'est, au reste, ce qu'on aurait pu démontrer, d'une manière directe, sur la projection circulaire de la courbe (**201**); car, puisque les côtés opposés AF

(*) R. Simson est, je crois, le premier qui ait fait cette remarque d'une manière ostensible : (*voyez* la Proposition 48 du Ve livre de son *Traité des Sections coniques*, 2e édition); cependant il a recours ensuite à la propriété des quadrilatères inscrit et circonscrit, comme le fait lui-même Mac-Laurin (**190**, note), pour mener la tangente en l'un des cinq points donnés d'une conique, et c'est à M. Brianchon qu'on doit le moyen de solution qui suit (*Correspondance Polytechnique*, t. I, p. 310).

(**) Cette construction et celle de l'article **191** ont été déduites comme corollaires particuliers de la Proposition ci-dessus (**204**), par Braikenridge, dans l'ouvrage intitulé : *Exercitatio geometrica de descriptione linearum curvarum*.

et CD de l'hexagone inscrit sont parallèles dans cette projection, les sommets *a* et *d* de l'hexagone circonscrit appartiennent à un diamètre du cercle, et, comme la même chose arrive pour deux autres sommets opposés quelconques, les diagonales qui joignent deux à deux ces sommets passent toutes par le centre P du cercle. Donc enfin :

Dans tout hexagone circonscrit à une section conique, les diagonales qui joignent deux à deux les sommets respectivement opposés se croisent toutes trois en un même point.

209. Ce principe, non moins élégant et non moins fécond que celui de Pascal, et qui subsiste également quelle que soit la position respective des côtés de l'hexagone autour de la courbe, appartient à M. Brianchon, qui l'a démontré dans le XIIIe Cahier du *Journal de l'École Polytechnique :* voici les principales conséquences qu'il en a déduites tant dans l'endroit cité qu'à la page 387 du IIe volume de la *Correspondance* sur la même École.

Supposons qu'on ait cinq tangentes quelconques d'une section conique, la *fig.* 33 ou 36 indique un moyen très-simple d'en déterminer à volonté, et avec la règle seulement, une sixième et successivement autant d'autres qu'on voudra. Tout consiste évidemment à faire un hexagone quelconque *abcdef* dont la direction des cinq premiers côtés soit celle des tangentes données, et dont les trois diagonales des sommets opposés se croisent en un même point P, car le dernier côté sera la tangente demandée.

On peut d'ailleurs remarquer que la courbe ainsi construite est nécessairement unique, et la raison en est (**203**) que la proposition de l'article **208** s'applique à la fois à tous les hexagones distincts formés par six lignes droites tangentes à une même section conique. Donc :

Il n'existe qu'une seule section conique qui soit tangente à cinq lignes droites données, à volonté, sur un plan.

210. On déduit encore de ce qui précède ce théorème :

Si les sommets d'un triangle aPf *sont assujettis à parcourir respectivement trois droites fixes* be, bg, eg, *tandis que les deux premiers côtés* aP, Pf, *ou leurs prolongements, pivotent autour de deux points invariables* c *et* d, *comme pôles, le troisième côté* af *roulera, dans toutes ses positions, autour d'une même section conique.*

211. La courbe ainsi construite touche évidemment les droites connues *bg*, *eg*, *cd*, *bc*, *de*, et se réduit à un point, quand trois de ces droites, ou tangentes, concourent elles-mêmes en un seul point, ce qui présente les deux cas suivants :

1° *Lorsque les trois droites fixes, ou directrices, se croisent toutes en un même point.*

2° *Lorsque la droite* cd, *qui joint les deux points fixes, ou pôles, passe par le point de concours des deux directrices* bg *et* eg *qui comprennent tous les derniers côtés* af *du triangle mobile.*

Ces propositions sont les réciproques de celles de l'article **205**, et par conséquent des corollaires des théorèmes **168** et **170**.

212. Supposons encore que, dans l'hexagone circonscrit *abcdef* (*fig.* 36 et 33), deux des côtés *af* et *fe*, ou leurs points de contact E, F, viennent à se réunir en un seul E (*fig.* 37), le sommet *f* coïncidera aussi avec E, et la figure se réduira au pentagone circonscrit *abcde*. Donc :

Dans un pentagone quelconque abcde *circonscrit à une conique, deux diagonales* ad *et* be, *qui ne partent pas d'un même angle, se croisent en un point* P, *situé sur la droite qui joint le cinquième angle* c *avec le point de contact* E *du côté opposé* ae.

213. Ainsi, quand on a cinq tangentes d'une section conique, ou un pentagone circonscrit à la courbe, non-seulement on peut trouver directement, et en ne faisant usage que de la règle, une infinité de nouvelles tangentes de la courbe, mais on peut aussi déterminer linéairement le point de contact de chacune d'elles et des premières. Les mêmes constructions peuvent aussi servir à tracer la courbe, quand on a seulement quatre tangentes quelconques de cette courbe et le point de contact de l'une d'elles; la *fig.* 37 montre, en effet, comment, ayant les quatre tangentes *de*, *ae*, *ab*, *bc* et le point de contact E de *ae*, on peut en trouver, à volonté, une cinquième *cd*, et successivement autant d'autres que l'on voudra (*).

Enfin, on déduirait des conséquences également remarquables du principe de l'article **208**, en supposant que de nouveaux côtés, non contigus aux premiers, vinssent à se confondre en un seul, ce qui ferait retomber directement sur quelques-unes des propriétés du triangle et du quadrilatère circonscrits déjà exposées précédemment, propriétés qui se déduisent également du théorème de Pascal, comme on l'a remarqué art. **207**.

214. Nous avons résolu, dans ce qui précède, les cas principaux où la section conique peut se construire linéairement par points ou par l'enveloppe de ses tangentes, quand on se donne un certain nombre de ces points et de

(*) Les articles **188** et **191** offrent une autre manière de résoudre ce même problème.

ces tangentes, ou des conditions équivalentes (189); et il résulte de cette discussion que tous les cas, pour lesquels la courbe est unique, sont compris implicitement dans celui où l'on se donne à la fois soit cinq tangentes, soit cinq points quelconques de la courbe; car (207 et 213), au moyen du principe de continuité, on peut immédiatement passer de ceux-ci aux autres, en supposant que certains points ou certaines droites données se réunissent ou se confondent deux à deux. Pour compléter cet objet, il nous resterait à examiner les autres cas de la question qui nous occupe, pour lesquels la construction de la courbe cesse d'être linéaire, ou d'appartenir à la Géométrie de la règle; mais cette discussion exigerait des considérations nouvelles qui ne seraient pas ici à leur place, et pour lesquelles nous renverrons au Chapitre premier de la IIIe Section.

215. On peut, au surplus, se proposer d'opérer directement au moyen du calcul, ce qui devient souvent indispensable dans certaines circonstances particulières; or les principes des articles **148**, **177** et **186**, joints aux diverses remarques répandues dans la présente Section, notamment celles de l'article **182**, pourraient très-bien servir pour cet objet, ainsi que l'a déjà fait voir M. Brianchon, dans son *Mémoire sur les lignes du second ordre;* mais il ne sera pas inutile d'y ajouter les principes suivants, qui peuvent être considérés comme de nouvelles conséquences des propriétés des hexagones inscrit et circonscrit, et offrent l'avantage de conduire à des procédés très-simples pour le tracé des sections coniques par points, ou par l'enveloppe des tangentes, lorsqu'il s'agit d'opérer sur le terrain.

Soient ABCD (*fig.* 21, 21 *bis* et 21 *ter*) un quadrilatère circonscrit à une conique; LN et MP deux autres tangentes quelconques de la courbe, dont la première rencontre les côtés opposés AB et CD du quadrilatère en L et N respectivement, et la seconde les deux autres côtés opposés en M et P; la figure APMCNLA sera un hexagone circonscrit à la section conique, et par conséquent les trois diagonales NP, AC, LM iront concourir (208) en un même point I, qui est aussi un point de l'une des diagonales du quadrilatère ABCD. Or il résulte de là (166) que l'on a, entre les segments formés par les tangentes MP, LN sur les côtés de ce quadrilatère, la relation

$$AL.BM.CN.DP = AP.BL.CM.DN,$$

c'est-à dire que :

Un quadrilatère quelconque étant circonscrit à une conique, deux nouvelles tangentes de la courbe viendront déterminer, la première sur deux côtés opposés quelconques du quadrilatère, la seconde sur les deux autres côtés opposés, deux

segments, ce qui fait en tout huit segments ; et le produit de quatre de ces segments, non contigus, sera égal au produit des quatre autres.

216. La même relation donne

$$\frac{DP}{AP}\cdot\frac{BM}{CM}=\frac{BL}{AL}\cdot\frac{DN}{CN},$$

ce qui fait voir que si, en laissant MP fixe, on faisait varier la tangente LN autour de la courbe, le produit des rapports inverses $\frac{BL}{AL}$, $\frac{DN}{CN}$ des segments formés par cette tangente sur les côtés opposés AB, CD du quadrilatère ABCD serait constant ; donc réciproquement, si une droite LN se meut de façon que ce produit soit constant, elle demeurera perpétuellement tangente à la section conique déterminée par les côtés du quadrilatère et par la droite MP, ce qui fournit un moyen bien simple de trouver, à l'aide du calcul, autant de tangentes que l'on voudra d'une section conique quand on en aura cinq autres.

217. La figure ENPFMLE, construite au moyen des droites LM, PN partant du point I de la diagonale AC du quadrilatère ABCD, est un autre hexagone dont les trois côtés opposés vont concourir respectivement aux trois points A, C, I situés en ligne droite ; donc il est inscriptible à une section conique, et par conséquent ses six sommets peuvent être censés appartenir à une telle courbe : or il résulte de là réciproquement et de ce qui précède que :

Quand une section conique passe par les points de concours E *et* F *des côtés opposés d'un quadrilatère quelconque* ABCD, *ses quatre autres points d'intersection* L, M, N, P, *avec les côtés de ce quadrilatère, déterminent sur chacun d'eux deux segments, ce qui fait en tout huit segments, et le produit de quatre quelconques de ces segments, non contigus, est égal au produit des quatre autres, c'est-à-dire qu'on a la relation*

$$AL.BM.CN.DP = AP.BL.CM.DN,$$

déjà écrite ci-dessus.

218. Étant donnés cinq points E, F, N, P, L d'une section conique, on en déterminera à volonté un sixième M, et successivement autant d'autres qu'on voudra, au moyen du calcul, en traçant une fois pour toutes les droites EL, EN, FP, et faisant varier à chaque fois la quatrième droite FCB qui porte le point M ; car ces quatre droites formeront, par leurs intersections mutuelles, le quadrilatère ABCD, dans lequel on aura la relation ci-

dessus ; en sorte qu'il suffira de mesurer, pour chaque point M correspondant à FCB, les trois distances BL, CN et BC.

On arriverait, au reste, directement à ces divers résultats, en supposant qu'on mette la figure en projection sur un nouveau plan, de façon que la section conique que l'on considère y devienne un cercle, et que la droite AC passe à l'infini.

219. Les propositions que nous venons d'établir sur les hexagones inscrits et circonscrits ayant lieu, aussi bien que celles des articles **201**, **208**, indépendamment de la position respective des points et des lignes, doivent comme elles s'étendre, en vertu du principe de continuité, au cas où certaines de ces lignes et certains de ces points viennent à se confondre deux à deux, ce qui conduit immédiatement à des relations analogues sur les pentagones et les quadrilatères inscrits et circonscrits; d'où il est facile ensuite de déduire des moyens de solution, par le calcul, des différentes questions (**214**) qui ont déjà été traitées, d'une autre manière, dans ce qui précède.

Supposons, par exemple, que, dans l'hexagone inscrit ENPFMLE considéré ci-dessus, le côté EL devienne infiniment petit ou que le point L se réunisse au point E, le quadrilatère ABCD subsistera toujours, et la relation de l'article **217** deviendra

$$AE.BM.CN.DP = AP.BE.CM.DN.$$

Mais la droite EAB est alors tangente à la courbe au point E, et l'hexagone ENPFMLE s'est réduit à un pentagone inscrit, avec la tangente en l'un des sommets ; donc il en résulte un moyen très-simple d'obtenir, par le calcul, soit la tangente en l'un des cinq points donnés d'une section conique, soit un cinquième point quelconque de la courbe, quand on en a quatre autres et la tangente en l'un d'eux.

On voit ce qu'il y aurait à faire si plusieurs côtés de l'hexagone ci-dessus devenaient à la fois nuls ou tangents à la courbe.

220. Supposons pareillement que dans l'hexagone ALNCMPA, circonscrit à une section conique, le côté MP vienne, par un mouvement continu, s'appliquer sur la direction indéfinie AD de son adjacent AP, sans quitter la courbe ; le sommet P sera devenu leur point de contact commun ; le point M s'étant d'ailleurs confondu avec F, l'hexagone se sera réduit en un pentagone circonscrit ALNCFA ; et, comme on aura alors (**216**)

$$\frac{DP}{AP}\cdot\frac{BF}{CF} = \frac{BL}{AL}\cdot\frac{DN}{CN}.$$



cette relation pourra servir à construire, soit le point de contact P, quand les cinq tangentes seront données, soit une tangente quelconque de la courbe, quand on en connaitra quatre autres et le point de contact de l'une d'elles.

On voit ce qu'il y aurait à faire si de nouveaux côtés de l'hexagone ci-dessus venaient à se confondre en un seul, en demeurant tangents à la courbe.

221. Les relations générales des articles **215** et **217** s'étendraient même au cas où la section conique que l'on considère se réduirait au système de deux droites ou d'un point, ce qui arrivera évidemment toutes les fois que trois des points de la courbe se trouveront placés en ligne droite, ou que trois de ces tangentes passeront par un même point; la *fig.* 20, où les droites LN et PM passent par les points respectifs F, E, fournit à la fois l'exemple des deux cas, et l'on retombe ainsi sur les propriétés particulières exposées directement aux articles **156** et **165**.

Enfin il résulte encore du principe de continuité que ces mêmes relations, et toutes celles que nous avons établies dans ce qui précède, subsistent, avec des modifications convenables, quand on vient à supposer qu'au lieu de se confondre deux à deux, certains points ou certaines droites s'éloignent à l'infini sur le plan de la figure; or de là découle une série de propriétés extrêmement intéressantes sur les coniques à branches infinies, dont nous nous contenterons de donner quelques exemples, en renvoyant, pour plusieurs autres, au Mémoire souvent cité de M. Brianchon, et à celui de M. Coste *sur la parabole*, qui se trouve inséré au VIIIe volume des *Annales de Mathématiques*, notre objet n'étant ici que de nous occuper des rapports les plus généraux des figures.

222. Supposons, en premier lieu, que, dans le théorème de l'article **215**, la courbe que l'on considère soit une parabole : il existera (**132**) une position de la tangente LN où cette droite sera tout entière à l'infini, et pour laquelle par conséquent les segments correspondants seront infinis et égaux; donc (**216**) le produit constant $\frac{DP}{AP}\cdot\frac{BM}{CM}$ sera l'unité, c'est-à-dire que, pour la parabole, on a

$$\frac{DP}{AP}\cdot\frac{BM}{CM}=\frac{BL}{AL}\cdot\frac{DN}{CN}=1,$$

quels que soient le quadrilatère ABCD et les tangentes LN et MP; ou, en d'autres termes :

Dans tout quadrilatère circonscrit à une parabole, les côtés opposés sont

divisés en segments proportionnels par une cinquième tangente quelconque.

Théorème dû, je crois, à Halley (*), et qui donne un moyen fort simple de tracer la parabole par ses tangentes, lorsque quatre quelconques d'entre elles sont données; tout consiste, en effet, à diviser en un même nombre quelconque de parties égales les deux côtés opposés du quadrilatère formé par ces tangentes, en prolongeant la division de part et d'autre de leurs extrémités; joignant ensuite, par des droites, les points de division qui se correspondent sur ces côtés, on aura autant de tangentes de la courbe cherchée.

ABCD étant toujours un quadrilatère circonscrit à la parabole, soit P le point de contact du côté AD, on aura de même (220)

$$\frac{\mathrm{DP}}{\mathrm{AP}}\cdot\frac{\mathrm{BF}}{\mathrm{CF}}=\frac{\mathrm{BL}}{\mathrm{DN}}\cdot\frac{\mathrm{DN}}{\mathrm{CN}}=1,$$

relation au moyen de laquelle on obtiendra très-facilement le point de contact sur chaque tangente.

On arriverait à des relations analogues pour l'hyperbole, à l'aide des articles 217, 218 et 219.

223. Pour donner d'autres exemples, supposons que, dans la *fig.* 28 relative à l'article 186, le côté *ad* du quadrilatère *abcd*, circonscrit à la section conique, passe à l'infini, et que la courbe soit par conséquent une parabole; les droites *bd* et *cd*, *ba* et *ca*, *cb* et *ml* deviendront respectivement parallèles, tandis que celles AB, CA et DA seront des diamètres de la courbe; toutes les autres relations graphiques, énoncées à l'article cité, restant d'ailleurs les mêmes, il en résultera autant de propriétés de la parabole, qu'il sera facile de reconnaître *à priori;* ainsi, par exemple :

Que, d'un point quelconque P *de la corde de contact* BD *d'un angle* BmD *circonscrit à une parabole, on mène deux parallèles* Pa *et* Pd *aux côtés de cet angle, elles iront rencontrer de nouveau ces côtés en deux points* c *et* b, *qui appartiendront à une troisième tangente* bc *de la courbe.*

C'est la Proposition 21 du livre III du grand *Traité des sections coniques* de de Lahire.

224. Les segments qui correspondent aux points *a*, *d*, *l* devenant tous infinis, on déduit pareillement (28) des relations posées, article 186, les

(*) *Apollonii Pergæi de sectione, etc.*, Oxonii (1706); *De sectione rationis*, lib. I, p. 64.

relations nouvelles

$$bB.cD = bm.cm,$$

$$\frac{\overline{PD}^2}{\overline{PB}^2}\cdot\frac{bB}{cD} = \frac{bm}{cm},$$

dont la première exprime que :

Dans tout angle BmD, *circonscrit à la parabole, les côtés sont divisés en segments inversement proportionnels par une troisième tangente quelconque* bc *de la courbe.*

Cette proposition, qui revient à la 41e du livre III des *Coniques d'Apollonius*, peut également être considérée comme un corollaire de celle exposée ci-dessus (222), sur le quadrilatère circonscrit à la parabole. On s'en sert ordinairement pour le tracé des raccordements de routes, etc. (*).

225. On voit encore que la tangente *bc*, parallèle à la polaire ML du point P, divise en deux parties égales la distance comprise entre cette droite et ce point, car la figure *bmc*P est un parallélogramme; ainsi :

Dans la parabole, la droite qui divise en deux parties égales toutes les distances comprises entre un point quelconque et sa polaire est une tangente de la courbe.

Pour découvrir ce que devient cette droite dans le cas de l'hyperbole, supposons que, dans la *fig.* 28 relative à une section conique quelconque, la droite AD soit placée à l'infini; la courbe sera ainsi une hyperbole, *ad* et *cd* seront ses asymptotes auxquelles seront parallèles les droites CPA et BPD qui aboutissent aux extrémités de la corde BC concourant elle-même à l'infini avec la polaire ML du point P; mais la figure BMCP sera évidemment un parallélogramme; donc la diagonale BC, parallèle à ML, divisera aussi en deux parties égales la distance MP comprise entre le point P et sa polaire ML; c'est-à-dire que :

Dans l'hyperbole, la droite qui divise en deux parties égales toutes les distances comprises entre le pôle et la polaire rencontre la courbe en deux points

---

(*) Sganzin, *Cours de Construction*. Prony, Xe Cahier du *Journal Polytechnique*, etc.

Depuis la rédaction de cet ouvrage, il a paru, *sur les courbes de raccordement*, un Mémoire fort intéressant de M. Brianchon, qui fera partie du XIXe Cahier du *Journal de l'École Polytechnique*, actuellement sous presse. Il nous serait aisé de faire voir comment les différentes pratiques qui y sont indiquées et celle de l'article 222, relatives au tracé de la parabole, peuvent s'étendre (132) aux sections coniques en général, en substituant, à l'échelle ordinaire des divisions égales, l'échelle *fuyante* ou *harmonique* (27) : on arriverait d'ailleurs directement aux mêmes résultats, à l'aide des propriétés générales établies dans ce qui précède.

tels, qu'en les joignant par de nouvelles droites avec le pôle, ces droites sont toujours parallèles aux asymptotes.

226. Il est évident que, pour l'ellipse et le cercle, la droite en question cesse de rencontrer la courbe, ce qui indique que les asymptotes sont imaginaires. On voit d'ailleurs ce que deviendraient les autres propriétés de l'article 186, pour le cas de l'hyperbole.

A cause de ces diverses propriétés de la droite qui vient de nous occuper, on pourrait la nommer *l'indicatrice* de la section conique correspondante.

Ainsi, tandis que la polaire est le lieu des points du plan d'une section conique dont les distances au pôle sont moyennes harmoniques (22) entre les segments formés sur les cordes correspondantes de la courbe par ce pôle, l'indicatrice est, de son côté, le lieu des points dont les distances au pôle sont les moyennes géométriques (31) entre les segments formés, sur ces mêmes cordes, par les points dont il s'agit.

Mais c'est assez nous arrêter sur ces conséquences particulières, qu'au moyen de la loi de continuité il sera toujours facile de reconnaître et de discuter; et je reviens maintenant aux propriétés générales de situation des lignes droites et des sections coniques, sur lesquelles il me reste encore quelque chose à dire pour compléter l'objet de ce Chapitre.

227. Il résulte directement de la théorie des pôles exposée ci-dessus, et en particulier de la proposition de l'article 196, que :

Si deux hexagones, situés sur le plan d'une section conique, sont tels, que les sommets de l'un soient respectivement les pôles des côtés de l'autre, réciproquement les sommets de celui-ci seront les pôles des côtés du premier.

228. D'après cela, il est évident que deux côtés opposés quelconques de l'un d'entre eux auront pour pôles deux sommets opposés de l'autre, et *vice versâ;* donc le point de concours de ces côtés sera précisément (196) le pôle de la diagonale qui joint les sommets opposés dont il s'agit, et partant :

Si les trois points de concours des côtés opposés de l'un des hexagones ci-dessus sont situés en ligne droite, les diagonales qui joignent les sommets opposés de l'autre et qui sont les polaires de ces trois points concourront en un même point, pôle de la droite dont il s'agit, et réciproquement.

En combinant cette remarque avec les propriétés (201, 208) des hexagones inscrits et circonscrits aux sections coniques, on en conclut de suite que :

Si l'un quelconque des hexagones ci-dessus est inscriptible à une section

conique, l'autre sera, par là même, circonscriptible à une telle courbe, et réciproquement.

229. Ces théorèmes, qui ont été donnés par M. Brianchon à la page 379 du tome IV des *Annales de Mathématiques*, sont susceptibles d'une extension beaucoup plus grande; on peut, en effet, observer que le principe de l'article 227 s'applique immédiatement à deux polygones d'un nombre quelconque de côtés, polygones que, pour cette raison, il convient d'appeler *polaires réciproques* par rapport à la section conique qui sert de *directrice* ou d'*auxiliaire*.

Deux semblables polygones étant d'ailleurs tels (228), que les points de concours des côtés de l'un sont les pôles respectifs des diagonales qui appartiennent aux sommets correspondants de l'autre, et *vice versâ*, on voit que les droites qui renfermeraient, deux à deux, trois à trois, etc., ces points de concours, auraient encore pour pôles les points de rencontre des diagonales qui leur correspondent respectivement dans l'autre polygone.

230. Il résulte, en outre, des articles 203, 209 et de ce qui a été dit pour le cas de l'hexagone (228), que si, ayant deux sections coniques quelconques sur un plan, on prend à volonté, sur l'une d'elles, cinq points ou cinq tangentes quelconques, leurs polaires ou leurs pôles, par rapport à l'autre, détermineront une troisième section conique, à laquelle appartiendra la polaire ou le pôle, soit d'un sixième point, soit d'une sixième tangente, pris à volonté sur la première section conique : or de là on conclut en général que :

Si un polygone quelconque, placé sur le plan d'une section conique, est inscriptible à une autre section conique, son polaire réciproque sera, par là même, circonscriptible à une telle courbe, et vice versâ.

231. Donc aussi on a ces théorèmes :

Si un point ou pôle, pris sur le plan d'une section conique quelconque, se meut sur une autre section conique, sa polaire en enveloppera une troisième dans son mouvement.

Et réciproquement :

Si une droite ou polaire, située dans le plan d'une section conique, se meut en touchant continuellement une autre section conique, son pôle parcourra successivement tous les points d'une troisième section conique.

En remplaçant, dans ces énoncés, les noms de pôle et polaire par ceux de *sommet d'angle circonscrit* et de *corde de contact*, qui leur sont équiva-

lents (49), on retombe directement sur la propriété démontrée par M. Brianchon à la page 14 du Xe Cahier du *Journal de l'École Polytechnique* (*).

232. Nous avons donné ailleurs (**), de ces mêmes théorèmes, une démonstration beaucoup plus générale que celle qui précède, et qui s'étend au cas où l'on remplacerait la section conique donnée, que décrit le pôle ou qu'enveloppe la polaire dans son mouvement, par une courbe d'un ordre quelconque. Voici, pour y arriver, la première des propositions à établir :

Si deux courbes quelconques, situées sur le plan d'une section conique donnée, sont telles, que les points de l'une soient respectivement les pôles des tangentes de l'autre, réciproquement les points de celle-ci seront les pôles des tangentes de la première; de sorte que chacune d'elles pourra être considérée, à la fois, comme l'enveloppe des polaires des points de l'autre, ou comme le lieu des pôles des tangentes de cette autre.

En effet, les deux courbes dont il s'agit peuvent être considérées comme la limite de deux polygones inscrits ou circonscrits, d'un nombre infini de côtés infiniment petits, qui se trouvent dans la situation de ceux de l'article 229 par rapport à la section conique auxiliaire, et pour les éléments desquels par conséquent le théorème est évidemment vrai. D'après cela, on peut donc dire que les deux courbes sont *polaires réciproques* l'une de l'autre, de même que les polygones dont elles sont les limites.

233. On arriverait d'ailleurs directement aux mêmes conséquences, au moyen de la théorie des pôles et de la loi de continuité, en observant que, si un certain point se déplace infiniment peu sur la première courbe, sa polaire, qui, par hypothèse, est une tangente de l'autre, tendra à tourner autour du point de contact de cette tangente, lequel est évidemment (196), à son tour, le pôle de l'élément ou de la tangente qui correspond au point que l'on considère sur la première ; c'est-à-dire que :

Si, en un point quelconque de l'une des deux courbes, on mène une tangente à cette courbe, la polaire de ce point touchera l'autre courbe en un point qui sera réciproquement le pôle de cette tangente.

Ces systèmes de points et de tangentes peuvent s'appeler *polaires réciproques*, comme les courbes mêmes dont ils font partie ; et cette définition

(*) On doit au même géomètre d'avoir étendu cette propriété des sections coniques, ou plutôt sa réciproque, aux surfaces du second ordre en général. *Voyez* le Mémoire qu'il a fait insérer au XIIIe Cahier du *Journal de l'École Polytechnique*.

(**) T. VIII des *Annales de Mathématiques*, p. 201 et suiv. (*Voyez* l'*Errata* à la fin du présent volume.)

doit s'étendre à des figures quelconques qui auraient entre elles la même corrélation par rapport à la section conique auxiliaire (*).

234. Pour en venir maintenant à notre objet, supposons qu'on trace une droite arbitraire dans le plan de la polaire réciproque d'une courbe donnée : cette droite la rencontrera, en général, en autant de points qu'il est marqué par son degré. Or, d'après ce qui précède, chacun de ces points est le pôle d'une certaine tangente à la courbe donnée, et, par la théorie des pôles (196), cette tangente passe nécessairement par le pôle de la droite arbitraire ; donc cette dernière rencontrera la polaire réciproque dont il s'agit en autant de points qu'on pourra, par son pôle, mener de tangentes à la courbe donnée ; c'est-à-dire que :

Le degré de la polaire réciproque d'une courbe donnée est, au plus, égal au nombre qui exprime combien, d'un point arbitraire, on peut mener de tangentes à cette dernière courbe.

Ainsi, dans le cas particulier où la courbe donnée est une section conique, sa polaire est elle-même une ligne du second ordre, comme il s'agissait de le démontrer directement, et sans rien emprunter aux propriétés des hexagones inscrits et circonscrits aux sections coniques.

Il existe d'ailleurs entre la courbe donnée et sa polaire réciproque, en général, des dépendances extrêmement remarquables, et qu'il est facile de reconnaitre au moyen de ce qui précède ; ainsi, par exemple :

« Les points de rebroussement de l'une ont pour réciproques les points
» d'inflexion de l'autre, et *vice versâ;* les points multiples de l'une sont les
» pôles des tangentes communes à la fois à plusieurs branches de sa réci-
» proque, et précisément à un nombre de branches marqué par l'ordre de
» multiplicité des points dont il s'agit, etc. (**). »

235. Nous pourrons faire usage de la théorie des polaires réciproques par la suite ; pour le moment, nous nous contenterons de remarquer, en général, que les considérations qui précèdent peuvent s'étendre à des figures quelconques, composées de points, de droites et de courbes quelconques tracées sur le plan d'une section conique, ce qui donne lieu à une foule de conséquences et de rapprochements très-curieux concernant la réciprocité et

(*) D'après la note de l'article 196, on pourrait dire aussi que ces figures sont réciproquement *conjuguées harmoniques*, relativement à la section conique auxiliaire.

(**) *Voyez*, pour plus de développements, l'article des *Annales de Mathématiques* déjà cité ci-dessus (232, note).

l'analogie qui existent entre certaines figures et certaines propriétés. Ainsi l'on voit, par exemple, qu'à chaque propriété des polygones inscrits aux sections coniques, doit correspondre une certaine propriété des polygones circonscrits de même espèce, et *vice versâ*; on peut même dire, en général, qu'il *n'existe aucune relation descriptive d'une figure donnée sur un plan, qui n'ait sa réciproque dans une autre figure;* car tout consiste à examiner ce qui se passe dans sa polaire réciproque par rapport à une section conique quelconque prise pour directrice : si, par exemple, l'on soumet à cette épreuve les figures relatives aux théorèmes des articles 170 et 201, on retombera évidemment sur les propriétés des articles 169 et 208, qui, sous ce point de vue, peuvent être envisagées comme les réciproques des premières.

Au reste, la théorie des polaires réciproques, qui n'est, comme on l'a vu, qu'une extension fort simple de celle des pôles, s'étendrait sans peine aux figures dans l'espace, en remplaçant la section conique auxiliaire par une surface du second ordre quelconque (*); mais il n'entre point dans l'objet de ce Chapitre de nous arrêter longuement à ces diverses recherches, quelque intérêt qu'elles puissent d'ailleurs présenter.

Nous terminerons ici l'exposition des principales propriétés de la Géométrie de la règle et de la théorie des transversales, en remarquant qu'il n'est aucun des principes établis qui ne puisse servir à résoudre, soit à l'aide de jalonnements, soit à l'aide de chainages plus ou moins multipliés, quelques-uns des problèmes qu'on se propose d'ordinaire sur le terrain, lorsqu'il s'agit de tracer des alignements à travers des obstacles qui bornent la vue, ou de mesurer des distances inaccessibles, ou enfin de décrire des sections coniques et d'opérer directement sur elles, comme cela est nécessaire, par exemple, dans le tracé des raccordements de routes ou de canaux, etc. Nous regrettons de ne pouvoir entrer dans plus de détails sur ce sujet intéressant, qui, au reste, a déjà été traité, d'une manière spéciale, par M. Servois, dans ses *Solutions peu connues de différents problèmes de Géométrie pratique*, et par M. Brianchon dans son *Application de la Théorie des transversales*, et dans son *Mémoire sur les courbes de raccordement* (224, note). Nous avons voulu seulement établir les divers principes de solution, en les réunissant tous sous un même point de vue, ce qui n'avait point encore été fait jusqu'ici d'une manière complète. Nous reviendrons, au surplus, sur cet objet par la suite, ainsi que sur quelques autres propriétés projectives connues, à mesure qu'il se présentera des occasions favorables de le faire; pour

(*) *Voyez* le *Supplément* à la fin de l'ouvrage, art. 592.

le moment, il convient que nous reprenions la théorie des sécantes réelles ou idéales communes au système de deux ou de plusieurs cercles, et que nous lui donnions toute la généralité dont elle peut être susceptible.

CHAPITRE III.

DU CENTRE DE SIMILITUDE EN GÉNÉRAL, ET DE CELUI DE DEUX CERCLES EN PARTICULIER. — DES CERCLES QUI SE COUPENT OU SE TOUCHENT SUR UN PLAN. — DES CONIQUES SEMBLABLES ET SEMBLABLEMENT PLACÉES, EN GÉNÉRAL.

---

236. Nous avons déjà exposé, à la fin du second Chapitre de la première Section, quelques-unes des propriétés dont jouit le système de deux ou de plusieurs circonférences de cercle tracées sur un plan, en les considérant comme des applications faciles des principes posés dans ce Chapitre; mais il en existe un grand nombre d'autres non moins dignes de remarque et qui n'étaient guère susceptibles d'être traitées de la même manière, au moins avec quelque élégance, tandis qu'elles sont, au contraire, des conséquences on ne peut plus simples des principes de la projection centrale; c'est pourquoi nous avons cru devoir les rejeter dans la partie des applications, quoiqu'elles appartiennent réellement à des théories purement élémentaires. On peut d'ailleurs regarder leur exposition comme une introduction nécessaire aux propriétés analogues des sections coniques en général; et, quoiqu'à l'aide des principes de la projection centrale il soit possible de traiter les unes et les autres simultanément, nous avons préféré les séparer constamment dans nos recherches, afin d'être plus clair et de ne point partager inutilement l'attention; nous montrerons au surplus, à la fin de ce Chapitre, comment on peut étendre immédiatement ces mêmes propriétés aux sections coniques s. et s. p. (*semblables et semblablement placées*) sur un plan.

237. Considérons donc le système de deux circonférences de cercle (C) et (C'), *fig.* 38, situées sur un même plan; on sait qu'il existe toujours, sur la ligne CC' de leurs centres, deux points S et S', par lesquels passent respectivement les faisceaux de droites qui joignent les extrémités de deux rayons parallèles quelconques, selon que ces rayons sont dirigés dans le *même sens* ou en *sens contraire*, par rapport aux centres C et C'. Ces points, qui divisent ainsi en segments proportionnels, ou harmoniquement, la

distance CC′ des centres, sont en même temps ceux où concourent respectivement, soit les tangentes *extérieures*, soit les tangentes *intérieures*, communes aux deux cercles, quand ces tangentes sont réelles et possibles. Afin de distinguer ces points entre eux et de tout autre point du plan des deux cercles correspondants, les géomètres ont, depuis quelque temps, donné le nom de *centre de similitude directe* au point S où concourent les droites qui joignent les extrémités des rayons parallèles dirigés dans le même sens, et celui de *centre de similitude opposée* au point S′ où concourent, au contraire, les droites qui joignent les extrémités des rayons parallèles dirigés en sens inverse.

238. Nous ferons, sur ces définitions, des observations analogues à celles que nous avons déjà présentées (53 et 77) sur les grandeurs graphiques en général et sur les axes radicaux des cercles en particulier; quoiqu'elles soient aussi simples que naturelles, à cause que deux cercles quelconques, tracés sur un plan, sont nécessairement s. et s. p. à l'égard de chacun des deux points dont il s'agit, et qu'elles offrent l'avantage d'être absolument indépendantes de l'existence propre des tangentes communes, toutefois elles ont l'inconvénient de ne pouvoir s'appliquer directement, et avec exactitude, au système de deux sections coniques ou de deux courbes en général, lesquelles peuvent cependant avoir, dans certaines situations, des points jouissant des mêmes propriétés que ceux où concourent, dans d'autres, les tangentes communes, bien que ces tangentes elles-mêmes soient devenues tout à fait impossibles ou imaginaires.

Bien plus, ces définitions ne sauraient nullement convenir aux divers points de concours des tangentes *intérieures* et *extérieures* communes, qui peuvent appartenir au système de deux cercles tracés sur un plan; lesquels, comme nous le verrons bientôt (259), jouissent cependant de certaines propriétés semblables à celles des centres de similitude, et qui sont propres à définir et à déterminer les uns et les autres de ces points d'une manière complète et simultanée. Or, l'un des objets principaux de ces recherches étant de montrer comment on peut généraliser et étendre immédiatement, au moyen du principe de continuité, la conception géométrique des figures, nous ne croyons pas devoir abandonner entièrement la définition primitive, et jusque-là généralement admise, de *points de concours des tangentes communes*, laquelle a l'avantage d'être, en quelque sorte, intuitive, et de présenter un caractère purement graphique ou descriptif de l'objet : seulement, pour éviter l'espèce de contradiction qui peut avoir lieu, dans certains cas, entre les termes et les objets qu'ils servent à désigner, on peut, si toutefois on le juge absolument indispensable, employer à l'ordinaire les adjectifs *réel*

et *idéal*, qui ne portent que sur la manière d'être de l'objet défini à l'égard de ceux qu'on rappelle ou dont il dépend, et non sur son existence propre qui est censée demeurer absolue et réelle. D'après cela, nous appellerons indistinctement, selon les vues particulières de l'esprit, les points S et S' centres de similitude, points de concours des tangentes communes, relativement au système des cercles (C) et (C') auxquels ils se rapportent.

On pourrait, au surplus, justifier *à priori* ces dernières définitions, pour le cas où les tangentes sont imaginaires, de la même manière qu'on l'a fait pour les sécantes idéales communes à deux cercles (69); il suffirait, pour cela, de considérer les hyperboles supplémentaires relatives à ces sécantes; car elles auraient évidemment les mêmes centres de similitude, et ces centres appartiendraient à des tangentes réellement communes aux hyperboles.

239. L'existence du centre de similitude n'est point particulière au cas de deux cercles tracés sur un plan, elle a lieu pour deux figures quelconques, s. et s. p. (**42**, note), soit sur un plan, soit, en général, dans l'espace. Le centre de similitude n'est autre chose, dans ces divers cas, que le point vers lequel convergent toutes les droites ou *rayons de similitude* qui joignent, deux à deux, les points homologues de l'une et l'autre figure, et qui divise toutes ces droites, ou leurs prolongements, en deux segments proportionnels (*) : c'est d'ailleurs un centre de similitude *directe* ou *opposée*, selon que les deux segments en question sont dirigés dans le *même sens* ou en *sens contraire* par rapport à ce point.

240. Deux figures s. et s. p. n'ont évidemment, en général, qu'un centre de similitude, soit directe, soit opposée; mais, quand elles ont, comme le cercle, la sphère, les lignes et les surfaces du second ordre, un centre de figure ou de symétrie, elles ont nécessairement aussi deux centres de similitude, soit directe, soit inverse; il est, au reste, bien évident que, dans tous les cas, quand l'une des figures est plane, celle qui lui correspond l'est

(*) Il est évident réciproquement que, lorsque deux figures quelconques ont un tel point, ces figures sont nécessairement s. et s. p., et qu'il en est de même du cas où, ayant leurs lignes homologues parallèles, elles ont, en outre, un point de concours unique des droites joignant les points homologues, c'est-à-dire un *centre de projection* (9). Toutes ces notions sont tellement simples, et dérivent si immédiatement des premiers principes de la Géométrie, qu'on pourrait, en quelque sorte, les considérer comme des axiomes, ainsi que le propose lui-même l'auteur de la *Géométrie de position* (p. 481, note). La dernière, surtout, mérite d'être remarquée, en ce qu'elle repose uniquement sur l'idée de direction indéfinie des lignes, idée fondamentale et qui n'a rien de commun avec celle de leur grandeur, malgré ce qui en a été dit, à l'endroit cité, par M. Carnot. Nous donnerons, dans la Section suivante, quelques éclaircissements sur cet objet.

aussi. Enfin, l'idée de similitude de grandeur et de position de deux figures quelconques, tracées ou non dans un même plan, emportant avec elle celle de la proportionnalité et du parallélisme des droites homologues (142, note), les notions qui précèdent et celles qui suivent en découlent comme corollaires très-simples.

241. Considérons deux figures quelconques s. et s. p.; il est clair que les droites et les plans qui appartiennent à des points homologues sont eux-mêmes homologues et parallèles, ou concourent à l'infini, comme aussi les points et les droites qui sont l'intersection mutuelle de droites ou de plans homologues sont eux-mêmes homologues; d'ailleurs, les points homologues quelconques sont sur des droites dirigées vers le centre de similitude, et il en est de même des plans qui renferment les droites homologues, quand la figure est dans l'espace; donc on peut conclure immédiatement que :

« 1° Si un certain point de l'une des figures se meut sur une droite, une courbe ou une surface quelconque, son homologue, dans l'autre, décrira aussi une droite, une courbe ou une surface homologue à la première, c'est-à-dire une ligne ou surface semblable de grandeur et de position, et par conséquent du même ordre ou degré. »

« 2° Si une certaine ligne ou surface de l'une des figures est assujettie, soit à pivoter sur un point fixe, soit à rouler autour d'une autre ligne ou d'une autre surface quelconque, son homologue pivotera aussi sur le point homologue au premier, ou roulera autour d'une courbe ou surface homologue à la première, c'est-à-dire semblable de grandeur et de position, et par conséquent du même ordre. »

« 3° Les lignes et les surfaces homologues des deux figures ont nécessairement leurs branches et leurs nappes infinies parallèles ou asymptotiques (103 et 104), c'est-à-dire qu'il n'existe aucun point ou aucune ligne à l'infini de l'une des deux figures qui n'appartienne en même temps à l'autre. »

« 4° Les lignes et surfaces de l'une des figures s'entrecoupent en des points et des lignes qui ont pour homologues ceux ou celles qui appartiennent aux lignes et surfaces homologues de l'autre figure, etc. »

En général, on voit que toutes les constructions ou opérations quelconques que l'on pourra effectuer sur l'une des figures se répéteront de la même manière sur l'autre, et produiront de nouvelles figures s. et s. p., soit entre elles, soit à l'égard des premières. Il est d'ailleurs évident que le centre de similitude sera un point de concours, réel ou idéal, des tangentes

communes, pour chaque couple de lignes homologues qui se trouvent décrites dans un seul plan, et un sommet de surface conique enveloppante, pour chaque couple de surfaces ou de lignes homologues situées dans l'espace.

242. Revenons maintenant au cas particulier de deux cercles (C) et (C'), *fig.* 38, tracés sur un même plan; ce que nous pourrons dire des deux centres de similitude S et S' qui leur appartiennent s'appliquera immédiatement à ceux de deux sections coniques quelconques s. et s. p. sur un plan; or il est essentiel de remarquer qu'à chaque point A, pris à volonté sur l'un des cercles, et pour un même centre de similitude S, correspondent en général, sur l'autre, deux points A' et E' placés sur la droite qui joint le premier au centre de similitude; mais il n'y en a évidemment qu'un seul A' qui soit homologue par similitude avec A; c'est celui dont l'arc a sa courbure dirigée dans le même sens, par rapport au centre de similitude S, que l'arc qui appartient au point A : pour le distinguer du point E', nous dirons qu'il est l'*homologue direct* du point A, et que le point E' est l'*homologue inverse* du même point.

243. En conséquence de ces définitions, deux arcs, deux cordes, deux tangentes, etc., appartenant respectivement à deux cercles, seront *directement* ou *inversement* homologues, suivant que leurs extrémités ou points de contact seront des points de l'une ou de l'autre espèce; et cette définition devra s'étendre en général à des points, des droites, des courbes quelconques qui pourraient provenir des premiers points ou des premières droites.

On voit d'après cela qu'à un point, un arc, une corde, une tangente, etc., donné par rapport à l'un des deux cercles, il ne correspond jamais, sur l'autre, qu'un seul point, un seul arc, une seule corde, etc., duquel on puisse dire qu'il est son homologue de l'une ou de l'autre espèce, du moins relativement au même centre de similitude.

244. Nous avons exposé, dans ce qui précède, les nombreuses propriétés dont jouissent les points, droites, etc., homologues directs; et il en résulte, en particulier, que les lignes droites ou courbes, homologues de cette espèce, sont parallèles ou concourent sur la sécante idéale, à l'infini, commune aux deux cercles (94 et 107); or je dis que toutes ces propriétés ont lieu d'une manière analogue, pour les points, droites, etc., homologues inverses, relativement à l'autre sécante, à distance finie, commune à ces mêmes cercles, c'est-à-dire relativement à leur axe radical.

Il suffit, pour cela, de démontrer que le premier de ces systèmes peut être envisagé comme la projection ou perspective de l'autre, et réciproquement : et c'est ce qui a lieu en effet, puisque l'on peut, en général (119 et 122), mettre la figure en projection sur un nouveau plan, de façon que les cercles proposés y demeurent encore des cercles pour lesquels la sécante commune à l'infini sera devenue la sécante commune à distance finie (127) et *vice versâ ;* il est, en outre, bien évident qu'il se sera fait un pareil échange entre les deux points de concours des tangentes intérieures ou extérieures communes, qui ainsi seront encore des centres de similitude dans la nouvelle figure, et comme tels, par conséquent, jouiront des propriétés ci-dessus exposées (241). Mais, dans cette nouvelle figure, les points et lignes homologues directs sont évidemment remplacés par les points et lignes homologues inverses, et pareille chose a lieu, dans la figure primitive, à l'égard de sa projection ; donc leurs systèmes jouissent des mêmes propriétés projectives par rapport aux sécantes communes qui leur correspondent respectivement.

Cette démonstration, il est vrai, ne s'applique en toute rigueur (121) qu'au cas où la sécante à distance finie, commune aux cercles proposés, est idéale ; mais il est facile de la rendre entièrement générale, en supposant que l'on mette la figure en projection sur un nouveau plan, de façon (125) que les deux cercles deviennent des sections coniques quelconques s. et s. p., pour lesquelles les raisonnements qui précèdent demeurent rigoureusement applicables, sans restriction.

Enfin il est évident, d'après les principes des articles 125 et 127, que les mêmes raisonnements et les mêmes conséquences sont applicables à des sections coniques quelconques s. et s. p. sur un plan (242) ; mais, comme cette remarque subsiste, à quelques restrictions près, pour tout ce qui va être dit touchant le cas particulier de la circonférence du cercle, il devient inutile de la répéter à chaque fois, et nous pouvons renvoyer à la fin de ce Chapitre ce qui est essentiel à dire sur le cas général. Ainsi dorénavant il ne sera plus question que de la circonférence du cercle.

245. D'après ce qui précède, deux circonférences de cercle, tracées sur un même plan, peuvent être regardées (14) de deux manières différentes, comme la *projection* ou *perspective* l'une de l'autre, par rapport à chacun de leurs centres de similitude pris pour *centre de projection*, selon que les points, arcs et lignes que l'on considère sont homologues directs ou inverses : dans la première, les lignes homologues sont parallèles et concourent sur la sé-

cante à l'infini commune aux deux cercles; dans l'autre, les lignes homologues concourent, au contraire, sur la sécante, à distance finie, commune aux mêmes cercles; en sorte que les figures qui résulteraient de là cesseraient d'être (241) semblables de grandeur et de position, et jouiraient simplement des propriétés de la projection plane (1) ou perspective ordinaire.

246. On voit qu'ici le mot de *projection* a un sens beaucoup plus restreint que celui que nous lui avons accordé, art. 9 et 14, puisque les lignes homologues, qui sont la projection les unes des autres, au lieu d'être quelconques, sont nécessairement, ou parallèles, ou concourantes sur une droite donnée dans le plan de la figure; droite que, pour cette raison, on pourrait appeler l'*axe de projection* ou *de concours* des deux figures.

Pour en avoir une idée entièrement exacte, on pourrait, dans l'un ou l'autre des cas dont il s'agit, regarder les deux cercles comme représentant de deux manières différentes deux sections planes d'une surface conique dont le sommet serait le centre de similitude que l'on considère en particulier : dans le premier cas, les sections seraient parallèles; dans le second, elles concourraient en une droite représentée par la sécante, à distance finie, commune aux deux cercles.

247. Toutes ces propriétés, sur lesquelles nous nous proposons de revenir d'une manière générale dans la Section suivante, pourraient s'établir, au surplus, directement et sans avoir recours aucunement aux considérations de l'espace; elles subsisteraient évidemment encore, en tout ou en partie et avec des modifications convenables, si l'on venait à supposer, en vertu du principe de continuité, que l'un des deux cercles proposés, ou tous deux, devinssent infiniment petits, infiniment grands, ou se rapprochassent l'un de l'autre jusqu'à une distance insensible, c'est-à-dire si l'on supposait que ces cercles se réduisissent, soit séparément, soit ensemble, à des points (76), des droites (95), ou se confondissent.

Dans ce dernier cas, en admettant que, pour se confondre avec l'autre, l'un des cercles ait glissé, en variant de grandeur, entre les deux tangentes qui lui sont communes avec ce cercle, ou, ce qui revient au même, s'en soit rapproché en conservant le même centre de similitude qu'auparavant, la sécante commune, à distance finie, sera devenue évidemment la sécante ou corde de contact des deux tangentes communes et du cercle fixe, c'est-à-dire la polaire du point de concours de ces tangentes ou du centre de similitude; les lignes et les points, que nous avons appelés homologues directs, se seront confondus deux à deux, tandis que les lignes homologues inverses

concourront, comme auparavant, sur la sécante de contact ou polaire dont il s'agit.

248. Ainsi les propriétés du pôle et de la polaire, et par conséquent celles des quadrilatères inscrits et circonscrits (186), ne sont que des conséquences fort simples et des cas particuliers de celles des sécantes communes et des points de concours des tangentes communes; or il résulte de ce rapprochement et de ce qui précède que, relativement à un point quelconque ou pôle pris pour centre de projection, deux arcs opposés d'un même cercle, ou d'une même section conique (242 et 244), peuvent être regardés comme la projection ou perspective l'un de l'autre, dans le sens ci-dessus indiqué (246). Quand, en outre, le point que l'on considère se confond avec le centre de la courbe, la projection devient similitude, ou, plus exactement encore, symétrie; la sécante commune ou axe de concours passe à l'infini : c'est par conséquent la polaire du centre de la courbe (117).

Arrêtons-nous un instant à l'examen de quelques-unes des conséquences qui découlent du cas général (245) où l'on envisage deux circonférences de cercle quelconques (C) et (C'), *fig.* 38, situées dans un même plan.

249. Il en résulte en premier lieu que, l'un quelconque S des centres de similitude de ces cercles étant donné, on en peut déduire simultanément, et par une construction très-simple, les deux sécantes communes qui lui appartiennent. En effet, si, du point S dont il s'agit, on mène deux transversales arbitraires SA, SB rencontrant ces cercles, la première en A et E, A' et E' respectivement, la seconde aux points B et D, B' et D' correspondants aux premiers, puis qu'on trace indéfiniment les cordes qui joignent deux à deux les points qui appartiennent à un même cercle :

1° *Les cordes* AB *et* A'B', DE *et* D'E', *etc., qui sont homologues directes* (243), *seront parallèles et concourront sur la sécante, à l'infini, commune aux deux cercles.*

2° *Les cordes* AB *et* D'E', DE *et* A'B', *etc., qui sont homologues inverses* (243), *iront, au contraire, concourir sur la sécante commune à distance finie, ou sur l'axe radical des deux cercles.*

250. On pourrait ne tracer ou ne se donner qu'une seule transversale SA, et alors, en menant les tangentes aux points A et E, A' et E' qui lui correspondent respectivement sur les deux cercles, il arriverait encore que :

1° *Celles* AP *et* A'P', EP *et* E'P', *qui sont homologues directes, seraient parallèles ou iraient concourir sur la sécante à l'infini, commune aux deux cercles.*

2° *Celles* AP *et* E'P', EP *et* A'P', *qui sont homologues inverses, iraient, au*

contraire, se rencontrer sur la sécante commune ordinaire des deux cercles, ou leur axe radical.

251. Ces dernières relations, parfaitement analogues à celles qui ont lieu pour le cas où les cercles sont dans l'espace, et ont une sécante commune réelle ou idéale (66), conduisent immédiatement à la réciproque suivante :

Si, d'un point quelconque de l'une ou de l'autre sécante commune au système de deux cercles quelconques tracés sur un plan, on mène des tangentes à chaque cercle respectif; qu'on joigne ensuite deux à deux, par des lignes droites, les points de contact qui appartiennent à des cercles différents, les unes iront concourir au centre de similitude directe, les autres au centre de similitude opposée des deux cercles dont il s'agit.

252. Ainsi, non-seulement on peut construire les sécantes communes à deux cercles décrits sur un plan, quand on se donne un de leurs centres de similitude, ou simplement une droite quelconque passant par ce centre, mais on peut aussi déterminer simultanément les deux centres dont il s'agit, au moyen d'un seul point appartenant à l'une de ces sécantes.

On peut même obtenir directement un second point de cette sécante, et par conséquent sa direction indéfinie, sans avoir recours nullement aux centres de similitude donnés par la construction qui précède. Il est évident, en effet, que les cordes de contact qui sont, sur chaque cercle respectif, les polaires du point pris à volonté sur l'une des sécantes communes, sont des droites à la fois homologues par rapport aux deux centres de similitude, dont l'espèce est indiquée par la nature de la sécante que l'on considère en particulier, c'est-à-dire qu'elles sont directes, si le point donné est pris sur la sécante commune à l'infini, et inverses dans le cas contraire; donc ces deux cordes ou polaires, étant homologues, vont concourir réciproquement (249) en un point de la sécante même d'où elles proviennent.

Cette conséquence revient d'ailleurs au théorème de l'article 82, dont elle offre ainsi une démonstration simple et nouvelle.

253. On remarquera que, quand le point d'où partent les tangentes est précisément celui qui appartient à la fois aux deux sécantes communes des cercles, lequel est placé à l'infini, la construction ci-dessus cesse d'être possible, ou plutôt elle devient illusoire dans son objet; il est évident, en effet, que les cordes de contact ou polaires correspondantes cessent de s'entrecouper et se confondent, pour la direction, avec la ligne CC' des centres des deux cercles proposés.

La même remarque doit s'appliquer au cas où l'on se donne seulement (250) une transversale SA, passant par l'un S des centres de similitude des deux cercles, pour déterminer leurs sécantes communes; car, si cette transversale se confond avec la ligne des centres CC', les tangentes AP, E'P', etc., qui lui correspondent sur les deux cercles, deviendront évidemment à la fois parallèles entre elles et à la sécante commune ordinaire : c'est-à-dire qu'elles ne donneront que le point qui appartient à la fois à cette sécante et à celle qui est à l'infini. Nous verrons d'ailleurs bientôt (258) comment on peut, dans le cas général, déterminer directement le centre de similitude S, au moyen de la transversale SA qui y passe, sans recourir nullement à la construction des sécantes communes.

254. Quoi qu'il en soit, il résulte de ce qui précède, et de ce que les deux centres de symétrie ou de figure des deux cercles sont les pôles (248) de la sécante qui leur est commune à l'infini, qu'une seule de ces six choses étant donnée : les deux centres de symétrie, les deux centres de similitude, ou deux droites passant respectivement par ces centres (250), les deux sécantes communes, ou deux points appartenant respectivement à ces sécantes (252), les cinq autres s'ensuivent nécessairement par des constructions très-simples, et qui n'exigent toutes que l'emploi de la simple ligne droite ou de la règle, quand les deux cercles sont donnés et décrits sur un même plan.

En effet, nous avons enseigné dans le Chapitre précédent les moyens de construire linéairement, soit (187, 206) des tangentes passant par des points pris au dehors ou sur le périmètre d'une section conique donnée et décrite, soit (197) des droites parallèles à des parallèles déjà tracées, c'est-à-dire allant concourir avec elles à l'infini sur le plan de la figure. D'ailleurs, le centre de l'un des deux cercles proposés étant donné, on en déduit sans peine autant de systèmes de droites parallèles qu'on veut ou de droites concourant, deux à deux, sur la sécante à l'infini commune aux cercles dont il s'agit; car tout consiste évidemment à mener par ce centre des diamètres quelconques, et à joindre ensuite leurs extrémités par des droites, dont les opposées seraient nécessairement parallèles.

255. Il arrive fort souvent que deux circonférences données et décrites sur un plan s'entrecoupent en deux points ou se touchent; on pourra donc alors déterminer leurs centres de similitude et de symétrie au moyen des constructions qui précèdent, le tout sans employer d'autre instrument qu'une règle; on pourra même construire des parallèles ou des perpendiculaires à

des droites données, partager en parties égales des arcs et des angles donnés, etc., en observant que le diamètre, perpendiculaire à une droite donnée sur le plan d'un cercle, renferme le pôle de cette droite, divise en deux parties égales la corde et l'arc qui lui correspondent, et que les tangentes à ses extrémités sont parallèles à cette même droite, etc.

Ces choses auraient encore lieu si, les cercles ne se rencontrant pas, on se donnait un point de la sécante commune à l'infini ou deux parallèles quelconques, puisqu'on en déduirait aisément (254) les centres de symétrie de ces cercles. Mais il n'en serait plus ainsi évidemment du cas où l'on n'aurait à sa disposition que la circonférence d'un seul cercle avec un système de parallèles quelconque; car il serait impossible d'obtenir, avec la règle seule, d'autres diamètres que celui qui a pour pôle le point à l'infini de ces parallèles. Pour en obtenir un second, il faudrait un nouveau système de parallèles différemment inclinées, c'est-à-dire que, même avec un cercle donné et décrit sur un plan, dont le centre est d'ailleurs inconnu, il est impossible de construire des droites parallèles à des droites données, ou d'obtenir des points de la droite à l'infini du plan, autrement qu'en se donnant un parallélogramme sur le plan de ce cercle, ou deux points quelconques de la droite dont il s'agit (198).

Sous ce rapport donc, on n'est guère plus avancé avec un cercle que si l'on n'en avait point du tout; mais aussi, le centre étant une fois connu, on pourra résoudre, avec ce cercle, des questions qu'on ne résoudrait pas avec le simple parallélogramme, questions déjà indiquées ci-dessus, et dont quelques-unes ont occupé d'une manière spéciale l'ingénieux Lambert, à la fin de son *Traité de perspective* (197, note). Nous nous proposons, au surplus, de revenir dans le Chap. Ier, Sect. III, d'une manière générale, sur ces diverses réflexions, en donnant des moyens de construire linéairement tous les problèmes du second degré, au moyen d'un seul cercle dont le centre est assigné et le périmètre tracé.

256. Retournons maintenant aux considérations d'où nous sommes partis (249) et à la *fig.* 38 qui les concerne. D'après la théorie des pôles (194 et 248), les points H, I où se croisent, deux à deux, respectivement les cordes AB et DE, AD et BE, et le point P où concourent les tangentes AP et EP du cercle (C), c'est-à-dire le pôle de SA, sont situés sur la polaire HP du centre de similitude S, d'où ces cordes et ces tangentes proviennent : il en est de même évidemment des points H', I' et P', qui sont les croisements des cordes et des tangentes du cercle (C') homologues aux premières; ces

points sont pareillement sur la polaire du centre de similitude S, relative à ce cercle. Mais chacun des premiers points est évidemment à la fois homologue direct et inverse par rapport à celui qui lui correspond dans l'autre cercle, puisque les deux systèmes de cordes ou de tangentes dont ils proviennent sont eux-mêmes dans ce cas (243); de plus, les deux séries de points semblables comprennent évidemment tous ceux qui jouissent de cette propriété par rapport au centre de similitude S. Donc :

Tous les points du plan de deux cercles, qui sont à la fois homologues directs et inverses par rapport à l'un de leurs centres de similitude, pris en particulier, sont distribués respectivement sur deux droites, polaires de ce centre de similitude, lesquelles sont ainsi elles-mêmes à la fois homologues de l'une et de l'autre espèce.

257. Les deux droites HP, H'P' sont évidemment parallèles et concourent à l'infini au point de l'intersection des deux sécantes communes aux cercles (C) et (C'); je dis, de plus, qu'elles sont symétriquement placées de part et d'autre de celle KM de ces sécantes qui est à distance finie. En effet, les quatre tangentes aux points A, E, A', E', appartenant à la transversale SA, forment, par leurs intersections mutuelles, un parallélogramme PKP'L, dont une diagonale KL se confond (250), pour la direction, avec la sécante en question, et dont l'autre, terminée aux points P et P' appartenant aux polaires du centre de similitude S, se trouve ainsi divisée en deux parties égales par cette sécante. Il suit de là évidemment (88, 3°) que :

Les polaires de l'un quelconque des centres de similitude de deux cercles sont réciproques *l'une de l'autre, dans le sens de l'article* 84, *et forment avec les deux sécantes communes à ces cercles un faisceau de quatre droites harmoniques.*

258. Enfin, si l'on remarque que les points P et P', pôles de la transversale SA par rapport à chaque cercle respectif, sont nécessairement, d'après ce qui précède, à la fois homologues de l'une et de l'autre espèce, quelle que soit la position de cette transversale, on en conclura que :

Les pôles de toute droite passant par l'un des centres de similitude de deux cercles sont homologues et se trouvent, comme tels, placés sur une droite concourant réciproquement en ce centre.

Cette propriété est tellement caractéristique, que, lorsqu'elle a lieu pour deux cercles et un point situés dans un plan commun, il faut nécessairement que ce point soit un de ceux où concourent les tangentes communes à ces cercles. Il est, en effet, évident que la transversale qui passe par ce point

ne peut devenir tangente à l'un des cercles, sans le devenir en même temps à l'autre; car les deux pôles correspondants se trouvent alors à la fois sur cette transversale.

259. Cette démonstration n'est, il est vrai, satisfaisante pour tous les cas qu'autant que l'on admet le principe de continuité; mais, d'après la remarque à laquelle elle donne lieu, le point que l'on considère doit être ou tout à fait extérieur ou tout à fait intérieur aux deux cercles proposés : dans le premier cas, ce point est réellement un point de concours des tangentes communes; dans le second, la discussion directe apprend que ce point est nécessairement placé sur la ligne des centres de figure; et, si l'on abaisse alors de ces centres deux perpendiculaires sur une transversale quelconque dirigée vers le point donné, elles passeront par les pôles correspondants de cette transversale; or on conclut immédiatement des triangles semblables, et de ce que chaque rayon est moyen proportionnel entre la distance du centre au pôle et à la transversale, que ces rayons sont entre eux comme les distances des deux centres au point donné, propriété qni ne convient évidemment qu'aux seuls centres de similitude des deux cercles.

La difficulté que nous venons de rencontrer provient de ce qu'il existe d'autres points que les centres de similitude directe et inverse, qui jouissent de la propriété examinée; car on peut démontrer, et nous démontrerons plus tard directement, que chacun des six points de concours des tangentes en général communes à deux cercles jouit, à l'égard de ces cercles, de la propriété énoncée, propriété que nous n'avons encore établie que pour les seuls points de concours des tangentes intérieures et des tangentes extérieures communes, c'est-à-dire pour les centres de similitude des cercles.

260. Nous avons beaucoup insisté sur ce théorème réciproque, parce qu'il nous sera utile par la suite, et afin de montrer par un nouvel exemple combien l'admission ouverte du principe de continuité en Géométrie peut abréger et rendre faciles les démonstrations et les recherches. Dans des cas plus compliqués, l'avantage de cette admission est bien autrement évidente, et ce serait à ne plus finir, ce serait vouloir poser des bornes aux progrès ultérieurs de la Géométrie, que de s'astreindre à recommencer ainsi, dans chaque cas, la démonstration des diverses propriétés qui se présentent.

Au surplus, la propriété qu'ont les pôles d'une transversale quelconque, passant par le centre de similitnde de deux cercles, d'être homologues et, comme tels, placés sur une autre droite passant réciproquement par ce centre, n'est point particulière à ces sortes de points; elle appartient évidem-

ment (241 et 244) aux points où se coupent respectivement deux systèmes de cordes ou de droites homologues de l'une ou de l'autre espèce, aux pôles respectifs de ces droites, etc., lesquels sont nécessairement eux-mêmes homologues de l'espèce que l'on considère (243), c'est-à-dire que :

Les points homologues quelconques, soit directs, soit inverses, sont nécessairement sur des droites dirigées vers le centre de similitude correspondant des deux cercles.

261. Nous terminerons ce sujet par l'examen de quelques-unes des propriétés, déjà connues, du système de deux cercles et de leur centre de similitude, en faisant voir comment elles se rattachent toutes à celles qui précèdent.

Puisque deux cordes homologues inverses quelconques, telles que AB et D'E', DE et A'B', etc. (*fig.* 38), vont concourir sur la sécante commune ordinaire MN des deux cercles (C) et (C'), les quatre extrémités de ces cordes appartiennent à un autre cercle (71), qui devient tangent à la fois aux proposés, quand ces cordes sont nulles ou infiniment petites; et réciproquement, quand un cercle touche à la fois les cercles (C) et (C'), les tangentes aux points de contact concourent sur la sécante MN ; et par conséquent (251) ces tangentes et ces points sont nécessairement homologues inverses par rapport à l'un des deux centres de similitude, dont l'espèce est d'ailleurs déterminée par la nature du contact (*).

262. Il résulte de ces théorèmes une propriété remarquable du centre de similitude de deux cercles, et qui consiste en ce que le rectangle des distances SE et SA' de ce centre à deux points homologues inverses quelconques E et A', appartenant aux deux cercles, est constant; ce qui peut, au reste, se déduire directement de la similitude des deux cercles; car, pour deux points homologues directs A et A', on a $SA' : SA = \text{const}^e.$; d'ailleurs on a aussi $SA . SE = \text{const}^e.$; donc $SA'.SE = \text{const}^e.$

263. De cette propriété du centre de similitude on déduirait immédiatement toutes celles qui précèdent; elle montre en particulier que, bien qu'un cercle quelconque, tracé dans le plan de deux cercles donnés (C) et (C'), détermine deux cordes qui concourent (71) sur la sécante commune ordinaire de ces cercles, ces cordes ne sont cependant point en général homo-

(*) Il est visible (242) que, quand le contact est de même espèce, ou que le cercle en question touche à la fois extérieurement ou intérieurement les proposés, le centre de similitude correspondant est direct; et qu'il est opposé, ou inverse, quand le contraire arrive.

logues inverses; et que, pour qu'elles le soient, il est nécessaire encore que le produit constant des segments formés, à partir de l'un des centres de similitude, sur une sécante quelconque de ce cercle, soit égal à celui ci-dessus des segments qui correspondent à deux points homologues inverses quelconques relatifs à ce même centre. C'est ce qui aurait lieu, par exemple, si ce cercle passait déjà par deux points de cette espèce, c'est-à-dire que :

« Si, par deux points E et A' homologues inverses par rapport à l'un des » centres de similitude S de deux circonférences de cercle (C) et (C'), on mène » une autre circonférence quelconque, elle ira rencontrer les premières en » deux nouveaux points D et B', qui seront eux-mêmes homologues inverses » par rapport à ce centre. »

264. Pareillement, tout cercle qui coupe orthogonalement les cercles (C) et (C') ayant son centre sur la sécante commune MN (73), ses points d'intersection avec les proposés sont les points de contact des tangentes égales issues de ce centre, et par conséquent, pris dans un certain ordre, ces points de contact sont (251) deux à deux homologues inverses, soit par rapport à S, soit par rapport à S'.

265. Supposons que, du point S comme centre, avec un rayon moyen proportionnel entre les segments SA', SE relatifs à deux points homologues inverses quelconques A' et E de deux cercles, on décrive un nouveau cercle que j'appelle (S), il coupera à angles droits tous ceux qui viennent de nous occuper et que je désigne en général par (*c*); donc (264) il fera partie de la suite que déterminent les cercles (C) et (C'), c'est-à-dire qu'il aura même sécante commune ordinaire MN avec eux.

266. Réciproquement tout cercle qui coupera orthogonalement le cercle (S) fera nécessairement partie (263) du système des cercles (*c*), c'est-à-dire qu'il ira déterminer en général, sur les proposés (C) et (C'), quatre points qui, pris dans un certain ordre, seront deux à deux homologues inverses par rapport à S.

267. Enfin deux cercles quelconques de la suite (*c*) sont évidemment tels, que leur sécante commune ordinaire vient passer par le centre de similitude correspondant S; car, d'après ce qui précède, le cercle (S), qui a ce point pour centre de figure, est à la fois orthogonal à ceux dont il s'agit (74).

268. Le cas particulier où les deux cercles (*c*) que l'on considère sont tangents (261) aux cercles (C) et (C') est surtout remarquable, en ce qu'il y a réciprocité complète entre le système qu'ils forment et celui de ces der-

niers ; car les cercles (C) et (C′) sont, à leur tour, tangents de la même espèce par rapport à ces cercles : il en résulte, par exemple, que le centre de similitude, relatif aux deux cercles tangents (c) et à l'espèce particulière du contact de ces cercles, est situé réciproquement sur la sécante commune aux deux autres (C) et (C′), etc.

On remarquera, au surplus, que toutes les propriétés qui précèdent sont indépendantes de l'espèce particulière du centre de similitude que l'on considère, c'est-à-dire qu'elles ont lieu de la même manière pour le centre de similitude inverse S′.

269. Les considérations qui viennent de nous occuper conduisent, d'une manière si naturelle et si simple, aux propriétés connues du cercle tangent à trois autres sur un plan, que nous ne pouvons nous refuser au plaisir de les rapporter ici, quoiqu'elles appartiennent à un sujet tant de fois traité par de savants et profonds géomètres (*). D'ailleurs, comme ces propriétés se rattachent d'une manière intime à la théorie des sécantes et tangentes communes, et qu'elles peuvent s'étendre, ainsi que nous le verrons par la suite, aux sections coniques en général, à l'aide des principes de projection posés dans la première Section, leur examen rentre essentiellement dans l'objet de cet ouvrage.

Considérons donc le système de trois cercles quelconques (C), (C′), (C″) (*fig.* 39), situés dans un même plan, ainsi que le système complet des six centres de similitude qui leur appartiennent deux à deux, et divisent harmoniquement (237) les côtés respectifs du triangle CC′C″, qui a pour sommets les centres de figure des trois cercles. On prouve facilement, et de plusieurs manières, cette propriété, due à Monge, que les six points dont il s'agit sont distribués, trois par trois, sur quatre lignes droites appelées, pour

(*) La théorie des contacts des cercles et des sphères, et la solution des problèmes qui s'y rapportent, ont été le sujet des recherches d'Apollonius, de Viète, de Fermat, de Newton, d'Euler, de Fuss, etc.; elles ont été reprises ensuite et traitées dans toute leur généralité par MM. Monge, Carnot, Dupuis, Lancret, Dupin, Hachette, Cauchy, Gaultier, Poisson, Français, Gergonne, J. Binet, etc., qui, pour la plupart, sont anciens Élèves ou Professeurs de l'École Polytechnique. *Voyez* plus particulièrement à ce sujet les *Annales de Mathématiques*, la *Correspondance* et le *Journal de l'École Polytechnique.*

Voici ce que Pascal écrivait, en 1654, à une Société de savants qui avait pris le titre d'*Académie de Paris*, en lui rendant compte de quelques ouvrages dont il s'occupait :

« Promotus Apollonius Gallus : *Id est tactiones circulares, non solùm quales veteribus notæ, et à Vietâ repertæ, sed et adeò ulterius promotæ ut vix eumdem patientur titulum.* »

« Tactiones sphericæ, *pari amplitudine dilatæ, quippe eâdem methodo tractatæ, etc., etc.* » (*Œuvres* de Pascal, t. IV, édition de 1779.)

cette raison, *axes de similitude* des trois cercles proposés : c'est-à-dire que ces six points jouissent exactement des propriétés indiquées art. 162.

Par exemple, si l'on considère deux triangles ayant pour sommets respectifs les centres et les extrémités de trois rayons parallèles quelconques des trois cercles, les points de concours des côtés opposés aux sommets qui appartienneut au même rayon seront tous trois situés sur une même droite (168); or ces points font évidemment partie (237) des six centres de similitude qui correspondent aux trois cercles proposés.

270. Cela posé, considérons, en particulier, celui des quatre axes de similitude de ces cercles dont la direction renferme à la fois les trois centres de similitude directe S, S', S'', et correspond évidemment (261, note) aux cercles (c) et (c') qui ont à la fois un contact de même espèce avec les cercles proposés ; ce que nous dirons de cet axe et de ces cercles, en particulier, sera immédiatement applicable à chacun des trois autres axes et au système des deux cercles tangents qui lui correspondent respectivement : or on conclut, sans plus de raisonnements, des principes établis dans ce qui précède, que :

« 1° La sécante commune ordinaire des cercles tangents (c), (c'), ou TT'T'', ΘΘ'Θ'', passe à la fois (267) par les centres de similitude S, S', S'', et se confond par conséquent avec l'axe de similitude SS'S'' des cercles proposes. »

« 2° Si l'on trace les cercles (S), (S'), (S''), qui appartiennent (265) aux proposés, pris deux à deux, ils couperont à la fois orthogonalement les cercles (c) et (c'), et auront la ligne cc' de leurs centres, laquelle est perpendiculaire à SS'', pour sécante commune (74). »

« 3° Les trois points de contact T, T', T'', ou Θ, Θ', Θ'', qui appartiennent à chaque cercle tangent (c) ou (c'), sont (261) deux à deux et consécutivement homologues inverses par rapport aux centres de similitude S, S', S'', et par conséquent il en est de même des cordes de contact TΘ, T'Θ', T''Θ'', qui leur correspondent sur chaque cercle proposé. »

« 4° Ces trois cordes vont concourir (268) au centre de similitude s des cercles tangents (c) et (c'), lequel, devant se trouver aussi à la fois (249) sur les trois sécantes communes ordinaires des proposés, n'est autre chose que le point d'intersection mutuelle de ces sécantes, ou le centre radical des cercles (C), (C'), (C'') dont il s'agit. »

« 5° Les tangentes communes aux extrémités de chaque corde respective TΘ, T'Θ', T''Θ'', étant inversement homologues (268) par rapport aux cercles (c), (c') et à leur centre de similitude s, vont se rencontrer deux à deux en

des points P, P′, P″ de la sécante commune SS″ (250) de ces cercles; c'est-à-dire que ces points, qui sont les pôles des cordes de contact dont il s'agit par rapport aux cercles proposés (C), (C′), (C″), sont rangés sur l'axe de similitude SS′S″ de ces cercles. »

« 6° Les polaires ou cordes de contact AB, A′B′, A″B″, relatives aux trois cercles proposés et à leur centre radical *s*, tendent (196) aux pôles respectifs P, P′, P″ des cordes TΘ, T′Θ′, T″Θ″ qui passent (4°) par ce centre; leurs six extrémités appartiennent, en outre, au cercle qui a *s* pour centre et rencontre à la fois orthogonalement les proposés; et ce cercle coupe, en même temps (264, 265), à angles droits ceux (S), (S′), (S″) désignés ci-dessus, c'est-à-dire (2°) qu'il fait partie de la suite des cercles tangents (*c*), (*c*′) qui ont la droite SS″ pour sécante commune. »

« 7° Enfin les pôles π, π′, π″ de l'axe de similitude SS′S″, par rapport à chacun des cercles proposés, sont deux à deux homologues (258) relativement aux centres de similitude S, S′, S″, et se trouvent d'ailleurs placés (196) sur les cordes de contact TΘ, T′Θ′, T″Θ″, polaires (5°) des points P, P′, P″ qui leur correspondent respectivement sur l'axe de similitude dont il s'agit. »

271. Voilà, à peu de chose près, tout ce qu'on connaît d'intéressant sur les cercles tangents à trois autres sur un plan; les propositions 4ᵉ, 5ᵉ et 6ᵉ donnent une solution du problème correspondant, analogue à celle qu'on doit à M. Gaultier de Tours (*), et qui a sur elle l'avantage d'être plus générale et de n'exiger que l'emploi de la règle, quand les cercles donnés sont décrits et qu'on a seulement (254), soit un point de l'une des sécantes communes, ou deux parallèles quelconques, soit une droite passant par l'un des centres de similitude, soit enfin le centre de figure de l'un des cercles proposés. Les propositions 4ᵉ et 7ᵉ donnent une autre solution très-élégante, qui revient, quant au fond, à celle qu'a présentée, du même problème, M. Gergonne (**), et qui mérite d'autant plus d'être remarquée que la marche purement algébrique qu'a suivie ce géomètre est entièrement neuve, et paraît susceptible de s'appliquer à un grand nombre de questions réputées difficiles dans l'état actuel de l'Analyse. Enfin la propriété de l'article 257, combinée avec celles que nous venons de citer en dernier lieu, fournirait encore une troisième solution fort simple du problème du cercle tangent à trois autres, également due à M. Gergonne.

(*) XVIᵉ Cahier du *Journal de l'École Polytechnique*, p. 201.
(**) Tome IV des *Annales de Mathématiques*, p. 253.

Les considérations générales qui précèdent vont nous conduire à de nouvelles propriétés du cercle tangent à trois autres sur un plan, et qui ne le cèdent en rien aux premières, sous le rapport de l'élégance et de la simplicité des constructions qui en dérivent. (*Errata* et *Annotations*.)

272. Nous venons de voir que les cercles (c) et (c'), tangents à la fois aux proposés, et le cercle (s) qui leur est orthogonal et a son centre au point s, avaient l'axe de similitude SS'S" pour sécante commune ordinaire; mais, au moyen des articles **263**, **264** et suivants, on peut facilement déterminer un cercle quelconque de la suite qu'ils forment, sans la connaissance préalable du centre radical s.

Soit pris arbitrairement un point A (*fig.* 40) sur la circonférence de (C); soit A' le point inversement homologue à A sur (C'); soit A" le point inversement homologue à A' sur (C"); par les points A, A', A", ainsi obtenus, faisons passer une circonférence de cercle (c''), elle rencontrera de nouveau les proposées aux points respectifs B, B', B", et appartiendra nécessairement à la suite des cercles (c) et (c') qui ont SS'S" pour sécante commune. En effet, d'après la construction, ce cercle coupe orthogonalement (**263** et **265**) les cercles (S) et (S"), de même que le font déjà les cercles (c) et (c') dont il s'agit; ce qui ne peut être, à moins (**73**) qu'il n'ait la droite SS' pour sécante commune avec eux; on voit, de plus, qu'il devra couper aussi à angles droits le troisième cercle (S') qui appartient à la même suite (**270**) que les deux autres; c'est-à-dire que le cercle (c'') joue, à l'égard des cercles (C) et (C"), le même rôle qu'à l'égard des cercles C et C', C' et C" respectivement.

273. Il résulte de là immédiatement et de la construction du cercle dont il s'agit que :

« Si l'on trace les droites BA", BB', B'B", B"A, ainsi que les cordes AB, A'B' et A"B" qui sont communes à ce cercle et à chacun des proposés :

» 1° Chacune des premières ira concourir (**263** et **266**) au centre de similitude S, S' ou S" des deux cercles auxquels cette droite correspond; en sorte que les trois autres droites ou cordes AB, A'B', A"B" seront, deux à deux, inversement homologues par rapport à ces centres respectifs. »

« 2° Ces trois cordes et toutes leurs semblables, appartenant aux différents cercles de la suite (c), (c'), (s), (c'') qui ont l'axe de similitude SS'S" pour sécante commune, vont concourir respectivement (**71**) aux points invariables P, P', P", pôles (**270**, 5°) des cordes de contact qui, sur chaque cercle proposé, appartiennent aux deux cercles tangents (c) et (c'). »

« 3° La figure AA'A"BB'B"A, inscrite au cercle (c'') que l'on considère

en particulier et dont les sommets opposés s'appuient, deux par deux, sur les cercles proposés, forme naturellement un hexagone fermé, qui, d'après ce qui précède, a les centres de similitude S, S', S″ pour points de concours des côtés respectivement opposés, et dont les diagonales AB, A'B', A″B″ des sommets pareillement opposés, vont sans cesse concourir aux trois points P, P', P″ déjà désignés ci-dessus. »

274. D'après cela, réciproquement :

« Trois cercles quelconques étant donnés sur un même plan, si l'on essaye, à volonté, de construire un hexagone dont les sommets successifs s'appuient alternativement sur chacun de ces cercles, et soient, deux à deux, consécutivement homologues inverses par rapport à trois quelconques de leurs centres de similitude appartenant à une même droite ou axe, il arrivera que :

» 1° Cet hexagone viendra naturellement se fermer au point pris pour sommet de départ. »

« 2° Cet hexagone sera inscriptible à un cercle ayant l'axe de similitude correspondant pour sécante commune avec les deux cercles tangents qui appartiennent à cet axe. »

« 3° Les diagonales qui joignent les sommets respectivement opposés de cet hexagone viendront rencontrer l'axe de similitude dont il s'agit aux pôles invariables des cordes qui joignent, sur chaque cercle proposé, les points de contact des cercles tangents relatifs à cet axe. »

275. On a donc un moyen aussi simple que commode pour construire simultanément, et avec la règle seule, les points P, P', P″, relatifs à un axe de similitude donné SS'S″ et aux deux cercles tangents (c) et (c') qui lui appartiennent; traçant ensuite les polaires qui leur répondent respectivement dans les cercles proposés (C), (C'), (C″), elles iront déterminer, par leurs intersections avec ces cercles, les six points de contact des deux cercles tangents dont il s'agit, et se rencontreront, de plus, en un point unique s qui, d'après ce qui précède (270), sera le centre radical de trois cercles proposés.

276. Si l'on se proposait seulement de déterminer le pôle P et la corde de contact qui lui correspond dans le cercle (C), la description de l'hexagone deviendrait inutile; car si, au lieu de tracer cet hexagone tout entier, on s'arrête aux trois premiers côtés AA', A'A″, A″B, en prenant pour sommet de départ un point quelconque A du cercle que l'on considère, on formera naturellement une portion de polygone AA'A″B, dont les sommets extrêmes A et B, ceux qui correspondent à (C), appartiendront à l'une des diagonales

de l'hexagone ci-dessus, et seront par conséquent situés sur une droite passant par le pôle P que l'on cherche, nouvelle propriété qui peut s'exprimer de cette manière :

« Si l'on construit, à volonté, une portion de polygone AA'A''B composée de trois côtés, dont les sommets soient deux à deux et consécutivement homologues inverses par rapport aux centres de similitude S, S', S'', placés en ligne droite, les sommets extrêmes A et B, appartenant au cercle (C), seront en général distincts entre eux; cela posé, si l'on trace la droite AB qui les renferme à la fois, elle ira sans cesse concourir au pôle P qui correspond à l'axe de similitude et au cercle dont il s'agit. »

277. On pourrait, par un semblable procédé, déterminer les points P' et P'' et les cordes de contact qui leur appartiennent dans les cercles (C') et (C''); mais il est clair, d'après ce qui précède (273), que, si l'on détermine sur ces derniers cercles les cordes inversement homologues à celle qu'on aura déterminée sur (C), elles joueront, par rapport à eux, le même rôle que celle-ci par rapport à (C), c'est-à-dire qu'elles seront, pour ces cercles respectifs, les cordes de contact relatives aux cercles tangents (c) et (c').

Cette construction, d'ailleurs moins symétrique que la première, a sur elle l'avantage d'exiger le tracé d'un moins grand nombre de lignes, attendu qu'on n'a à opérer que sur un seul des points P, P', P'', qui ont les cordes cherchées pour polaires respectives. L'une et l'autre, au surplus, sont fort simples, puisqu'elles dispensent de construire les sécantes communes ou axes radicaux qui appartiennent aux trois cercles proposés, combinés deux à deux. On peut même éviter entièrement l'emploi direct des axes de similitude, au moyen du procédé qui suit.

278. Ayant choisi, à volonté, trois centres de similitude situés en ligne droite et appartenant aux trois cercles (C), (C'), (C'') combinés deux à deux, prenez sur l'un (C) de ces cercles deux points quelconques; cherchez leurs homologues inverses sur (C'), puis les homologues inverses de ceux-ci sur C'', et ainsi de suite, en procédant constamment dans le même ordre : à la sixième opération, vous retomberez évidemment (274) sur les premiers points. On n'aura donc, en tout, que dix lignes droites à tracer, pour obtenir, sur chaque cercle, quatre points. Cela posé, si l'on trace les quatre cordes qui réunissent, deux à deux, ceux de ces points qui ne proviennent pas d'une même combinaison ou d'un même premier point, ces cordes, ainsi obtenues dans chaque cercle, détermineront, par leurs intersections mutuelles, deux nouveaux points appartenant à la corde qui renferme les

deux points de contact demandés, laquelle sera ainsi parfaitement déterminée, aussi bien que ces points, pour chacun des cercles proposés.

En effet, les premières opérations reviennent à construire deux hexagones semblables à celui de l'article 274 : or, si l'on traçait les cordes qui, dans chaque cercle, appartiennent aux points d'une même combinaison, elles seraient les diagonales respectives de ces hexagones, et, comme telles, iraient concourir en celui des points P, P′, P″, qui est le pôle de la corde de contact qu'on cherche sur ce cercle; donc les quatre autres cordes, qui sont indépendantes entre elles, ou ne proviennent pas d'une même combinaison, vont se croiser (194) sur la corde de contact dont il s'agit.

279. Ainsi, non-seulement cette construction donnera, comme celles qui précèdent, les cordes de contact, et par suite (275) le centre radical *s*, relatifs aux cercles proposés, mais elle donnera aussi chacun des points P, P′, P″, qui sont les pôles respectifs de ces cordes sur l'axe de similitude que l'on considère en particulier.

En répétant les unes et les autres de ces diverses opérations pour chacun des quatre axes de similitude, elles donneraient les cordes et points de contact qui appartiennent aux huit circonférences tangentes aux proposées: mais, si l'on remarque (270, 6°) que la polaire du centre radical *s*, par rapport à l'un quelconque de ces derniers cercles, rencontre les quatre axes dont il s'agit aux points qui sont précisément les pôles des quatre cordes de contact relatives à ce cercle, il sera beaucoup plus simple, une fois qu'on aura obtenu par les constructions précédentes les premières cordes de contact et le point *s*, de s'en servir pour déterminer simultanément les systèmes de trois autres. Ces diverses constructions n'exigent d'ailleurs que l'emploi d'une simple règle, pour les circonstances déjà spécifiées plus haut (271).

280. On aura remarqué que les cordes de contact TΘ, T′Θ′, T″Θ″ (*fig.* 39), qui appartiennent à chacun des cercles (C), (C′), (C″), et jouent un si grand rôle dans ce qui précède, sont non-seulement deux à deux consécutivement homologues inverses par rapport aux centres de similitude correspondants S, S′, S″, mais encore telles, que leurs points respectifs jouissent eux-mêmes, trois par trois, de cette singulière propriété; c'est pourquoi l'on peut dire que ces trois droites, et les systèmes de points correspondants, sont *périodiquement homologues inverses*, pour les distinguer des droites et des points qui ne sont simplement que consécutivement homologues de cette espèce, tels que les trois points A, A′, A″ et les tangentes qui leur appartiennent.

On pourrait d'ailleurs étendre cette définition à des périodes composées de

six droites ou de six points, etc.; ainsi, par exemple, les six sommets de l'hexagone AA'A"BB'B" de la *fig.* 40 sont périodiquement homologues inverses (**274**), aussi bien que les six tangentes qui leur correspondent. On voit cependant, par cet exemple même et par celui des diagonales AB, A'B', A"B", que ces diverses définitions comprennent également le cas particulier où trois et six droites forment une période rentrante, sans que, pour cela, tous les systèmes de points qui leur appartiennent soient périodiquement homologues; on pourrait dire que ces droites sont périodiquement homologues du second genre. Telles sont encore, par exemple, les tangentes aux trois points de contact de l'un des cercles (c) ou (c'), etc.

281. Cela posé, revenons à nos trois cordes de contact TΘ, T'Θ', T"Θ" (*fig.* 39); on peut aisément démontrer, sans rien emprunter de ce qui précède, et en ne se fondant que sur les propriétés générales du centre de similitude, qu'il n'existe sur le plan des trois cercles (C), (C'), (C"), et relativement à l'axe de similitude SS'S" de ces cercles, que les seules cordes de contact dont il s'agit qui soient périodiquement homologues du premier genre, et que tous les systèmes de trois points semblables appartiennent nécessairement à ces cordes.

En effet, si l'on considère deux systèmes quelconques de points périodiquement homologues, les triangles qui leur correspondent respectivement, ou qui ont pour sommets respectifs ces deux systèmes de points, sont évidemment tels, que les côtés qui se correspondent vont concourir, deux à deux, aux centres de similitude S, S', S" des trois cercles; donc (**168**) les droites qui joignent, dans le même ordre, les sommets opposés à ces côtés, c'est-à-dire celles qui appartiennent à chaque cercle respectif, vont concourir toutes trois en un seul point. Mais ces droites, réunissant des points deux à deux homologues inverses, sont elles-mêmes homologues de cette espèce; donc leur point d'intersection mutuelle doit se trouver à la fois (**245**) sur les sécantes communes ordinaires des cercles proposés, c'est-à-dire qu'il doit se confondre avec le centre radical de ces cercles.

Il suit de là évidemment qu'un seul système de points périodiquement homologues inverses suffit pour déterminer complétement les trois droites dont il s'agit, et que ces droites comprennent par conséquent tous les autres systèmes de points semblables, tels que les trois pôles π, π', π'' de l'axe de similitude SS'S", et les systèmes T, T', T", Θ, Θ', Θ" des points de contact des cercles tangents (c) et (c') aux proposés, lesquels jouissent évidemment (**258** et **261**) de la propriété en question. Or, c'est ce qu'il s'agissait précisément

de démontrer, sans recourir en aucune manière aux principes de l'article 270.

282. En partant de là d'ailleurs, on déduit facilement des moyens d'obtenir autant de points que l'on voudra des droites ou cordes de contact dont il s'agit.

Supposons qu'on choisisse, à volonté, une corde, nommée L, sur (C); soit L' celle qui lui est inversement homologue sur (C'), L" celle qui est inversement homologue à celle-ci sur (C"); soit pareillement M l'homologue inverse de L" sur (C), M', etc. : je dis que les cordes L et M de (C), L' et M' de (C'), L" et M" de (C"), se coupent respectivement en trois points périodiquement homologues inverses, et, comme tels, appartenant aux trois droites ci-dessus désignées, que j'appellerai H, H', H".

En effet, quel que soit le point où la première corde L rencontre la droite H qui lui correspond, son homologue inverse sur L' sera nécessairement aussi sur H', et pareillement l'homologue inverse de celui-ci sur L" appartiendra en même temps à H"; mais, d'après la propriété qu'ont les droites H, H', H", l'homologue du dernier point obtenu sur H" doit se confondre, sur H, avec le point de départ, et, selon ce qui précède, il doit aussi se trouver sur M, qui est homologue inverse de L" sur (C); donc il est à l'intersection de L et de M, c'est-à-dire que le point de rencontre de ces deux cordes appartient nécessairement à la droite H, quelle que soit la position de la corde L, d'où l'on est parti en premier lieu. Or de là suit immédiatement la proposition qu'il s'agissait de démontrer, et qui revient évidemment à l'une de celles exposées ci-dessus (278).

283. On peut, au surplus, démontrer d'une manière également directe que, après la cinquième opération, les mêmes choses reviendront dans le même ordre, c'est-à-dire qu'on retombera continuellement sur les mêmes cordes L, L',..., et que ces cordes seront périodiquement homologues inverses (280). Tout consiste, en effet, à prouver (278) que cela a lieu pour l'une quelconque des extrémités de la première corde L ou pour un point pris arbitrairement sur le cercle (C), ce qui d'ailleurs résulte immédiatement des principes déjà posés art. 274, et dont ce qui suit offrira ainsi une démonstration directe et nouvelle.

Or, si dans les raisonnements et les opérations ci-dessus on substitue des tangentes aux cordes que l'on y considère, il paraîtra évident qu'à la sixième opération, en rapportant la tangente M" sur (C), on devra retomber sur la première tangente L, puisqu'elle doit nécessairement passer par le point

commun à celle-ci et à la tangente M déjà obtenue à la troisième opération; autrement, en effet, il y aurait plus de deux tangentes possibles au même cercle (C), passant par un point donné, ce qui est absurde. D'ailleurs la dernière tangente M″ devra se confondre avec la première L, et non avec l'autre M; car, si elle se confondait avec celle-ci, les points de contact des trois tangentes M, M′, M″ seraient périodiquement homologues, ce qui est également absurde, ou au moins ne peut avoir lieu que pour les seuls points (**281**) où les droites H, H′, H″ rencontrent respectivement les cercles proposés. Donc les six tangentes qui nous occupent sont périodiquement homologues inverses, et par conséquent il en est de même des six points de contact qui leur appartiennent respectivement, dont le premier est d'ailleurs arbitraire.

284. On remarquera, de plus, que les six tangentes qui viennent de nous occuper forment, en les prenant dans leur ordre naturel de succession, et en supposant chacune d'elles terminée à celle qui la précède et la suit immédiatement, un hexagone fermé, dont deux côtés opposés quelconques, et qui appartiennent par conséquent à un même cercle, vont, d'après ce qui précède (**282**), concourir en un point de celle des cordes de contact H, H′, H″ qui est relative à ce cercle, tandis que les diagonales qui joignent les sommets opposés de cet hexagone se confondent respectivement, pour la direction (**250**), avec les trois sécantes communes ordinaires ou les axes radicaux des cercles proposés, combinés deux à deux. Or de là résulte évidemment ce théorème :

« Trois cercles quelconques étant donnés sur un plan, si l'on construit à volonté un hexagone dont les côtés successifs touchent alternativement chacun de ces cercles, et soient deux à deux consécutivement homologues inverses par rapport à trois quelconques de leurs centres de similitude appartenant à un même axe, c'est-à-dire à une même droite, il arrivera que :

« 1° Les six côtés de cet hexagone formeront naturellement un système de tangentes périodiquement homologues, c'est-à-dire un système tel, que le sixième côté sera lui-même l'homologue inverse de celui d'où l'on est parti, et qu'on suppose avoir été pris au hasard. »

« 2° Les diagonales qui joignent les sommets opposés de cet hexagone se confondront respectivement, pour la direction, avec les trois sécantes communes ordinaires des cercles proposés, combinés deux à deux. »

3° Les trois points de concours des côtés opposés de cet hexagone, c'est-à-dire des côtés qui appartiennent à un même cercle, se trouveront

situés respectivement sur les trois cordes invariables qui, dans chaque cercle proposé, renferment les points de contact des deux cercles tangents relatifs à l'axe de similitude que l'on considère en particulier. »

« 4° Pareillement, si l'on se borne à construire les quatre premiers côtés de cet hexagone, c'est-à-dire un quadrilatère dont les côtés soient consécutivement homologues inverses, ou dont les trois premiers sommets s'appuient respectivement sur les sécantes communes correspondantes des cercles proposés, le quatrième sommet, qui appartient aux tangentes d'un même cercle, sera situé constamment sur la corde de contact relative à ce cercle. »

285. De ces propriétés on déduirait immédiatement, par la simple application de la théorie des pôles, celles des articles 273, 274 et 276, auxquelles elles se rapportent : tout consiste, en effet, à considérer l'hexagone qui a pour sommets les points de contact des côtés de l'hexagone ci-dessus, et à observer que les diagonales qui joignent les sommets opposés de cet hexagone, et sont des cordes respectives des trois cercles proposés, ont pour pôles les points de concours correspondants des côtés opposés de l'autre. L'on arrive donc ainsi directement, et en se fondant simplement sur les propriétés générales du centre de similitude et sur celles du pôle qui en dérivent (248), à toutes les constructions qui nous ont occupés précédemment, et qui sont relatives aux différents cercles qui en touchent trois autres donnés sur un plan. Il résulte, en outre, des propriétés qui viennent d'être exposées en dernier lieu, une nouvelle solution, aussi simple qu'élégante, pour résoudre cette sorte de problèmes, et qui a sur les autres l'avantage particulier de ne dépendre directement que des seules sécantes communes aux trois cercles proposés.

286. Il ne serait pas difficile, au surplus, d'étendre les diverses considérations qui précèdent à un nombre quelconque de circonférences de cercle tangentes à deux autres sur un plan; on serait ainsi conduit à des théorèmes sur les polygones, dont ceux qui précèdent ne sont que des cas très-particuliers. En remarquant ensuite que tout ce que nous avons pu dire dans ce Chapitre s'applique immédiatement aux cas où certains cercles deviennent infiniment petits, infiniment grands ou se rapprochent à des distances insensibles, c'est-à-dire se réduisent à des points, dégénèrent en des droites (76 et 95) ou se confondent deux à deux (247), etc., il en résultera une infinité de nouveaux théorèmes et de nouvelles figures, qu'il sera facile de reconnaître par la simple application de la loi de continuité.

287. Considérons, par exemple, le système de trois cercles quelconques situés sur un plan, aussi bien que l'un des quatre axes de similitude qui leur appartiennent, ou plutôt les trois points de concours des tangentes communes à ces cercles, pris deux à deux, et qui sont relatifs à cet axe. Cela posé, imaginons que l'un des cercles dont il s'agit glisse entre les deux tangentes qui lui sont communes avec l'un des deux autres, jusqu'à s'en rapprocher à une distance d'abord infiniment petite, et ensuite nulle, c'est-à-dire jusqu'à se confondre avec le cercle fixe; concevons que, par suite du même mouvement, la dernière circonférence glisse également entre les deux tangentes qui lui sont communes avec le cercle fixe, mais de manière cependant que le centre de similitude qui lui appartient, ainsi qu'au premier cercle variable, reste toujours à la même place, ce qui est évidemment possible; il arrivera nécessairement que cette circonférence se rapprochera sans cesse de celle qui est fixe, et finira par s'y confondre en même temps que l'autre qui en dirige le mouvement.

Or, dans ce nouvel état du système, les divers objets de la figure devront jouir entre eux des mêmes propriétés que dans la figure primitive, pourvu qu'on ait égard aux modifications qui auront pu s'y opérer; donc, si l'on observe que les trois centres de similitude des cercles primitifs peuvent être remplacés par trois points quelconques situés en ligne droite; que pareillement les sécantes communes ordinaires de ces cercles, combinés deux à deux, deviennent trois droites quelconques se coupant en un point unique, pôle de celle qui précède, etc., on déduira immédiatement de ces considérations, et sans qu'il soit besoin de nouveaux raisonnements, toutes les propriétés descriptives des figures inscrites et circonscrites au cercle et aux sections coniques, qui nous ont déjà occupés dans les deux précédents Chapitres.

En considérant un plus grand nombre de cercles tangents, il serait d'ailleurs facile d'en découvrir beaucoup d'autres relatives aux polygones en général; mais, comme nous aurons occasion de revenir sur la plupart d'entre elles par la suite, cette discussion, outre qu'elle ne serait pas ici à sa place, ne présenterait qu'une répétition inutile. Il nous suffira, pour le moment, d'avoir montré comment les propriétés générales du centre de similitude non-seulement conduisent à celles de la théorie des pôles et polaires, mais encore à toutes les autres propriétés qui font le sujet ordinaire de la Géométrie de la règle.

288. Enfin il est essentiel, pour compléter l'objet de ce Chapitre, de revenir sur cette remarque, déjà faite à la fin de l'article 244, que tous les

raisonnements dont nous nous sommes servi pour établir les diverses propriétés des cercles situés sur un même plan s'appliquent directement, à quelques restrictions près, au cas général où l'on remplace ces cercles par des sections coniques quelconques s. et s. p. sur un plan; ce qui peut également s'observer à l'égard des propriétés exposées à la fin du Chapitre II de la Ire Section.

Les restrictions ne portent évidemment que sur ce qui concerne explicitement ou implicitement des grandeurs absolues et déterminées, c'est-à-dire que cela se réduit uniquement à ce qui a été dit sur la relation d'égalité des rectangles correspondant aux sécantes du cercle, et sur l'orthogonalité de deux cercles qui ont réciproquement pour rayons les tangentes égales issues de leurs centres respectifs. Or, pour que les raisonnements subsistent lorsqu'il s'agit de sections coniques quelconques s. et s. p., il suffit de remplacer chaque rectangle par son rapport avec le carré du diamètre qui, dans l'une quelconque des courbes, est parallèle à la sécante d'où provient ce rectangle, et de remarquer que la considération de l'orthogonalité est entièrement inutile à ces raisonnements, et n'y est amenée que pour la simplicité des énoncés.

On peut d'ailleurs, pour le cas des sections coniques s. et s. p., la remplacer par la condition, beaucoup plus générale, que les directions sous lesquelles ces courbes se rencontrent respectivement soient celles des différents systèmes de diamètres conjugués qui leur appartiennent; ce qui pourrait s'exprimer d'une manière plus simple, en disant que ces sections coniques se coupent sous des *angles conjugués :* deux sections coniques ainsi appariées sont, comme on voit, non-seulement s. et s. p., mais encore telles, que le centre de l'une est, relativement à l'autre, le pôle de la sécante commune à toutes deux.

289. On arriverait encore à ces diverses conséquences, mais seulement pour le cas particulier d'ellipses s. et s. p. sur un plan, en observant qu'un tel système de courbes peut toujours être censé provenir d'un système pareil de cercles, au moyen de la projection ordinaire de l'une des figures, sur le plan de l'autre, par des droites parallèles. Il est évident, en effet, que, dans cette projection, les propriétés de la figure primitive demeurent applicables à sa dérivée, ou du moins se modifient de la manière déjà ci-dessus indiquée. Quant aux autres relations qui subsistent individuellement entre chaque cercle et son ellipse de projection, on peut consulter l'article 47 de la Ire Section.

Pour étendre immédiatement ces dernières conséquences au cas où les

sections coniques, au lieu d'être simplement des ellipses, sont quelconques, il faudrait nécessairement avoir recours à la loi de continuité; mais, à l'aide des principes de la projection centrale, nous démontrerons les mêmes choses, dans la Section suivante, d'une manière entièrement directe et générale; bien plus, nous ferons voir dans le Supplément comment les propriétés des cercles, qui nous ont occupés dans ce qui précède, peuvent s'étendre, d'une manière analogue, à des cercles quelconques tracés sur la surface d'une même sphère, à des sphères et des surfaces quelconques du second ordre s. et s. p. dans l'espace, etc.; ce qui a déjà été établi, pour plusieurs d'entre elles, par les géomètres dont les noms ont été rappelés dans le cours de ce Chapitre.

SECTION III.

DES SYSTÈMES DE SECTIONS CONIQUES.

Dans la précédente Section, nous avons cherché à exposer les propriétés fondamentales, et pour ainsi dire élémentaires, des figures composées de lignes droites et de sections coniques, propriétés qui se reproduisent dans presque toutes les recherches géométriques : ce que nous avons ajouté de plus général, dans le dernier Chapitre de cette même Section, touchant les systèmes de lignes du second ordre, ne concerne encore que le cas particulier où ces lignes sont s. et s. p. sur un plan, et ont par conséquent un centre de similitude ; il nous reste maintenant à étendre ces considérations aux sections coniques en général.

Or cette extension ne saurait présenter aucune difficulté sérieuse, d'après les principes des articles **121**, **122** et **138**, joints à ceux des articles **105** et **127** et à toutes les applications qui en ont déjà été faites dans ce qui précède. Nous pourrions, en conséquence, passer de suite à d'autres recherches, si nous n'avions en vue que les propriétés exposées dans le Chapitre III de la IIe Section ; mais nous avons à déduire de ces propriétés des conséquences nouvelles, qu'il nous était impossible de développer de la manière convenable à l'occasion du cas particulier du cercle ; et ces conséquences nous semblent se recommander assez fortement à l'attention des géomètres, par leur utilité, pour que nous puissions consacrer à leur exposition une grande partie de la Section qui va suivre, sans craindre qu'on nous adresse le reproche de trop nous étendre.

Nous nous occuperons d'abord du cas le plus simple : celui où l'on envisage seulement le système de deux sections coniques tracées d'une manière quelconque sur un plan.

CHAPITRE PREMIER.

DU CENTRE D'HOMOLOGIE OU DE PROJECTION DES FIGURES PLANES EN GÉNÉRAL, ET DE CELUI DES SECTIONS CONIQUES EN PARTICULIER. — APPLICATION A DIVERSES QUESTIONS QUI S'Y RAPPORTENT.

Propriétés des sécantes communes et des points de concours des tangentes communes des sections coniques.

290. Il résulte, en premier lieu, des remarques générales qui précèdent, et des propriétés établies dans la IIe Section (245) pour le cas particulier où l'on ne considère que des circonférences de cercle, que :

Deux sections coniques quelconques, tracées sur un plan, peuvent être regardées, de deux manières différentes, comme étant projection ou perspective l'une de l'autre par rapport à chacun des points de concours de leurs tangentes communes, pris en particulier pour centre de projection.

291. Dans l'une de ces projections, les arcs que l'on considère ont leur courbure dirigée dans le même sens par rapport au *centre de projection*, ou point de concours correspondant des tangentes communes, et la projection peut être dite *directe* ou de *première espèce ;* dans l'autre, ces arcs tournent leur convexité ou leur concavité en sens contraire par rapport à ce point, et la projection peut être dite *inverse* ou de *seconde espèce*. D'ailleurs, quelle que soit l'espèce de projection que l'on envisage, il est très-facile, d'après ce qui a été dit art. 243, de reconnaître quels sont les arcs, les lignes et les points qui, en général, sont homologues ou projections les uns des autres; et il en résulte que deux points homologues quelconques sont rangés (260) sur une droite, ou *projetante*, dirigée vers le centre de projection que l'on considère en particulier; et que deux lignes, droites ou courbes, homologues d'une certaine espèce, ou provenant de points homologues de cette espèce, vont concourir sur l'une des sécantes communes aux deux sections coniques proposées, laquelle renferme ainsi tous les points du plan qui ont la propriété de se confondre respectivement avec leurs projections, ou d'être leurs propres homologues de l'espèce que l'on considère. C'est pourquoi, quand l'on n'a à s'occuper, en particulier, que de l'un des

centres de projection qui appartiennent aux deux sections coniques proposées, on pourrait appeler les deux sécantes communes, qui proviennent de points homologues de la première ou de la seconde espèce, *axes* de projection directe ou inverse.

292. On a vu d'ailleurs (249 et suiv.), pour le cas particulier de deux cercles tracés sur un plan, la liaison intime qui existe entre les deux centres de similitude et les deux sécantes communes ou axes de projection correspondants, liaison qui est telle, que, quand l'une de ces quatre choses est connue, les trois autres s'ensuivent nécessairement, au moyen de constructions d'une grande simplicité, et qui n'exigent toutes que le tracé de lignes droites indéfinies. D'après ce qui précède, ces constructions, toujours possibles, sont directement applicables au cas général de deux sections coniques quelconques, pourvu qu'on regarde comme concourantes en des points d'une même droite, les lignes qui d'abord étaient parallèles (106 et 107). Mais ici le nombre des sécantes communes, ou axes de projection, peut être plus considérable que pour le cas de deux cercles ; et c'est ce qui arrive, par exemple, quand les courbes se pénètrent en quatre points réels. Cependant les constructions citées donnent toujours et ne donnent jamais qu'un seul centre ou un seul axe de projection qui corresponde à un centre ou à un axe semblable supposé connu ; nous dirons, pour les distinguer, que ce sont des centres et des axes de projection *conjugués*, c'est-à-dire des points de concours *conjugués* de tangentes communes, et des sécantes communes *conjuguées* : celles-ci ont évidemment pour caractère distinctif de se couper en dehors du périmètre des deux courbes; ceux-là d'appartenir à des paires de tangentes communes différentes.

293. Quoique ces définitions, et les propriétés auxquelles elles se rapportent, se trouvent suffisamment justifiées par ce qui a déjà été dit pour le cas particulier du cercle, il ne sera pas inutile de faire voir comment on peut y parvenir directement, sans avoir recours aucunement à cet intermédiaire : et d'abord on pourrait appliquer immédiatement, au cas général de deux sections coniques, le même genre de démonstration que celui employé pour deux cercles; car, en mettant la figure en projection sur un nouveau plan, de façon (105) que l'une quelconque des sécantes communes passe à l'infini, les deux courbes deviendront (125) s. et s. p. sur ce plan, et auront pour centre de similitude les points de concours des tangentes communes qui correspondent aux sécantes de la projection. Mais on peut atteindre le même

but, d'une manière entièrement directe, en employant les considérations les plus simples de l'espace; il suffit, pour cela, de prouver que :

Deux sections coniques quelconques, tracées sur un plan, peuvent être considérées comme la projection de deux sections planes d'un cône, dont le sommet est représenté par l'un des points de concours des tangentes communes.

294. En effet, nommons en général (C), (C') les courbes proposées, et S le point de concours de deux tangentes communes quelconques de ces courbes; considérons la surface du cône qui a (C) pour base et pour sommet un point quelconque de l'espace, il est évident que, si l'on projette ce cône sur le plan de la base, de façon que S soit la projection du sommet, ses deux arêtes extrêmes seront représentées par les tangentes communes aux courbes (C) et (C') qui passent par S. Cela posé, prenons à volonté un point *a* sur la courbe (C'), et projetons-le sur la surface conique, à partir du centre de projection choisi comme il vient d'être indiqué; projetons-y également les deux points de contact de cette courbe et des deux tangentes communes; ces points appartiendront aux arêtes extrêmes du cône; concevons enfin le plan qui renferme les trois points ainsi trouvés, il coupera le cône suivant une section conique, dont la projection, sur le plan de la base, passera par le point *a*, et touchera les tangentes communes aux mêmes points que celle (C'); donc elle se confondra en une seule et même courbe avec elle, puisque (**203** et **207**) une section conique est entièrement déterminée de grandeur et d'espèce, quand on en a trois points et les tangentes en deux de ces points.

Comme au point *a*, pris sur (C'), correspondent toujours deux points, l'un supérieur, l'autre inférieur, sur la surface du cône que l'on considère, il en résulte qu'il existe aussi deux sections planes de ce cône qui, dans des sens différents, ont pour projection la courbe (C'); donc les deux sections coniques proposées peuvent être regardées, de deux manières différentes, comme représentant les sections planes d'un même cône qui a S pour sommet, ce qu'il fallait démontrer.

295. Cette démonstration ne s'applique, il est vrai, en toute rigueur, qu'au cas où le point S appartient à deux tangentes communes réelles; mais on peut en étendre la conséquence à tous les cas, au moyen de la loi de continuité. En effet, quand le point dont il s'agit appartient à des tangentes communes réelles, on déduit de ces conséquences un moyen de trouver les deux sécantes conjuguées communes, lesquelles peuvent être d'ailleurs réelles ou idéales; et réciproquement on peut trouver ce point au moyen des sécantes communes, quand ces dernières existent; mais la construction est alors tou-

jours possible, et donne toujours (251) des points réels; donc ces points doivent jouir, dans tous les cas, du même caractère et des mêmes propriétés, qu'ils appartiennent ou non à des tangentes communes réelles.

296. Il est essentiel de remarquer que réciproquement les droites et les points qui jouissent, par rapport au système de deux sections coniques tracées sur un plan, des propriétés qui viennent de nous occuper, sont nécessairement des sécantes communes à ces courbes et des points de concours de leurs tangentes communes; en sorte qu'il n'existe, sur le plan de deux sections coniques, d'autres droites et d'autres points que ceux dont il s'agit, qui jouissent de ces propriétés.

En effet, si l'on met la figure en projection sur un nouveau plan parallèle à une telle droite, d'après la propriété dont elle jouit à l'égard du point correspondant et des deux courbes, les lignes que nous avons appelées homologues deviendront parallèles; et, comme les droites qui renferment deux à deux les points homologues iront encore concourir au point dont il s'agit, ce point sera nécessairement (239, note) un centre de similitude des deux courbes, lesquelles seront ainsi semblables entre elles de grandeur et de position, et auront le point en question pour concours, réel ou idéal, de deux de leurs tangentes communes. D'un autre côté, la droite située à l'infini sur le plan de ces nouvelles sections coniques a pour projection celle que l'on considère sur la figure primitive; donc (126) celle-ci est, à son tour, une sécante réelle ou idéale commune aux sections coniques proposées.

De là, au reste, on déduirait immédiatement, et par la simple application de la loi de continuité (247), toutes les propriétés qui constituent la théorie des pôles et polaires des sections coniques, et, par suite, celles qui appartiennent aux asymptotes et au centre de ces courbes.

Des figures homologiques, du centre et de l'axe d'homologie.

297. Les propriétés dont jouit le système de deux sections coniques, tracées sur un plan, à l'égard de leurs points de concours des tangentes communes, ne sont pas particulières à ces sortes de courbes; elles ont lieu pour des figures planes beaucoup plus générales, quand, ainsi que les premières, elles peuvent être regardées comme la projection ou perspective de deux autres figures semblables de grandeur et de position sur un plan; il est évident, en effet, que, dans le premier système, le centre de similitude se trouve représenté par un point qui jouit, à l'égard des figures correspondantes, de toutes les propriétés du point de concours des tangentes communes à deux

sections coniques : ainsi, par exemple, les lignes homologues vont concourir, deux à deux, sur une droite qui représente tous les points à l'infini du plan des figures semblables, etc.

Nous avons d'ailleurs déjà fait remarquer (246) que ces propriétés ne sont autres que celles de la projection centrale ou perspective ordinaire, mais envisagées sous un point de vue tout particulier; c'est pourquoi il est à craindre qu'en employant, comme dans ce qui précède, les expressions générales de *centre* et d'*axe de projection*, pour désigner le point où convergent toutes les droites qui renferment les points homologues, et les droites où se rencontrent deux à deux les lignes qui leur correspondent, on ne fasse pas suffisamment comprendre quel est l'état particulier du système que l'on considère, et sa parfaite analogie avec celui de deux figures s. et s. p. sur un plan : ces considérations et l'importance de la chose nous déterminent à substituer à ces expressions des expressions nouvelles; d'autant qu'il nous semble extrêmement avantageux, pour la langue géométrique, de pouvoir désigner un même objet par plusieurs mots, quand ces mots correspondent à des vues différentes de l'esprit, ou rappellent des propriétés distinctes de cet objet.

298. Il n'est pas possible de conserver, dans le cas général qui nous occupe, au point où concourent les droites qui renferment les points homologues, le nom de centre de similitude; mais on peut fort bien l'appeler le *centre d'homologie* des deux figures, et dire de ces figures elles-mêmes qu'elles sont *homologiques;* la droite sur laquelle concourent, deux à deux, les lignes homologues sera ainsi *l'axe de concours* ou *d'homologie* du système, et celles qui convergent vers le centre d'homologie seront des *rayons d'homologie*.

Quoique ces diverses expressions ne soient pas encore usitées, elles sont si simples et si faciles à saisir, que nous ne croyons pas qu'on puisse se refuser à les admettre; d'ailleurs, d'après l'idée qu'on attache d'ordinaire au mot *homologue*, quand les figures sont s. et s. p., elles nous paraissent parfaitement désigner l'espèce de correspondance particulière qui existe entre les deux systèmes. Enfin elles ont l'avantage de pouvoir s'étendre immédiatement, comme nous le verrons plus tard (Supplém., art. 576 et suiv.) aux figures situées dans l'espace, en remplaçant alors le mot d'*axe* par celui de *plan d'homologie* ou *de concours*.

299. Quand les figures ont deux axes et deux centres d'homologie, il est inutile de dire que toutes les expressions jusqu'ici mises en usage pour dis-

tinguer entre eux, soit ces axes, soit ces centres, soit enfin les lignes et les points homologues de diverses espèces, subsistent.

300. Nous venons d'établir les propriétés des figures homologiques tracées sur un plan commun, en nous appuyant sur les propriétés connues des figures s. et s. p.; mais on peut aussi y arriver directement sans recourir à cet intermédiaire, au moyen des considérations déjà employées ci-dessus (294) pour le cas particulier de deux sections coniques; car on peut toujours regarder deux pareilles figures comme la projection de deux autres figures dans l'espace, mais situées dans des plans différents, et qui seraient la perspective l'une de l'autre, par rapport à un point quelconque de l'espace pris pour centre de projection ou point de vue.

On peut d'ailleurs arriver au même résultat en observant que les conditions, pour que deux figures soient homologiques sur un plan, sont nécessairement analogues et en nombre égal à celles qui établissent la similitude de grandeur et de position de deux figures de même ordre, tracées également sur un plan. Or toutes les propriétés des figures s. et s. p. sur un plan dérivent de celles des triangles s. et s. p. ou à côtés parallèles; donc toutes les propriétés des figures homologiques, en général, doivent aussi dériver de celles qui appartiennent aux simples triangles homologiques sur un plan.

Bien plus, il est évident que les relations purement descriptives, celles qui ne dépendent que de la direction indéfinie des lignes, doivent dériver uniquement de celles du même genre relatives aux simples triangles; et ces relations sont exactement les mêmes (167) pour deux triangles homologiques et pour deux triangles s. et s. p., pourvu qu'on admette la notion que les lignes parallèles concourent à l'infini. Donc les figures homologiques jouissent des mêmes propriétés descriptives que les figures s. et s. p. sur un plan; et, comme le principe relatif aux triangles est d'une première évidence (168), il en résulte que les propriétés purement descriptives des figures planes homologiques sont tout à fait indépendantes de celles des figures semblables, et ne reposent absolument que sur la définition de la ligne droite et du plan, considérés dans leur direction indéfinie; ce qui peut également se conclure des raisonnements déjà établis ci-dessus, au moyen des considérations de l'espace.

301. Cette remarque est très-importante; car, si l'on admet la notion relative aux parallèles, qu'on doit regarder comme un axiome inévitable et fondamental de la Géométrie, qu'on suppose ensuite que l'axe d'homologie

des figures ci-dessus s'éloigne à une distance infinie, on en déduira immédiatement, et par réciproque, toutes les propriétés (241) des figures s. et s. p. sur un plan, qui ne concernent que la direction indéfinie des lignes et non leur mesure, lesquelles peuvent ainsi être établies indépendamment d'aucune relation métrique, et sans recourir au principe relatif à la proportionnalité des lignes homologues dans les figures semblables.

Quant aux relations métriques elles-mêmes (*), on peut les déduire toutes, pour le cas de deux figures homologiques en général, de la propriété (145) appliquée au cas du triangle coupé par une transversale droite quelconque; et de là on déduirait immédiatement, comme corollaires, les théorèmes relatifs à la proportionnalité des lignes homologues dans les figures semblables, en admettant que les segments formés à partir de l'axe d'homologie sont devenus infinis et égaux, ce qu'on peut regarder comme un autre axiome incontestable; mais la propriété (145) reposant elle-même (9) sur la théorie des lignes proportionnelles, dont elle n'est véritablement qu'une extension, il ne paraît pas qu'on puisse établir, *à priori*, les relations métriques des figures homologiques, comme on vient de le faire pour les relations purement descriptives, à moins, peut-être, d'admettre, avec M. Legendre (**), le principe des *fonctions*, qui n'est au fond que le principe de continuité.

On remarquera d'ailleurs que toutes les relations, soit métriques, soit descriptives, qui ont lieu pour l'une des figures et sont projectives de leur nature, ont nécessairement lieu aussi (14) pour la figure qui lui est homologique.

Construction de la figure homologique d'une figure donnée, au moyen de certaines conditions.

302. Il résulte des propriétés purement descriptives des figures homologiques que, si l'on se donne seulement un point de l'une d'elles avec son homologue sur l'autre, puis le centre et l'axe d'homologie, on pourra décrire entièrement cette figure au moyen de celle qui est donnée, en n'employant que la simple ligne droite. En effet, les lignes homologues devant concourir respectivement sur l'axe dont il s'agit, tout consistera à mener, par le point

(*) L'article 167 offre quelques exemples de ces propriétés pour le cas particulier de deux triangles homologiques; et, au moyen des considérations mises en usage au même endroit, il serait facile d'étendre de la même manière les autres relations qui appartiennent en général aux figures s. et s. p.

(**) *Éléments de Géométrie*, Note II°.

donné, une suite de droites transversales dont les homologues seront parfaitement déterminées, au moyen du point qui correspond au premier et de l'axe d'homologie ; projetant ensuite, sur ces droites, les différents points qui répondent à leurs homologues et à la figure donnée, on obtiendra évidemment les points correspondants de la figure non décrite, et par conséquent les lignes mêmes de cette figure. Il serait d'ailleurs facile de mener les tangentes aux points ainsi obtenus, etc.

303. En général, on pourra résoudre graphiquement, sur la figure non décrite et au moyen de ces seules données, toutes les questions qui ne concerneraient que la direction indéfinie des lignes, leur intersection, leur tangence, etc. : voulant, par exemple, rechercher l'intersection d'une certaine courbe avec une droite donnée, on n'aura qu'à déterminer l'homologue de cette droite, et à projeter ses intersections avec la courbe homologue à la proposée sur la droite donnée ; pareillement, si, d'un point donné, on veut mener des tangentes à une certaine courbe de la figure non décrite, on cherchera l'homologue de ce point, duquel on mènera des tangentes à la courbe correspondante de l'autre figure ; on projettera ensuite les tangentes et les points de contact ainsi obtenus, sur la figure non décrite, etc.

Ces constructions étant tout à fait analogues à celles qu'on pourrait déduire de la perspective ordinaire, il est assez inutile de s'y arrêter.

304. Si, au lieu d'un point appartenant à la figure non décrite, on en donnait trois et leurs homologues, c'est-à-dire deux triangles homologues ; comme encore, si l'on se donnait deux droites et un point avec leurs homologues, on aurait, par là même, le centre et l'axe d'homologie ; en sorte que, les figures étant dans un même plan, ou étant seulement planes et dans l'espace, on pourrait, comme précédemment, décrire l'une d'elles au moyen de l'autre, et résoudre les diverses questions graphiques qui lui sont relatives. Mais si, avec le centre d'homologie, on ne se donnait que deux droites et leurs homologues, ou si, avec l'axe d'homologie, on ne se donnait que deux points et leurs homologues, on arriverait encore aux mêmes résultats. En général, on voit qu'on peut varier, d'une infinité de manières différentes, la nature particulière des données, et qu'il s'agit seulement qu'elles soient en nombre suffisant pour déterminer complétement le centre, l'axe d'homologie et deux points ou deux droites homologues quelconques de l'une et de l'autre figure ; car se donner deux droites homologues, c'est, par là même, se donner une infinité de paires de points homologues, puisque les points homologues sont rangés sur des droites qui passent par le centre d'homologie.

Cas où la figure donnée est une section conique.

305. Lorsque la figure supposée décrite est une section conique, son homologue en est une aussi; et la question qui précède revient, en général, à déterminer celle-ci au moyen de l'autre, quand on connait un nombre suffisant do conditions pour la construire. Or cette question peut se résoudre linéairement, ou avec la règle seule, dans les cas suivants :

1° *Connaissant un centre et un axe d'homologie conjugués des deux courbes, c'est-à-dire* (292) *un point de concours des tangentes communes et une sécante commune conjuguée à ce point, on se donne, soit un point, soit une tangente de la courbe non décrite.*

2° *Connaissant l'un des centres ou l'un des axes d'homologie des deux courbes, on se donne, soit trois points, soit trois tangentes, soit deux points et une tangente, soit enfin deux tangentes et un point de la courbe inconnue.*

3° *Connaissant ou deux axes, ou deux centres d'homologie conjugués des deux courbes, on se donne, soit un point, soit une tangente de la courbe cherchée.*

306. Ces questions présentent en tout quatorze cas, dont deux pour la première, huit pour la seconde et quatre pour la troisième : de ces quatorze cas, les dix premiers seront seuls résolus dans ce qui va suivre; les quatre autres le seront dans le second Chapitre, à l'occasion de recherches particulières, et qu'il serait hors de propos d'entamer ici.

Nous ferons d'ailleurs observer, avant d'aller plus loin, que les deux centres et les deux axes d'homologie conjugués étant tellement liés entre eux (292), qu'on ne peut obtenir l'un sans obtenir à la fois l'autre, il arrivera toujours que, pour une même courbe inconnue, les solutions seront doubles, soit qu'on cherche un centre, soit qu'on cherche un axe d'homologie. En conséquence, le nombre des courbes cherchées, ou des solutions distinctes du problème, ne sera véritablement que moitié de celui des centres ou axes d'homologie trouvés.

307. Premier cas. *Connaissant un centre et un axe d'homologie conjugués des deux courbes, on se donne un point de celle qui n'est pas décrite.*

Solution. Du centre d'homologie projetez le point donné (*) sur la section conique décrite, ou, ce qui revient au même, menez par ces deux points une droite transversale; elle ira rencontrer la courbe en deux points, dont cha-

(*) On concevra très-aisément tout ce que nous allons dire, en suivant, dans chaque cas, les raisonnements sur une figure, qu'il sera d'ailleurs facile de construire.

cun pourra être pris pour l'homologue du point donné, relativement à l'axe d'homologie, et servira (302), conjointement avec cet axe, à déterminer complétement l'une des courbes qui résolvent le problème, lesquelles seront ainsi au nombre de deux seulement.

Remarque. Quand le centre d'homologie est extérieur à la section conique donnée, ou que les tangentes qui lui répondent sont possibles; que, de plus, l'axe d'homologie est une sécante réelle, le problème revient évidemment à tracer la section conique dont on a trois points et deux tangentes.

308. Deuxième cas. *Connaissant un centre et un axe d'homologie conjugués des deux courbes, on se donne une tangente de celle qui n'est pas décrite.*

Solution. Par le point où la tangente donnée rencontre l'axe d'homologie, menez des tangentes à la courbe décrite; chacune d'elles pourra être prise pour l'homologue de la première relativement à l'axe dont il s'agit; projetant ensuite chacun des points de contact sur la tangente donnée, on obtiendra deux points qui seront respectivement les homologues des deux premiers : on aura donc tout ce qu'il faut (302) pour décrire les courbes du problème, qui ainsi seront au nombre de deux seulement, comme dans le cas qui précède.

Remarque. Le problème revient à décrire une section conique dont on a deux points et trois tangentes, dans les circonstances déjà indiquées ci-dessus.

309. Troisième cas. *Connaissant un centre d'homologie des deux courbes, on se donne trois points de la courbe non décrite.*

Solution. Les points donnés appartiennent à un triangle dont on obtiendra facilement l'homologique en projetant ses sommets sur la courbe décrite : mais il en résulte en tout huit triangles, dont chacun peut être pris pour l'homologue du proposé, et auquel correspond par conséquent un axe d'homologie particulier; donc il y a en tout huit axes d'homologie qui, étant conjugués deux à deux (306) au centre d'homologie donné, fournissent quatre courbes distinctes, faciles à décrire (302), et qui sont autant de solutions du problème.

Remarque. Quand les tangentes du centre d'homologie sont possibles, le problème revient, comme celui du premier cas (307), à déterminer une section conique tangente à deux droites et passant par trois points donnés.

310. Quatrième cas. *Connaissant un centre d'homologie des deux courbes, on se donne, en outre, trois tangentes de celle qui n'est pas décrite.*

Solution. Les trois tangentes données forment, par leurs intersections mutuelles, un triangle circonscrit, dont il faut trouver l'homologue sur la courbe décrite ; car l'axe de concours de ces deux triangles sera aussi l'axe d'homologie des deux courbes ; au moyen de quoi le problème sera ensuite facile à résoudre, puisqu'en projetant les points de contact des côtés du nouveau triangle sur ceux qui leur sont respectivement homologues dans le premier, on aura tout ce qu'il faut (302) pour déterminer complétement la courbe inconnue. Mais le triangle homologue au proposé doit avoir ses sommets appuyés respectivement sur les rayons d'homologie qui appartiennent à ceux de ce dernier ; donc il s'agira en définitive, pour l'obtenir, de circonscrire à la courbe donnée un triangle dont les sommets s'appuient sur trois droites connues passant par un même point : question qui sera résolue, par la suite (563), d'une manière purement linéaire, et qui offre deux solutions distinctes, répondant (306) aux deux axes d'homologie conjugués au centre d'homologie donné. Ainsi la courbe cherchée est unique.

Remarque. Quand le centre d'homologie donné répond à des tangentes possibles, le problème revient à décrire une conique dont on a cinq tangentes, ce qui peut s'exécuter très-simplement, comme il a été indiqué art. 213.

311. Cinquième cas. *Connaissant un centre d'homologie des deux courbes, on se donne deux points et une tangente de la courbe non décrite*.

Solution. En projetant les deux points sur la courbe donnée, on obtiendra quatre points, qui, deux à deux, pourront être pris pour les homologues des premiers, et d'où résultera par conséquent quatre cordes, qu'on pourra regarder séparément comme les homologues de celle qui passe par les deux points donnés.

Cela posé, en prolongeant la corde qui passe par les deux points donnés jusqu'à sa rencontre avec la tangente qui lui correspond, il en résultera un point, dont l'homologue s'obtiendra en le projetant sur chacune des quatre cordes qui sont les homologues de la première ; menant ensuite, de chaque point ainsi trouvé, deux tangentes à la courbe donnée, chacune d'elles pourra être prise pour l'homologue de la tangente proposée, et ira par conséquent la rencontrer en un point qui, étant joint par une droite avec le point d'intersection des deux cordes correspondantes, donnera évidemment un des axes d'homologie cherchés : la seconde tangente donnant un second axe d'homologie nécessairement conjugué au premier, on obtiendra en tout huit axes d'homologie, deux à deux conjugués, et par conséquent quatre courbes distinctes, qu'il sera d'ailleurs facile de construire.

Remarque. Quand les tangentes du centre d'homologie sont possibles, le problème revient, comme celui de l'article 308, à déterminer une section conique tangente à trois droites et passant par deux points donnés.

312. Sixième cas. *Connaissant un centre d'homologie des deux courbes, on se donne deux tangentes et un point de la courbe cherchée.*

Solution. Si les deux tangentes communes qui correspondent au centre d'homologie sont possibles, on aura quatre tangentes de la courbe cherchée, qui, par leurs intersections mutuelles, formeront un quadrilatère complet, dont une diagonale passera par le centre d'homologie et par le point d'intersection des tangentes données, et aura pour pôle (192) le point où se coupent les deux autres diagonales : ce point étant connu, aussi bien que son homologue qui doit être le pôle (258) de la même diagonale par rapport à la section conique donnée, on aura ainsi deux points homologues appartenant respectivement aux deux courbes.

Si, au contraire, les tangentes communes correspondantes au centre d'homologie étaient impossibles, on observerait que, dans le quadrilatère ci-dessus, les deux tangentes données, la diagonale ou le rayon d'homologie qui passe par leur intersection, la droite qui joint cette intersection au pôle de la diagonale doivent former un faisceau harmonique (186) ; de sorte que, les trois premières étant connues, la dernière s'ensuit nécessairement (155) : on trouvera ensuite le pôle lui-même, en projetant, sur la droite dont il s'agit, le pôle qui lui est homologue dans la courbe donnée, et qui est connu.

Ayant ainsi obtenu deux pôles homologues, on projettera le point donné sur la courbe décrite ; les deux points qui en résulteront seront, l'un l'homologue direct, l'autre l'homologue inverse du premier, et par conséquent ils correspondront tous deux aux mêmes courbes, mais à des axes d'homologie différents, en sorte qu'il suffira de s'occuper de l'un d'eux en particulier.

Le problème se trouve, par là, ramené à la dernière partie de celui qui précède ; car les deux systèmes de deux points homologues trouvés déterminent deux droites homologues, d'où il est facile de conclure les tangentes qui, sur la courbe décrite, correspondent aux tangentes données, et par suite les axes d'homologie cherchés, lesquels conduisent évidemment à deux solutions distinctes du problème.

Remarque. Quand les tangentes du centre d'homologie sont possibles, le problème revient à déterminer une section conique dont on connaît quatre tangentes et un point.

313. Septième cas. *On connaît un axe d'homologie des deux courbes, et on se donne trois points de la courbe cherchée.*

Solution. Prolongez les côtés du triangle qui a ces points pour sommets jusqu'à leurs intersections avec l'axe d'homologie; inscrivez à la courbe donnée un triangle dont les côtés passent par les points ainsi obtenus : ce problème, comme nous le verrons par la suite (*), aura deux solutions purement linéaires, et donnera par conséquent deux triangles qui seront évidemment les homologues du triangle donné; partant l'on aura deux centres d'homologie qui, étant conjugués (306), ne donneront lieu qu'à une seule courbe.

Remarque. Quand l'axe d'homologie est une sécante commune réelle, le problème revient à celui qui a été résolu directement (203), au moyen de l'*hexagramme mystique* de Pascal.

314. Huitième cas. *On connaît un axe d'homologie des deux courbes et trois tangentes de la courbe non décrite.*

Solution. Les trois tangentes données forment un triangle par leurs intersections mutuelles; pour obtenir un triangle homologue quelconque dans la courbe décrite, et par suite un centre d'homologie, on mènera, des points où les côtés du premier rencontrent l'axe d'homologie, trois tangentes quelconques à cette courbe, qui appartiendront au triangle demandé; et, comme de chacun des trois points, ainsi obtenus sur l'axe d'homologie, on peut mener deux tangentes à la courbe donnée, on voit qu'il y aura en tout six tangentes, qui, prises trois à trois, formeront huit triangles homologues au proposé, auxquels correspondront par conséquent huit centres d'homologie, et par suite (306) quatre courbes distinctes, solutions du problème.

Remarque. Si, au lieu de trois tangentes, on ne s'en donnait qu'une seule avec le point de contact; qu'on connût, de plus, la droite qui doit renfermer les centres d'homologie cherchés, le problème n'aurait plus évidemment qu'une solution unique, qu'il serait facile d'obtenir, puisqu'en menant deux tangentes à la courbe décrite, par le point où la tangente donnée rencontre l'axe, leurs points de contact seraient les homologues de ceux qui appartiennent à cette tangente. On peut appliquer des remarques analogues aux cas qui précèdent et à ceux qui suivent.

Quand l'axe d'homologie est une sécante commune réelle, le problème

(*) *Voyez* l'article 563 du Chapitre III de la IVe Section. Ces solutions résultent d'ailleurs immédiatement du principe de l'article 180, d'où il serait facile également de déduire, par la simple application de la théorie des pôles, celles du problème dont il a été fait mention plus haut (310).

revient, comme celui des deuxième et cinquième cas, à déterminer la section conique dont on a trois tangentes et deux points.

315. Neuvième cas. *On connaît un axe d'homologie des deux courbes, et l'on se donne deux points et une tangente de la courbe non décrite.*

Solution. Par les deux points donnés faites passer une ligne droite; elle ira rencontrer l'axe d'homologie en un point qui doit être tel (**82** et **252**), que les polaires correspondantes, dans les deux courbes, aillent concourir réciproquement en un autre point de cet axe: le point de concours en question étant déjà connu, puisqu'on peut obtenir, pour la courbe décrite, la polaire qui le donne, il sera facile de trouver un second point de la polaire relative à la courbe cherchée, et par conséquent cette polaire elle-même; car elle doit rencontrer la droite qui renferme les deux points donnés de cette courbe, en un nouveau point quatrième harmonique (194) des deux premiers et de celui qui se trouve sur l'axe d'homologie; ainsi l'on aura deux droites homologues, appartenant respectivement aux deux courbes. Cela posé, par le point où la tangente donnée coupe l'axe d'homologie, menez des tangentes à la courbe décrite; chacune d'elles pourra être prise pour l'homologue de la première, et par conséquent, en n'en considérant qu'un seule, on aura, pour les deux courbes, deux paires de droites homologues qui donneront, par leurs intersections respectives, deux points homologues ou un rayon d'homologie.

Pour en avoir un autre, joignez, par une droite, celui de ces deux points homologues qui appartient à la courbe non décrite, avec l'un des points donnés de cette courbe; l'homologue de cette droite, pour la courbe donnée, sera parfaitement connue et ira rencontrer cette courbe en deux points, dont chacun pourra être pris pour l'homologue du point donné que l'on considère en particulier; on aura donc deux nouveaux rayons d'homologie, lesquels rencontreront le premier en des points qui seront deux centres d'homologie appartenant à deux courbes distinctes; et, comme il y a sur la courbe décrite deux tangentes qui correspondent à la tangente donnée, il en résultera en tout quatre centres d'homologie, dont les derniers seront conjugués respectivement aux deux autres, et ne produiront ainsi que deux courbes distinctes pour la solution du problème proposé.

Remarque. Dans les circonstances déjà mentionnées ci-dessus (314), le problème revient à déterminer une section conique dont on a quatre points et une tangente.

316. Dixième cas. *On connaît un axe d'homologie des deux courbes, et*

l'on se donne deux tangentes et un point de celle qui n'est pas décrite.

Solution. Les deux tangentes viennent couper l'axe d'homologie en deux points, auxquels correspondent quatre tangentes sur la courbe donnée, et par conséquent quatre paires de tangentes provenant de deux points différents de l'axe d'homologie. Considérons, à volonté, une de ces paires de tangentes; on pourra la regarder comme l'homologue de celle que forment les tangentes données; donc, en joignant par une droite les points d'intersection respectifs qui leur appartiennent, ce sera déjà un rayon d'homologie, et il suffira de chercher un autre rayon pareil pour avoir le centre d'homologie correspondant.

A cet effet, joignez, par une droite, le point donné de la courbe non décrite avec celui où se coupent les deux tangentes correspondantes, elle ira rencontrer l'axe d'homologie en un point qui appartiendra à l'homologue de cette droite, laquelle sera par conséquent connue, puisqu'elle passe d'ailleurs par le point d'intersection des tangentes homologues aux premières : or cette droite ira rencontrer la courbe décrite en deux points, et chacun de ces points pourra être pris évidemment pour l'homologue du point donné; donc on aura deux nouveaux rayons d'homologie, lesquels rencontreront celui déjà trouvé, en deux points qui seront des centres d'homologie appartenant à des courbes distinctes du problème.

Ainsi chaque paire de tangentes de la courbe décrite donne deux centres d'homologie et deux solutions correspondantes; mais la paire de tangentes restantes donnerait évidemment les centres d'homologie conjugués aux deux premiers; donc ils répondent, deux à deux, à la même combinaison, et il n'y a en tout que quatre solutions distinctes du problème.

Remarque. Quand l'axe d'homologie est une sécante réelle, le problème revient, comme dans le premier et le troisième cas, à déterminer une section conique dont on a deux tangentes et trois points.

317. Il est sans doute inutile de faire observer que, dans les diverses questions qui précèdent, les tangentes ou les points donnés peuvent se confondre deux à deux, sans que les solutions cessent de rester les mêmes, pourvu qu'on assigne encore soit la direction de la droite qui renferme les deux points confondus en un seul, soit le point d'intersection des deux droites qui sont également censées confondues en une droite unique. Dans quelques-unes de ces circonstances, le nombre des solutions peut devenir moins considérable que dans le cas général, et c'est ce qu'il sera toujours facile de reconnaitre par la discussion directe établie sur chaque espèce de

données. Ce qui va suivre montrera, en outre, comment la même remarque peut s'étendre également aux axes et aux centres d'homologie des deux courbes.

Application à la théorie des contacts des sections coniques.

318. La théorie des propriétés des sécantes communes et des points de concours des tangentes communes des sections coniques, que nous avons envisagée jusqu'ici sous le point de vue le plus général, conduit encore sans peine, comme conséquence particulière, à celle des contacts et des osculations de divers ordres des mêmes lignes, et fournit ainsi, d'une manière aussi directe que simple, la solution de la plupart des questions qui s'y rapportent.

Pour y parvenir, il suffit de remarquer que, quand deux points communs au système de deux sections coniques viennent, par un mouvement continu, à se réunir en un seul, ces deux courbes se touchent nécessairement en ce point; que ces mêmes courbes deviennent osculatrices du second et du troisième ordre, lorsqu'un ou deux nouveaux points communs à ces courbes viennent pareillement à se réunir en un seul avec les deux premiers. Deux sections coniques ne pouvant d'ailleurs (203) avoir plus de quatre points communs sans se confondre, on voit qu'il est également impossible qu'elles soient osculatrices d'un ordre plus élevé que le troisième.

319. Dans le premier de ces trois cas, la sécante commune S*s'* (*fig.* 41), qui renferme les deux points confondus en un seul S, devient à la fois tangente aux deux courbes, et représente ainsi deux tangentes communes de ces courbes confondues en une seule; le point S, étant lui-même devenu un centre d'homologie, doit évidemment encore jouir, à l'égard des deux courbes et de la sécante commune MN conjuguée à celle de contact, de toutes les propriétés développées dans ce qui précède; mais on n'a plus alors que des lignes et des points homologues directs à considérer, et MN est l'axe de concours de ces lignes.

Quant au centre d'homologie S', conjugué au premier S ou au point de contact, on peut également l'obtenir, comme dans le cas général (292), au moyen de la sécante commune de contact ou de celle MN, qui lui est conjuguée; ainsi les deux courbes peuvent avoir deux autres tangentes communes S'*s*, S'*s'*, et deux autres centres d'homologie *s*, *s'*, lesquels sont nécessairement placés sur la tangente commune de contact, et sont conjugués aux sécantes communes SM, SN qui joignent le point S avec chacun des deux autres points M et N d'intersection des courbes proposées.

320. Pour le contact du second ordre, il faut, d'après ce qui précède, que l'un N, des points M, N d'intersection des deux courbes, vienne de nouveau se confondre avec le point de contact S déjà commun à ces courbes; c'est-à-dire que la sécante MN conjuguée à celle S*s* du contact, au lieu d'être entièrement arbitraire comme ci-dessus, doit passer par le point S (*fig.* 42), qui appartient à la première.

Dans ce cas, le point de contact S conserve toujours, en vertu du principe de continuité, ses propriétés primitives à l'égard des deux courbes et de la sécante SM dont il s'agit, c'est-à-dire qu'il est encore un centre d'homologie de ces courbes : quant au centre d'homologie S' qui lui est conjugué, il se trouve nécessairement sur la tangente du point de contact S, et c'est le seul qui puisse alors exister avec le premier; en sorte que les courbes n'ont plus qu'une tangente commune S'T, outre celle SS' du point de contact, qui en représente trois confondues en une seule.

321. Enfin, pour qu'il y ait, au point donné S, contact du troisième ordre, il suffit évidemment que la sécante commune, conjuguée à la tangente en ce point, se confonde avec elle dans toute son étendue (*fig.* 43). Le point S demeurant toujours un centre d'homologie des deux courbes, la condition du contact sera remplie, si les droites homologues *ab*, *a'b'* des deux courbes vont se rencontrer, deux à deux, sur la tangente S*t* du point de contact (*).

Dans ce même cas, il est visible que tous les centres d'homologie seront confondus en un seul au point de contact S, et que toutes les sécantes et tangentes communes seront pareillement confondues en une seule avec la tangente au même point. Il serait d'ailleurs facile de déduire de ce qui précède les diverses propriétés et notions relatives au contact du troisième ordre des sections coniques; ainsi, par exemple, on voit que le diamètre passant par le point de contact, ou qui est conjugué à la tangente commune de ce point, doit avoir même direction dans l'une et l'autre courbes, etc.

322. Nous n'avons encore rien dit du cas particulier où les sections coniques ont un double contact S, S' (*fig.* 44); mais il est évident, d'après ce qui précède, que les deux points S, S' et les tangentes qui leur correspondent seront toujours des centres et des axes d'homologie conjugués par rapport aux deux courbes; que pareillement le point de concours P de ces

(*) Cette construction, appliquée à une courbe géométrique d'un degré quelconque, donnera évidemment une courbe du même degré, osculatrice du troisième ordre au point de contact de la tangente. On peut faire des remarques analogues pour les cas ci-dessus des contacts du premier et du second ordre.

tangentes, qui sont les seules qui puissent alors appartenir à ces courbes, sera à la fois et le pôle et le centre d'homologie conjugué à la sécante commune de contact SS'; or de là résulte immédiatement une infinité de propriétés particulières des sections coniques au double contact : que par exemple on mène une sécante arbitraire AB par le pôle P de la corde de contact, on voit qu'elle aura même pôle Q par rapport aux deux courbes, et que ce pôle sera sur la corde dont il s'agit; de telle sorte que les droites PB, PQ, SS' auront chacune pour pôle le point d'intersection des deux autres (196), etc.; mais nous nous proposons de revenir plus tard, et par une voie différente, sur les diverses propriétés des sections coniques au double contact.

323. Il nous reste maintenant à examiner comment, dans les divers cas qui viennent de nous occuper, l'une des courbes et son point de contact avec l'autre étant donnés, on peut tracer celle-ci au moyen de certaines conditions suffisantes pour la déterminer complétement. Or, dans le contact du premier ordre, on connait déjà (319), soit un centre d'homologie, soit une sécante commune, qui ne peuvent concourir simultanément à déterminer la section conique tangente; ainsi trois conditions nouvelles sont nécessaires (305) pour décrire complétement la courbe.

Pour le contact du second ordre, on connait (320) un centre d'homologie et un point de la sécante commune qui lui est conjuguée; en sorte que deux conditions peuvent suffire pour déterminer complétement l'osculatrice.

Pour le contact du troisième ordre, on connait (321) un centre d'homologie des deux courbes et la sécante commune qui lui est conjuguée; et par conséquent une seule condition, autre que celle du contact, peut suffire pour déterminer complétement l'osculatrice.

Enfin, pour le double contact, on connait (322) un centre d'homologie, et on sait que la sécante commune conjuguée à ce centre, qui ne se confond pas avec la tangente du point de contact donné, doit être une tangente commune à la fois aux deux courbes; de sorte que deux conditions nouvelles sont suffisantes pour tracer la courbe qu'on cherche.

324. Si, au lieu d'un point de contact, on se donnait, dans ce dernier cas, la sécante de contact et par suite le pôle de cette sécante, on aurait à la fois un centre d'homologie et la sécante commune qui lui est conjuguée; par conséquent une seule condition pourrait suffire pour décrire l'une des deux courbes au moyen de l'autre.

325. On voit pareillement ce qui arriverait, dans le cas du contact simple du premier ordre, si, à la place du point de contact des deux courbes qu'on

supposerait alors être inconnu, on se donnait, soit une sécante commune, soit un centre d'homologie conjugués à ce point et à la tangente qui lui correspond. Il est évident que, dans ces diverses circonstances comme dans celles qui précèdent, l'on pourra toujours décrire l'une des deux courbes au moyen de l'autre et de certaines données, par quelqu'un des procédés généraux qui font le sujet des articles 307, 308 et suiv., le tout sans employer autre chose qu'une simple règle ou des jalons, si l'on opère sur le terrain.

Cas où, soit le centre, soit l'axe d'homologie, soit tout autre objet des deux figures, est situé à l'infini.

326. Voyons maintenant ce que deviennent ces diverses considérations, et toutes celles qui font le sujet de ce Chapitre en général, quand on suppose, en vertu de la loi de continuité, que certains points ou certaines droites s'écartent à l'infini sur le plan de la figure.

Supposons, en premier lieu, que ce soit l'un des centres d'homologie de deux sections coniques, d'ailleurs quelconques et situées sur un même plan, qui passe ainsi à l'infini, les deux tangentes communes correspondantes deviendront parallèles, aussi bien que tous les rayons d'homologie appartenant à ce centre; l'une des deux courbes pourra être considérée de deux manières différentes (290), comme la projection de l'autre par des parallèles quelconques : les droites homologues concourant d'ailleurs toujours sur les axes d'homologie respectifs, conjugués au point à l'infini, il est visible que la distance comprise entre deux points homologues d'une certaine espèce sera partout divisée en deux segments proportionnels par la sécante commune correspondante des deux courbes; de sorte que l'une d'elles pourra également être censée provenir de l'autre par l'augmentation ou la diminution, dans un certain rapport constant, des ordonnées de celle-ci prises par rapport à une droite fixe qui leur sert de sécante commune.

327. Pareillement si, par deux points homologues d'une certaine espèce, on mène, à volonté, deux droites vers un point quelconque de la sécante commune correspondante, et que, par deux autres points homologues de la même espèce, on mène deux nouvelles droites parallèles aux premières, on verra sans peine qu'elles se couperont encore, ainsi que toutes leurs semblables, sur la sécante commune que l'on considère; en sorte que les deux courbes proposées peuvent aussi être regardées, d'une infinité de manières différentes, comme provenant l'une de l'autre, par l'inclinaison, sous un même angle, des ordonnées de la première, prises par rapport à un axe fixe

qui sert de sécante commune à toutes deux, et en faisant en même temps glisser, sur des directions parallèles quelconques, les différents points d'application de ces ordonnées sur la courbe. Enfin, si cette inclinaison est telle, que les nouvelles ordonnées conservent la même grandeur, l'opération reviendra simplement à faire *balancer* ou *osciller*, suivant la même quantité angulaire, celles des différents points de la courbe proposée.

328. Dans ces diverses déformations, qui reviennent identiquement à la même, comme on voit, on connaitra donc les propriétés qui sont communes à la courbe primitive et à sa transformée (47, 289, etc.); et l'on pourra, d'après les considérations générales qui précèdent, non-seulement construire l'une d'elles au moyen de l'autre et de certaines données, mais encore déterminer directement les sécantes et tangentes communes qui leur appartiennent, puisque l'on est censé connaître le centre d'homologie qui est à l'infini.

Si, de plus, on exige que la nouvelle courbe ait un double contact suivant un diamètre, ou un contact du premier ou du second ordre en un point donné de la première, on le pourra, en choisissant convenablement le mode de transformation : par exemple, si l'on suppose le centre d'homologie à l'infini, sur la tangente en un point donné de la courbe décrite, prise pour axe fixe ou sécante commune, les transformées de cette courbe auront (320) un contact du second ordre en ce point, etc.

Les mêmes choses s'appliquent évidemment (297) aux lignes courbes en général, qui ont un centre d'homologie à l'infini; si ce n'est toutefois qu'il est impossible d'obtenir alors d'autres points de la commune intersection des deux courbes, que ceux qui sont sur l'axe d'homologie correspondant.

Comme les modes de déformation qui viennent de nous occuper sont souvent employés dans les arts graphiques, et qu'on s'en est servi quelquefois pour découvrir certaines propriétés des lignes courbes (*), nous avons cru qu'il ne serait pas inutile de nous y arrêter quelques instants, et de montrer comment leurs propriétés dérivent toutes de la théorie des figures homologiques en général, théorie qui, comme on voit, donne même beaucoup plus que ce qu'on a coutume de considérer.

329. Revenons au système de deux sections coniques quelconques situées dans un plan, et supposons qu'au lieu d'un centre d'homologie ce soit une sécante commune qui passe à l'infini; les deux courbes deviendront s. et

(*) DUPIN, *Développements de Géométrie*, Ier Mémoire, p. 19 et suivantes; BRIANCHON, *Correspondance Polytechnique*, t. III, p. 1; CHASLES, même volume, p. 326. Nous donnerons, dans le *Supplément*, les moyens d'étendre ces considérations aux figures tracées en général dans l'espace.

s. p. : donc, si l'on admet que l'on puisse tracer des parallèles à des droites données, on aura immédiatement un axe d'homologie dont on pourra se servir, soit pour déterminer entièrement l'une des deux courbes au moyen de l'autre et de certaines données, ainsi que cela a été fait dans ce qui précède pour le cas général où l'on se donne une sécante commune quelconque de deux sections coniques, soit pour construire directement (292) les sécantes et tangentes communes à la fois aux deux courbes, etc.

Si, maintenant, l'on suppose que la sécante à l'infini devienne une tangente commune, ou que les deux points communs à l'infini se confondent en un seul, les courbes deviendront des paraboles à diamètres parallèles ; et, si l'on admet, en outre, que la sécante commune conjuguée à celle-là passe par le point de contact à l'infini, ou soit parallèle à la direction commune des axes, les deux paraboles deviendront osculatrices du second ordre (320) au point dont il s'agit. Enfin elles deviendront osculatrices du troisième ordre en ce point (321), si la sécante conjuguée dont il s'agit passe tout entière à l'infini, et se confond par conséquent avec la tangente du point de contact.

Le point de contact demeurant toujours un centre d'homologie des deux courbes, si l'on mène, dans ce dernier cas, deux sécantes arbitraires parallèles aux axes, c'est-à-dire deux rayons d'homologie, ces rayons viendront déterminer sur les courbes deux cordes homologues parallèles, puisqu'elles doivent concourir sur la sécante commune à l'infini : or il suit de là que les portions de parallèles, comprises entre les deux courbes, seront partout égales entre elles ; donc :

Deux paraboles, osculatrices du troisième ordre à l'infini, sont parfaitement égales, ont même direction d'axes et sont tournées dans le même sens.

330. En général, toutes les propriétés qui peuvent appartenir au système de deux sections coniques, osculatrices d'un certain ordre en un point donné, s'appliquent directement au cas où ce point se trouve placé à l'infini ; et il en est de même des constructions qui seraient aptes à donner l'une de ces courbes au moyen de l'autre et de certaines conditions. Or il n'est nullement indispensable, comme dans le cas précédent de la parabole, que la tangente en ce point passe elle-même à l'infini ; elle peut demeurer quelconque, et alors elle devient évidemment une asymptote commune aux deux courbes, qui par conséquent sont des hyperboles.

Étant donc donnée une hyperbole, on peut, au moyen des constructions relatives au cas général, déterminer la courbe de même espèce, qui aurait avec elle un contact d'un certain ordre à l'infini, et remplirait, en outre,



d'autres conditions également assignées, comme de toucher des droites ou de passer par des points donnés.

331. Enfin, aucun axe, ni aucun centre d'homologie des deux courbes n'étant supposé à l'infini, on peut exiger que cette circonstance ait lieu pour une certaine tangente ou pour certains points de la courbe non décrite : or, pourvu qu'on regarde comme parallèles les droites qui concourent en des points à l'infini, les constructions resteront les mêmes que dans le cas général, en vertu du principe de continuité. Mais, se donner un ou deux points à l'infini d'une section conique, c'est par là même se donner la direction d'une ou de deux asymptotes de la courbe, qui par conséquent est une hyperbole; et si l'on assigne, en outre, la tangente en l'un ou l'autre de ces points, on aura par là même l'asymptote correspondante de la courbe.

Pareillement, demander que la section conique ait une de ses tangentes tout entière à l'infini, c'est-à-dire (132) ait pour tangente la droite à l'infini du plan de la figure, soit qu'on assigne ou non le point de contact de cette tangente, c'est, par là même, exiger que la courbe soit une parabole, dont la direction de l'axe est ou n'est pas donnée. Donc on pourra également résoudre toutes les questions analogues à celles qui viennent de nous occuper, en exigeant que la courbe non décrite soit d'une espèce déterminée, c'est-à-dire une hyperbole ou une parabole.

Cas où la section conique, homologique d'une autre, doit être s. et s. p. relativement à une troisième section conique.

332. Les considérations qui précèdent semblent ne pouvoir être facilement appliquées au cas particulier du cercle, par la raison que trois conditions quelconques suffisent pour déterminer entièrement une telle courbe, sans que, en apparence, il y ait d'autres conditions accessoires à celles-là ; comme il arrive dans le cas de la parabole, qui est toujours censée avoir une tangente donnée à l'infini. Mais on ramène facilement encore ce cas particulier au cas général, en traçant, à volonté, une circonférence de cercle quelconque sur le plan de la figure; car elle aura (94) en commun, avec celle qu'on cherche, une sécante à l'infini parfaitement déterminée, puisqu'elle est la polaire du centre de ce cercle; et par conséquent, indépendamment des trois conditions que doit remplir en général le cercle cherché, il sera encore assujetti à passer par deux points définis par le système de cette sécante et du cercle tracé à volonté sur le plan de la figure; ce qui ramène évidemment les

questions dont il s'agit aux circonstances particulières des problèmes qui précèdent.

333. En général on peut demander que la section conique, non décrite, soit s. et s. p. relativement à une section conique quelconque donnée sur le plan de la figure; car on aura, par là même, deux points à l'infini de cette section conique. Il y a cependant ici une difficulté, qui n'a pas lieu lorsque les deux points dont il s'agit sont immédiatement donnés : c'est que ces points peuvent être entièrement imaginaires, pour le cas où la courbe cherchée doit être une ellipse ou un cercle.

Voyons, par un exemple particulier, comment on pourra la résoudre ; il sera très-facile d'étendre ensuite ce que nous dirons au cas général où les deux points imaginaires, au lieu d'être à l'infini, seraient quelconques, et appartiendraient ainsi à une sécante idéale, à distance finie, commune à la section conique qu'on cherche et à une troisième section conique donnée prise pour auxiliaire.

334. Supposons donc qu'en un point donné S (*fig.* 45) d'une section conique, il s'agisse de mener le cercle osculateur, et, afin de simplifier, prenons pour cercle auxiliaire l'un quelconque de ceux qui touchent la section conique en S; ce point sera (319) un centre d'homologie commun à la fois aux trois courbes : or toute la question consiste à trouver un seul point de la sécante commune à la section conique et au cercle osculateur, conjuguée à la tangente en S ; car on sait (320) que cette sécante doit, en outre, passer par le point dont il s'agit.

Traçons, à volonté, deux cordes AB et BC dans la section conique, et soient A'B', B'C' leurs homologues dans le cercle auxiliaire ; ces dernières devront être parallèles aux cordes correspondantes du cercle osculateur, c'est-à-dire qu'elles concourront avec elles sur la sécante commune à l'infini à ces cercles. Ainsi, sans connaître le cercle osculateur, on peut déterminer directement les points où les cordes qui lui appartiennent, et qui sont homologues à celles AB et BC, rencontrent la droite à l'infini du plan de la figure ; projetant donc ces points sur les cordes AB, BC par les parallèles SK et SL à A'B' et B'C', les points K et L, ainsi obtenus, seront, pour la section conique, les homologues de ceux dont il s'agit ; et par conséquent KL sera, pour cette même courbe, la droite qui est l'homologue de celle à l'infini relative au cercle osculateur. Mais les droites homologues doivent concourir (320) sur la sécante commune conjuguée à la tangente au point S ; donc SR, parallèle à KL, est la sécante commune dont il s'agit, et partant le point R, où elle

rencontre la section conique, est un des points du cercle osculateur; ainsi l'on aura tout ce qu'il faut pour le déterminer complètement, soit par points, soit directemont, en menant par R un cercle tangent en S à la section conique.

335. On remarquera que toutes ces constructions peuvent s'effectuer au moyen de la règle seule, quand une fois le cercle auxiliaire est tracé ainsi que son centre (255), ce qui a lieu même pour le cas où l'on n'aurait que trois points quelconques A, B, C de la section conique et la tangente au quatrième point S; car au moyen de l'*hexagramme* de Pascal (207), on en obtiendra immédiatement autant d'autres qu'on voudra.

Au reste, on simplifiera beaucoup les constructions qui précèdent, en faisant attention que, si l'on prolonge les cordes A'B', B'C' du cercle auxiliaire jusqu'à leurs rencontres en K' et L' avec celles qui leur sont respectivement homologues sur la section conique, la droite K'L', qui passe par ces deux points, devra nécessairement être parallèle à celle KL, déterminée ci-dessus; car les triangles KLS, K'L'B', qui ont déjà deux côtés respectivement parallèles, ont, par construction, le point B pour centre d'homologie ou de similitude.

336. Si l'on observe que la droite K'L' est, à son tour, la sécante commune au cercle auxiliaire A'B'C' et à la section conique, conjuguée à la tangente commune du point de contact S, on en déduira, en passant, ce théorème, dont nous donnerons plus tard une démonstration entièrement directe et générale :

Les sécantes communes à une section conique et à une suite de cercles tangents en un point donné de cette section conique, qui sont conjuguées à la tangente en ce point, sont toutes parallèles entre elles, ou vont concourir en un même point situé à l'infini.

337. Quand le point de contact S est l'extrémité d'un des axes principaux de la courbe, la sécante commune KL et toutes ses semblables deviennent évidemment parallèles à la tangente en S; donc celle SR, qui appartient au cercle osculateur, se confond alors avec cette tangente, et partant (321) le cercle osculateur a un contact du troisième ordre avec la section conique. Or cette nouvelle condition détermino entièrement le cercle osculateur; en effet, la corde de ce cerclo, homologue à une corde quelconque AB de la courbe, doit couper cette corde en un point de la tangente en S; de plus, selon ce qui précède, elle doit être parallèle à A'B'; donc sa position est entièrement déterminée et, par suite, celle du cercle osculateur lui-même.

Usage des théories précédentes pour la construction des sections coniques assujetties à certaines conditions.

338. L'un des grands avantages de la théorie des centres et axes d'homologie, c'est de permettre de ramener directement les questions graphiques qu'on peut avoir à résoudre sur les sections coniques en général, à de simples questions du même genre sur la circonférence du cercle. Tout consiste en effet (302, 303) à tracer, sur le plan de cette section conique, un cercle dont le centre et l'axe d'homologie avec elle soient connus : or c'est ce qui est très-facile dans bien des cas.

Par exemple, si la section conique est décrite, on lui mènera un cercle tangent en un point quelconque, en déterminant, au moyen de l'*hexagramme* de Pascal (206), la tangente en ce point, qui d'ailleurs sera un centre d'homologie des deux courbes. Dans le cas où l'on n'aurait que cinq points ou cinq tangentes, etc., de la section conique, on obtiendrait encore sans peine. au moyen du théorème cité et de son analogue (212), soit la tangente en l'un des points donnés, soit le point de contact de l'une des tangentes données, d'où s'ensuivrait, comme ci-dessus, le cercle homologique à la courbe proposée.

339. En général, si la section conique, au lieu d'être décrite, n'est donnée que par cinq conditions, il faudra se servir de ces conditions pour déterminer un cercle dont le centre et l'axe d'homologie avec la courbe proposée soient connus. Or, en n'admettant parmi ces conditions que celles où l'on se donne des points et des tangentes de la courbe, la question se ramènera de suite à quelqu'une de celles qui font le sujet des articles 307, 308 et suivants, soit en menant un cercle par deux des points donnés, soit en traçant, au contraire, un cercle tangent à deux des droites données.

Dans le cas où l'on demanderait que la courbe fût s. et s. p. par rapport à une autre section conique donnée, le cercle auxiliaire deviendrait inutile, et l'on pourrait se servir de la section conique donnée elle-même, puisqu'elle devrait avoir, avec celle qu'on cherche, la droite à l'infini du plan pour sécante idéale commune, droite qui est toujours censée connue, en admettant qu'on puisse tirer des parallèles, ou qu'on ait seulement (198) un parallélogramme quelconque tracé dans le plan de la figure, ou enfin, ce qui revient au même (248), qu'on ait le centre de la section conique qui sert de comparaison. Dans ces mêmes circonstances, trois conditions nouvelles suffiraient évidemment (306) pour déterminer entièrement la section conique.

Il y aurait un cas beaucoup plus général à considérer, c'est celui où l'on demanderait que la courbe cherchée fût semblable de grandeur à une section conique donnée, sans être semblablement placée; mais, excepté le cas où la courbe doit être une parabole ou un cercle, la question paraît présenter des difficultés toutes particulières, sur lesquelles je crois assez inutile d'insister (*).

340. Si l'on remplaçait les données générales qui précèdent par d'autres, telles que les diamètres conjugués, les axes, les asymptotes, etc., de la courbe, la recherche du cercle auxiliaire deviendrait encore plus simple et plus facile; je me dispenserai d'entrer dans des détails à ce sujet. Cependant la question où l'on se donnerait le centre de la courbe et certains points ou certaines tangentes, au nombre de trois seulement, mérite particulièrement d'être remarquée, tant à cause de la simplicité de la solution dont elle est susceptible qu'à cause des conséquences qu'on en peut déduire pour des questions plus générales.

En effet, au moyen de chacune des tangentes et de chacun des points donnés, au nombre de trois seulement, on obtiendra directement une nouvelle tangente et un nouveau point placés symétriquement à l'égard du centre de la courbe; par quoi le problème sera de suite ramené à quelques-uns de ceux qui précèdent. Or il résulte de là (120) que, quand on se donne, outre trois points ou trois tangentes, etc., d'une section conique, un quatrième point quelconque de son plan et la polaire qui lui correspond, on peut tracer directement la courbe avec la règle seule.

341. Les questions que nous venons de résoudre se rapportent au problème général qui suit, dont les cas, dépendant purement de la Géométrie de la règle, ont déjà été résolus dans le IIe Chapitre de la précédente Section.

Étant donnés n *points* (n *ne pouvant surpasser* 5) *et* 5—n *tangentes d'une section conique, tracer la courbe?*

Ce problème, envisagé dans toute sa généralité, a été traité d'une manière complète par M. Brianchon, dans son excellent *Mémoire sur les lignes du second ordre*, déjà souvent cité; mon dessein n'est pas de revenir en détail sur chacun des cas dont se compose le problème, je ne ferais que répéter ce qui a déjà été dit plus généralement dans ce qui précède; il me suffit

(*) *Voyez* p. 205 du tome XI des *Annales de Mathématiques*, un article sur la *Détermination de l'hyperbole équilatère au moyen de quatre conditions données*. (Errata et Annotations.)

d'avoir montré comment la théorie des sécantes et des tangentes communes aux sections coniques peut y conduire sans peine et d'une manière tout à fait directe. On remarquera, au surplus, que cette même théorie donne deux et trois manières différentes de résoudre graphiquement chacun des cas compris dans l'énoncé, selon que le cercle auxiliaire passe par deux points donnés ou touche deux des droites données; elle offre, en outre, l'avantage d'étendre le sens de cet énoncé à des questions intimement liées à la première, et qui semblent en différer sous tous les rapports, en considérant les choses sous le point de vue purement géométrique.

342. Ainsi nos constructions s'étendent au cas où deux des points ou des droites données sont à la fois imaginaires, pourvu que le système de ces points ou de ces droites soit défini d'une manière convenable : les deux points par le système d'une droite et d'un cercle ou d'une section conique quelconque, les deux droites par celui d'une courbe pareille, considérée comme tangente à ces droites, et d'un point qui en serait le concours idéal. Il serait même possible, et il ne serait guère plus difficile, de trouver des constructions qui s'étendissent au cas où, soit quatre droites, soit quatre points, deviendraient imaginaires; dans tous ces cas, le nombre des solutions est toujours le même. Comme nous devons revenir, dans le Chapitre suivant, sur les questions dont elles dépendent immédiatement (306), nous nous contenterons, pour le moment, d'un seul exemple.

343. Supposons donc qu'on se donne une tangente et quatre points imaginaires de la courbe; ces quatre points pourront être définis par le système de deux droites et d'une autre section conique décrite sur le plan de la première : or, ces droites pouvant et devant être regardées comme les sécantes conjuguées communes aux deux courbes, ou comme deux axes d'homologie conjugués, la polaire de leur point d'intersection, dans la courbe donnée, devra évidemment (253) passer par les deux centres d'homologie correspondants; de sorte qu'il ne s'agira, pour avoir l'un ou l'autre de ces deux centres, que de trouver de nouvelles droites qui les renferment.

A cet effet, de chacun des points où la tangente donnée rencontre les axes d'homologie on mènera deux tangentes à la courbe décrite : l'une sera l'homologue directe (250 et 292), et l'autre l'homologue inverse de la première; et par conséquent (251) les droites, réunissant les points de contact qui n'appartiennent pas à des tangentes partant d'un même axe, iront rencontrer le rayon d'homologie déjà trouvé, en quatre points qui seront autant de centres d'homologie, au moyen desquels on décrira sans peine chacune des

sections coniques distinctes qui résolvent le problème, lesquelles ne sont évidemment (306) qu'au nombre de deux seulement.

Construction graphique du centre, des axes, des asymptotes, etc., d'une section conique donnée par certaines conditions.

344. Il arrive fort souvent, dans les questions qui tiennent aux arts graphiques : la perspective, les ombres, etc., qu'une section conique étant donnée par certaines conditions, telles que celles énoncées art. 339 et 340, on ait besoin de déterminer, soit les points où la coupe une droite tracée sur son plan, soit les tangentes partant d'un point donné, soit ses axes principaux, son centre, etc.; il conviendrait peu d'avoir recours au tracé de la courbe par points, souvent aussi long que pénible, et qui pourrait ne rien donner de bien exact; on se verra donc obligé, la plupart du temps, d'attaquer chaque question d'une manière directe et indépendamment des objets donnés dans l'espace; or, je ne pense pas qu'aucune théorie puisse fournir des solutions à la fois plus directes et plus simples que celles auxquelles conduit la théorie des figures homologiques.

En effet, ayant décrit, comme il a été expliqué art. 338 et 339, un cercle auxiliaire, on aura tout ce qu'il faut pour opérer directement sur la courbe non décrite, et résoudre (303) les diverses questions graphiques qui lui sont relatives et sont analogues à celles qui précèdent. On remarquera même que ces constructions, si l'on en excepte celle du cercle auxiliaire, sont toutes linéaires et peuvent s'exécuter par conséquent avec la règle seule ou de simples alignements; d'où il suit que, dans le problème général de l'article 305, il est inutile que la section conique donnée soit décrite, et qu'il suffit qu'on connaisse cinq des conditions qu'elle doit remplir.

345. Voyons maintenant comment ces constructions si faciles conduisent immédiatement à la détermination du centre, des asymptotes et des axes de la section conique. En observant que le centre d'une section conique est précisément le pôle de la droite à l'infini de son plan; que les asymptotes elles-mêmes sont les tangentes qui passent par ce pôle et touchent la courbe aux points où la rencontre la droite dont il s'agit; qu'enfin les axes principaux de la courbe ne sont eux-mêmes autre chose que les droites qui divisent en deux parties égales l'angle et le supplément de l'angle des asymptotes, on voit que tout revient finalement à trouver, pour le cercle auxiliaire, la droite qui est l'homologue ou la projection de celle à l'infini du plan de la figure, considérée comme appartenant à la section conique; ce qui est

facile, en recherchant les points où la droite à l'infini rencontre deux autres droites quelconques relatives à cette courbe, et projetant ces points sur celles qui leur sont homologues dans le cercle, par de nouvelles droites évidemment parallèles aux premières et partant du centre d'homologie.

346. Supposons qu'ayant tracé (*fig.* 46) un cercle auxiliaire dont S soit le centre d'homologie avec la courbe non décrite, on détermine, ainsi qu'il vient d'être expliqué, la droite *mn* qui, pour ce cercle, est l'homologue de celle à l'infini relative à la section conique; il pourra arriver que cette droite rencontre le cercle en deux points x, y, la touche en un seul, ou n'ait aucun point commun avec elle.

Dans le premier cas, la courbe aura deux points à l'infini, placés sur les rayons d'homologie Sx et Sy, qui seront évidemment parallèles aux deux branches de la courbe, laquelle sera par conséquent une hyperbole, dont on obtiendra les asymptotes en recherchant les droites qui, par rapport à elle, sont les homologues des tangentes Px, Py, aux points x et y du cercle.

Dans le second cas, la section conique n'aura qu'un seul point à l'infini, mais la tangente qui lui correspond sera elle-même tout entière à l'infini; ce sera donc une parabole, ayant pour direction commune à tous ses diamètres le rayon d'homologie correspondant au point de contact de *mn* avec le cercle. Or, on obtient de là aisément le grand axe de la courbe, puisqu'il est la polaire du point situé à l'infini sur les directions perpendiculaires à celle de ces diamètres.

Enfin, dans le dernier cas, la section conique, n'ayant aucun point à l'infini, sera entièrement fermée et par conséquent une ellipse, dont on aura le centre en recherchant le point qui, par rapport à elle, est l'homologue du pôle P de la droite *mn* du cercle.

347. Dans le cas où la courbe est une hyperbole, on obtient aisément des parallèles aux axes principaux, en divisant en deux parties égales l'angle et le supplément de l'angle formé par les deux rayons d'homologie Sx et Sy parallèles aux asymptotes. Or, on peut obtenir directement ces deux parallèles aux axes, par une construction indépendante des rayons d'homologie dont il s'agit, et qui s'applique par conséquent au cas de l'ellipse, pour lequel ces rayons n'existent plus.

Pour plus de simplicité, prenons que le centre d'homologie S soit un point de contact (319) commun au cercle auxiliaire et à la courbe; traçons le diamètre HK du cercle, qui passe par le pôle P de la droite *mn*, lequel est toujours possible; menons par ses extrémités et par le point S les droites SH

et SK, elles seront évidemment les droites demandées. Cette construction, étant toujours possible, servira, dans tous les cas, à faire connaître la position et par suite la grandeur des axes de la courbe, puisque l'on en a déjà obtenu le centre qui est homologue à P.

Si le centre d'homologie S n'appartenait pas au cercle auxiliaire, il faudrait faire passer un autre cercle par ce point, et qui eût *mn* pour sécante, réelle ou idéale, commune avec le premier, ce qui est facile; après quoi la construction s'effectuerait sur ce nouveau cercle, comme dans le premier cas, au moyen du diamètre qui passe par P.

348. La question qui vient de nous occuper n'est évidemment qu'un cas très-particulier de celle où il s'agit de trouver un système de diamètres conjugués formant un angle de grandeur donnée; question qui peut encore se résoudre, d'une manière très-simple, à l'aide des considérations suivantes.

Soit toujours *mn* (*fig.* 47) la droite qui, pour le cercle auxiliaire, représente celle à l'infini du plan de la section conique, ou est son homologue; soit P son pôle, lequel est homologue au centre de cette section conique; menons à volonté, du point P, la sécante PAB dans le cercle, elle représentera un diamètre de la section conique, ou, si l'on veut, elle sera homologue à un certain diamètre de cette courbe; traçons enfin les tangentes aux points A et B où cette sécante rencontre le cercle auxiliaire, elles représenteront les tangentes parallèles aux extrémités du diamètre de la section conique, et le point N de leur intersection, qui appartient nécessairement (194) à la polaire *mn* de P, représentera le point à l'infini de ces mêmes parallèles.

Or, il suit de cette construction que PN, qui joint le point N au pôle P, sera l'homologue du diamètre qui, dans la section conique, est conjugué à celui que représente AB; donc les rayons d'homologie SM et SN, répondant aux points M, N où les droites PB, PN rencontrent *mn*, seront respectivement parallèles aux diamètres conjugués dont il s'agit, et partant l'angle MSN est égal à l'angle formé par ces diamètres.

349. Supposons maintenant que l'on se donne l'angle MSN formé par deux diamètres conjugués, et qu'il s'agisse de trouver la position de ces diamètres; tout consistera évidemment à trouver celle des droites PM, PN qui les représentent dans le cercle, et à les projeter sur la section conique. On remarquera, à cet effet, que les trois points P, M, N doivent être tels (196), d'après ce qui précède, que chacun d'eux soit le pôle de la droite qui joint les deux autres; de sorte que, en essayant d'inscrire au cercle un quadrilatère RSTU qui ait P et N pour points de concours des côtés opposés, et le centre d'ho-

mologie S pour un de ses sommets, ce quadrilatère devra se fermer, de lui-même (193), sur le cercle, et avoir le point M pour intersection de ses diagonales; donc la corde TU, qui sous-tend l'angle donné MSN dans le cercle, doit passer par le point P, pôle de la droite connue *mn*: mais cette corde est donnée de grandeur en même temps que l'angle dont il s'agit; donc la question est ramenée à celle d'inscrire au cercle proposé une corde de longueur donnée, qui tende au point P; problème on ne peut plus facile à résoudre.

Ayant ainsi la position de la corde TU, on en déduira de suite, par une construction purement linéaire, celle des droites PM et PN, et partant la grandeur et la position des diamètres conjugués qui leur correspondent dans la section conique.

350. Ce problème a, comme on voit, deux solutions distinctes, qui se réduisent à une seule quand l'angle des diamètres doit être droit. Dans ce cas, on retombe évidemment sur la solution déjà donnée plus haut (347); mais les considérations générales qui précèdent offrent, de plus, l'avantage de faire connaître simultanément et la position et la grandeur de ces axes, en faisant usage de la règle seulement, quand le cercle auxiliaire est une fois décrit et que son centre est assigné. D'ailleurs les constructions qui en résultent s'étendent à toutes les sections coniques, même à la parabole, et elles mettent en évidence la loi que suivent les angles formés par leurs systèmes de diamètres conjugués. Ainsi l'on voit très-bien que, dans la parabole et l'hyperbole, ces angles peuvent croître depuis 0 jusqu'à 200 degrés; tandis que, dans l'ellipse, ces mêmes angles sont susceptibles d'un *maximum* et d'un *minimum*.

Réflexions sur la possibilité de résoudre linéairement tous les problèmes du second degré, au moyen d'un seul cercle une fois tracé, ou d'un angle d'ouverture donnée.

351. Dans ce qui précède, on a vu comment, ayant deux droites homologues à deux diamètres conjugués d'une section conique donnée seulement par certaines conditions, on pouvait déterminer directement, au moyen du cercle auxiliaire, l'angle formé par ces diamètres et la direction des côtés de cet angle; les mêmes constructions s'appliquent évidemment à la détermination de l'angle de deux droites quelconques appartenant à la section conique, en recherchant, pour le cercle, celles qui sont leurs homologues. Or il suit de là qu'on pourra ramener immédiatement toutes les questions

d'angles qu'on se proposera sur les sections coniques, en général, à d'autres questions semblables sur le cercle; pourvu, toutefois, que les autres conditions du problème ne concernent que la direction indéfinie des lignes et leurs concours (*).

352. Les problèmes qui ne concernent purement que les relations projectives sont surtout remarquables en ce que, ramenés à d'autres sur le cercle auxiliaire, ils conduisent précisément à des questions du même genre que celles qu'on s'était proposées sur la section conique correspondante, ce qui n'a pas lieu pour le cas qui précède, où l'on considère des relations d'angles. Il est à remarquer, d'ailleurs, que, sauf le tracé du cercle auxiliaire tangent à la section conique, tout doit s'exécuter sans l'intervention du compas, quand la solution est du second degré seulement : on en a rencontré de nombreux exemples dans ce qui précède, et il ne serait pas difficile de les multiplier davantage; mais, au lieu de nous arrêter longuement à l'examen des cas particuliers, il vaudra beaucoup mieux que nous présentions, sur ce sujet, quelques réflexions générales.

353. Nous avons déjà vu (255) que, quand un cercle est donné et décrit sur un plan, et qu'en outre on en a le centre, il est possible de mener, avec la règle seule, des parallèles à des droites données sur son plan, d'abaisser ou d'élever des perpendiculaires sur ces mêmes droites, ou de mener d'autres droites qui fassent avec elles des angles donnés, etc., etc.; or je dis qu'il en sera ainsi, en général, de tous les problèmes du second degré qu'on pourrait se proposer sur certaines figures.

En effet, tout problème du second degré doit se ramener finalement à des intersections de lignes droites connues et de cercles donnés par trois conditions : comme de passer par certains points et de toucher certaines droites. Mais chacun de ces cercles aura de plus, avec le cercle supposé donné et décrit, une sécante idéale commune à l'infini, polaire du centre de ce cercle, et par conséquent connue; donc on obtiendra, par quelqu'un des procédés généraux précédemment décrits, et toujours avec la règle, le centre de similitude qui appartient à ce cercle et au cercle donné par certaines conditions, et finalement on obtiendra, avec la règle et au moyen du premier cercle, tout ce qui peut appartenir au second (344).

(*) On pourrait aussi admettre les relations métriques, pourvu qu'elles fussent projectives, ou qu'au moins, en les étendant d'une manière convenable, on pût les considérer comme telles; car ces sortes de relations subsistent évidemment (301) pour le cercle et la section conique qui lui est homologique.

354. Ce qui précède nous a déjà fourni des exemples qui montrent combien le choix du cercle auxiliaire a d'influence sur la simplicité des résultats auxquels on doit parvenir : la même chose aura lieu pour toutes les questions qu'on pourra avoir à résoudre ; car il est visible que, plus le cercle auxiliaire sera lié intimement aux données et aux inconnues du problème, plus la détermination de ces dernières sera facile, et moins elle exigera de lignes droites à tracer. On voit, d'ailleurs, comment il faudrait agir si l'on se trouvait, de toute nécessité, réduit à l'emploi d'un cercle quelconque tracé sur le plan de la figure ; car, d'après ce que nous venons de dire, on trouvera de suite, à l'aide de ce cercle et en ne faisant usage que de la règle, ce qui pourrait concerner toute autre circonférence de cercle non décrite, qui aurait une dépendance plus intime avec les objets de la figure, et des dépendances connues avec les objets qu'on cherche.

355. Je n'ajouterai rien de plus sur ce sujet, qui d'ailleurs en vaudrait bien la peine, et je me contenterai de conclure, d'une manière générale, que tout problème du second degré qu'on a jusqu'ici résolu ou qu'on pourrait résoudre, par la suite, avec la règle et le compas sur un plan, ou avec une chaine et un graphomètre non gradué sur le terrain, devra, par là même, pouvoir se résoudre avec la règle seulement, ou par de simples alignements au moyen de jalons, toutes les fois que, parmi les données, se trouvera une seule circonférence de cercle dont le centre sera connu et le périmètre tracé.

356. L'*équerre d'arpenteur* ou même la *fausse équerre* (c'est-à-dire un angle quelconque d'ouverture donnée) qu'on peut se procurer partout à si peu de frais, au moyen de deux traits de scie faits en croix sur la tête d'un piquet, ou seulement de trois épingles qui y seraient fixées perpendiculairement, présentera le moyen bien simple, non-seulement de faire passer un cercle par deux points assignés sur le terrain, ce qui est assez peu utile, mais encore de déterminer *à priori*, par un tâtonnement facile et souvent usité pour l'équerre d'arpenteur, les deux points où ce cercle rencontre un alignement quelconque donné sur le terrain.

On connait, d'ailleurs, les moyens de mener directement, à l'aide de la fausse équerre, des parallèles ou des perpendiculaires à des lignes accessibles et données ; donc il sera facile de déterminer, une fois pour toutes, le centre du cercle dont il s'agit, ce qui, d'après les fonctions que remplit l'instrument, ne sera indispensable que dans quelques circonstances particulières ; comme lorsqu'il s'agira, par exemple, de porter une distance donnée sur une direction également donnée, etc. Ainsi, à l'aide d'une fausse équerre, on

sera à même de résoudre tous les problèmes du second degré sur le terrain, sans mesurer aucun angle, ni aucune distance; et, comme on opère linéairement sur les droites et les points inaccessibles, donnés au moyen de certaines conditions, comme on opère sur les droites et les points situés à l'infini (197, 198), on voit qu'on pourra aborder directement toutes les questions qui font le sujet ordinaire de la Géométrie pratique.

357. Ces diverses réflexions doivent faire sentir l'importance des ressources que peut offrir la fausse équerre pour résoudre certains problèmes sur le terrain, et l'influence qu'elle peut exercer sur la simplicité des opérations qu'on pourrait y faire : l'une et l'autre se trouvent d'ailleurs confirmées par les résultats auxquels est déjà parvenu l'ingénieux et savant auteur des *Solutions peu connues, etc.* (168, note). Quant à ce qui touche la possibilité de résoudre linéairement tous les problèmes du second degré à l'aide d'un seul cercle dont on a le centre, elle nous semble également confirmée, et par les réflexions générales qui précèdent, et par les diverses solutions de problèmes données dans le Chapitre III de la IIe Section.

On peut prendre, d'après cela, une idée de l'étendue immense des développements que peut recevoir un jour la Géométrie *linéaire* ou de la règle; mais ce qui paraîtra surtout digne de remarque, c'est que cette même Géométrie, si simple dans ses principes et dans sa marche, donne les solutions à la fois les plus élégantes et les plus directes que l'on connaisse; c'est qu'elle conduit à ces solutions d'une manière naturelle, et non par des *tours de force*, comme il arrive pour la *Géométrie du compas*; en sorte qu'il semble de la nature même des problèmes du second degré de pouvoir être ramenés, dans leurs solutions, à des combinaisons d'une seule ligne de ce degré avec des systèmes de lignes droites indéterminées de grandeur et de direction, et non, au contraire, à des combinaisons plus ou moins complexes, plus ou moins multipliées, de circonférences de cercle ou, en général, de courbes du même degré. (*Voyez* les *Annotations de l'Errata.*)

CHAPITRE II.

PROPRIÉTÉS ET CONSTRUCTION DU SYSTÈME COMPLET DES SÉCANTES ET DES TANGENTES COMMUNES A DEUX SECTIONS CONIQUES SITUÉES SUR UN PLAN. — DES SYSTÈMES DE SECTIONS CONIQUES QUI ONT DES SÉCANTES ET DES TANGENTES COMMUNES, ETC.

358. Jusqu'ici nous nous sommes occupés uniquement des propriétés individuelles des centres et axes d'homologie conjugués des sections coniques; il nous reste, pour compléter ce sujet, à rechercher l'ensemble des relations qui lient entre eux tous les points et droites de cette espèce susceptibles, en général, d'appartenir au système de deux sections coniques données à volonté sur un plan, c'est-à-dire les relations qui embrassent à la fois toutes leurs sécantes communes et tous les points de concours de leurs tangentes communes; nous en déduirons ensuite des moyens entièrement directs de construire graphiquement ces droites et ces points, quand les sections coniques sont décrites sur un plan ou seulement données par certaines conditions; problème important et dont la solution nous semble renfermer à elle seule toutes celles des problèmes des quatre premiers degrés, puisqu'une question quelconque peut toujours être ramenée à la recherche des points d'intersection de deux lieux donnés du second ordre.

Du système complet des sécantes et des tangentes communes à deux sections coniques situées sur un même plan.

359. Deux sections coniques quelconques, tracées sur un plan, ne peuvent avoir (203) plus de quatre points communs sans se confondre, et par conséquent plus de six sécantes communes, lesquelles forment par leurs intersections mutuelles un quadrilatère simple avec ses deux diagonales : or, en combinant, deux à deux, celles de ces sécantes dont le point d'intersection n'appartient à aucune des deux courbes, on obtient évidemment, en tout, trois systèmes de sécantes conjuguées communes, dont les points de concours sont ceux des côtés respectivement opposés et des diagonales du quadrilatère dont il s'agit; donc il n'existe pareillement (292) que trois systèmes de points de concours conjugués de tangentes communes correspondant respectivement aux premiers; c'est-à-dire, en tout, six centres d'homologie, résultant

de l'intersection mutuelle des quatre tangentes communes que possèdent, en général et au plus (209), les deux courbes.

S'il pouvait y avoir plus de trois systèmes de centres d'homologie conjugués deux à deux, il y aurait pareillement plus de trois systèmes d'axes d'homologie conjugués ou de sécantes communes réelles ou idéales; ce qui est absurde, puisque le point d'intersection de deux sécantes, non conjuguées entre elles, est nécessairement (*) un point commun des deux courbes, et qu'elles en auraient ainsi plus de quatre de cette espèce. Enfin il est aisé de voir que, quand deux sections coniques ont quatre points communs réels, elles ont nécessairement aussi quatre tangentes communes; nous verrons bientôt que la proposition inverse n'est pas vraie, comme cela résulte d'ailleurs directement de l'examen de ce qui se passe pour deux cercles, et de plus nous ferons connaître les raisons pour lesquelles il en est ainsi.

360. Cela posé, considérons donc le système général de deux sections coniques ayant quatre points communs A, B, C, D (*fig.* 48), et quatre tangentes communes A'B', B'C', C'D', D'A'; en joignant deux à deux, par des droites, les quatre points dont il s'agit, pour avoir les six sécantes communes aux deux courbes, on formera le quadrilatère simple ABCD, avec ses deux diagonales AC et BD, qui sera inscrit à la fois à ces courbes, et dans lequel ces deux diagonales et les deux paires de côtés opposés AB et CD, AD et BC seront les trois systèmes de sécantes communes conjuguées, concourant respectivement en L, M, K, au dehors du périmètre des deux courbes. Si l'on prolonge pareillement les quatre tangentes communes jusqu'à leurs intersections mutuelles, et qu'on joigne, deux à deux, par de nouvelles droites, les points de cette intersection, on obtiendra le quadrilatère complet PA'D'C'QB'P, circonscrit à la fois aux deux courbes, avec ses trois diagonales A'C', B'D' et PQ, dont les sommets correspondants sont deux à deux conjugués (292), et forment les trois systèmes de points de concours conjugués des tangentes communes; or il existe, entre ces systèmes et ceux qui appartiennent aux sécantes communes, une liaison très-remarquable, et que nous allons maintenant examiner.

(*) Cette conséquence, qui résulte immédiatement du principe de continuité, peut se déduire également des propriétés qui doivent appartenir aux deux sécantes dont il s'agit. En effet, la chose est évidente pour le cas où les deux sécantes sont réelles; dans le cas contraire, on peut mettre (121) la figure en projection sur un nouveau plan, de façon que les sections coniques deviennent des cercles, qui ne sauraient avoir plus de deux sécantes communes (69), à distance donnée ou infinie.

D'abord il résulte, des propriétés du quadrilatère inscrit aux sections coniques (192), que :

Les trois points L, M, K, *où concourent, deux à deux, les sécantes conjuguées communes, sont tels, que l'un quelconque d'entre eux est à la fois, pour les deux courbes, le pôle de la droite qui renferme les deux autres.*

D'un autre côté, il résulte aussi (253) directement des propriétés des centres et axes d'homologie des sections coniques, qui ont été exposées précédemment, que :

Chacun des trois points L, M, K *est le pôle de la droite qui renferme les deux centres d'homologie conjugués aux sécantes communes passant par ce point.*

Donc cette droite, qui est une des trois diagonales du quadrilatère circonscrit à la fois aux deux courbes, se confond, pour la direction, avec celle qui passe par les deux autres des points L, M, K dont il s'agit, et par conséquent :

Les trois diagonales du quadrilatère complet formé par les quatre tangentes communes aux deux courbes se confondent, pour la direction, avec les trois droites qui joignent, deux à deux, les points L, M, K *où concourent respectivement les sécantes conjuguées communes à ces courbes.*

361. Ainsi chacun des trois points L, M, K est le concours unique de quatre lignes droites formant un faisceau harmonique (186), savoir : deux sécantes conjuguées communes et deux droites appartenant à deux systèmes de points de concours conjugués de tangentes communes.

Pareillement, chacune des trois droites LM, LK, MK porte quatre points formant un groupe harmonique (186), savoir : deux points de concours de sécantes conjuguées communes, et deux points de concours conjugués de tangentes communes.

Enfin, chacune des distances A'C', LK, etc., qui séparent, soit deux points de concours conjugués de tangentes communes, soit deux points de concours de sécantes conjuguées communes, est encore divisée harmoniquement aux deux points où sa direction rencontre l'une ou l'autre courbe (186).

362. L'inspection de la figure donne encore lieu à beaucoup d'autres remarques : par exemple, on aperçoit de suite que, si l'on trace, dans chaque courbe, le quadrilatère inscrit qui a pour sommets les points de contact correspondants des tangentes communes, 1° les diagonales qui joignent ces points de contact se croiseront toutes au point L; 2° les côtés opposés iront concourir respectivement aux deux autres points K et M; en sorte que cha-

cun de ces trois points sera le concours unique de huit lignes droites appartenant aux quatre quadrilatères; 3° etc.

Toutes ces propriétés résultent immédiatement de celles qui ont été établies, dans la deuxième Section, sur les quadrilatères inscrits et circonscrits aux sections coniques; mais on peut aussi y arriver, d'une manière directe et simultanée, en considérant (133) la figure comme la projection du système d'une circonférence de cercle et d'une section conique concentriques : la droite KM peut alors être censée à l'infini; le point L, pôle de cette droite, est devenu le centre commun des deux courbes, et tout prend une position symétrique autour de ce point; de sorte que les propositions qui précèdent deviennent évidentes pour la nouvelle figure, et se peignent à l'œil.

363. Ces dernières considérations font voir, de plus, qu'un point quelconque ne peut être à la fois le pôle d'une même droite par rapport à deux sections coniques, à moins qu'il n'appartienne à deux sécantes conjuguées communes, réelles, idéales ou imaginaires, de ces courbes; car, en mettant la figure en projection sur un nouveau plan, de façon que la droite passe à l'infini, le point dont il s'agit deviendra (116) le centre commun des deux courbes, dont l'une pourra d'ailleurs être un cercle, comme dans le cas qui précède. Donc aussi :

Quand trois points, situés sur le plan de deux sections coniques, sont tels, que chacun d'eux est le pôle de la droite qui renferme les deux autres, ces points sont nécessairement ceux où concourent deux à deux les sécantes conjuguées communes de ces courbes.

Cas où les tangentes et les points communs au système de deux sections coniques deviennent en partie imaginaires.

364. Quand il arrive que les deux sections coniques, toujours situées sur le même plan, n'ont plus que deux points réels communs, et que par conséquent les deux autres sont imaginaires, il n'existe plus qu'une sécante commune réelle; celle qui lui est conjuguée est nécessairement idéale, quoique toujours constructible (292). Quant aux quatre autres sécantes communes, elles sont toutes imaginaires (359, note) : dans ces mêmes circonstances, on obtient encore deux points de concours conjugués des tangentes communes, correspondant aux deux sécantes communes constructibles; mais, de ces points, l'un est nécessairement réel et l'autre idéal, c'est-à-dire que les deux courbes ont alors deux tangentes extérieures communes, et ne peuvent en avoir plus de deux.

Enfin, ceux des points L, M, K qui n'appartiennent pas aux deux sécantes en question sont, par cette raison même, devenus également imaginaires aussi bien que les quatre autres centres d'homologie appartenant en général aux deux courbes. Les mêmes choses résultent d'ailleurs directement de ce que les deux courbes, ayant une sécante idéale commune, peuvent alors (121) être considérées rigoureusement comme la projection de deux circonférences de cercle.

365. Maintenant, si l'on suppose que les deux sections coniques soient entièrement extérieures l'une à l'autre, comme l'exprime la *fig.* 49, elles cesseront d'avoir des points communs réels, ou, si l'on veut, leurs quatre points d'intersection seront imaginaires; mais alors même elles auront évidemment, ainsi que cela a lieu pour le cas particulier de deux cercles, quatre tangentes communes réelles et par conséquent six centres d'homologie conjugués deux à deux; donc ces tangentes formeront encore, par leurs intersections mutuelles, un quadrilatère complet PA'QD'C'B'P circonscrit à la fois aux deux courbes, dont les trois diagonales se couperont aux trois points K, L, M, qui en conséquence seront réels, comme dans le cas général (360) où les courbes ont quatre points communs: mais ces courbes ne sauraient d'ailleurs avoir plus de deux sécantes communes, lesquelles sont nécessairement idéales et conjuguées, puisque autrement (359, note) elles posséderaient des points d'intersection réels, ce qui est contre l'hypothèse.

Donc enfin les points de concours des sécantes communes conjuguées peuvent demeurer réels, quoique ces sécantes elles-mêmes soient devenues imaginaires: circonstance parfaitement analogue à celle que présentent les points de concours des tangentes communes, c'est-à-dire qu'il peut aussi exister des points de concours idéaux de sécantes conjuguées communes.

366. Les trois points L, M, K, dont il s'agit, étant demeurés réels, doivent encore jouir des mêmes propriétés à l'égard des sections coniques; ainsi, par exemple: « chacun d'eux est à la fois, dans ces courbes respectives, le » pôle de la droite qui joint les deux autres (360); et, si l'on trace les deux » quadrilatères inscrits à ces courbes, qui ont pour sommets les points de » contact correspondants des tangentes communes, leurs diagonales et leurs » côtés opposés iront concourir respectivement aux trois points dont il » s'agit (362). »

La même chose doit avoir lieu également pour les six centres d'homologie qui sont demeurés réels, pourvu qu'on ait égard aux observations de l'article 136, ou qu'on entende ne parler que des propriétés dont les points et

les lignes de construction demeurent possibles, comme les centres d'homologie qui leur correspondent respectivement. Cette conséquence du principe de continuité est évidente pour les centres d'homologie A′ et C′ où se coupent les paires de tangentes communes de même espèce, et qui embrassent à la fois les deux courbes dans le même angle ou dans des angles opposés par le sommet ; car toutes les démonstrations, jusqu'ici établies pour constater les diverses propriétés des centres d'homologie, sont précisément relatives au cas dont il s'agit, et à celui où les deux tangentes sont supposées imaginaires, tandis que leur point de concours est demeuré réel.

367. Or on peut démontrer cette proposition directement pour chacun des quatre autres centres d'homologie B′, D′, P et Q qui appartiennent à des tangentes communes d'espèces différentes, c'est-à-dire intérieures et extérieures : ainsi, par exemple, pour choisir une propriété dont les lignes de construction ne deviennent pas imaginaires, « si, par l'un quelconque B′ de » ces points, l'on mène une droite arbitraire RB′R′, son pôle π à l'égard de » l'une des deux courbes, et son pôle π' à l'égard de l'autre, seront situés sur » une nouvelle droite $\pi\pi'$ allant concourir réciproquement au point B′ (259). »

Remarquons, en effet, que la corde de contact ou polaire *ab* du point B′, par rapport à la première des deux courbes, doit renfermer le point π, pôle de RB′R′ par rapport à cette même courbe (196), et que par conséquent cette corde est divisée harmoniquement (194) au point π et au point R où elle est coupée par la droite RR′ ; donc les deux tangentes communes B′*a*, B′*b*, la droite B′R et celle qui joint le point π à B′ forment un faisceau harmonique. On prouverait de la même manière, à l'égard de l'autre courbe, que la droite B′π' forme avec les deux tangentes en question et la troisième droite RB′R′ un faisceau harmonique ; donc sa direction se confond avec celle de la droite B′π, et partant les points π, B′, π' sont tous trois en ligne droite.

Ainsi la propriété dont il s'agit appartient à la fois aux six points où concourent, deux à deux, les tangentes communes aux deux courbes ; ces points forment donc séparément autant de systèmes assujettis à la même loi, et il n'y a de différence entre eux que dans la réalité ou la non-réalité des points d'intersection qui leur correspondent dans ces courbes.

368. La raison pour laquelle les autres propriétés, appartenant en général aux centres d'homologie, ne sauraient être applicables au cas où les tangentes correspondantes sont d'espèces différentes, c'est qu'elles feraient trouver d'autres sécantes communes que celles MA, MC qui proviennent des centres d'homologie A′ et C′, et qui sont, comme nous l'avons dit (365),

idéales et conjuguées, en sorte qu'il en résulterait des points d'intersection réels pour les deux courbes, ce qui est contre l'hypothèse. Aussi arrive-t-il que, quand on mène, par un semblable centre d'homologie, une sécante arbitraire, elle ne saurait rencontrer à la fois ces courbes et donner des points homologues. Les sécantes conjuguées communes que ce point est, en général, susceptible de construire, sont donc tout à fait imaginaires, en vertu même des propriétés (250) qui lui appartiennent : cet état particulier du système, à l'égard du centre d'homologie que l'on considère, pourrait d'ailleurs s'exprimer en disant que l'homologie des deux figures est *idéale* ou imaginaire.

Cas où les tangentes et points communs au système de deux sections coniques sont à la fois imaginaires.

369. Il nous reste maintenant, pour compléter cet examen des circonstances générales que présente le système de deux sections coniques quelconques tracées sur un plan, à voir ce qui a lieu pour le cas où, les quatre points de leur intersection commune étant toujours imaginaires, ces courbes elles-mêmes sont entièrement renfermées l'une dans l'autre.

Dans ce cas, il n'y a plus de tangentes communes possibles, et l'on ne voit pas de moyen direct de prouver qu'alors les courbes ont encore des centres et des axes d'homologie ; cependant, comme dans des circonstances pareilles la chose a lieu pour le système de deux cercles tracés sur un plan commun, et qu'un tel système a pour projection, en général, deux sections coniques indépendantes de conditions particulières (121), il est naturel d'en conclure qu'elle a lieu également pour le cas dont il s'agit.

Ainsi deux sections coniques, renfermées l'une dans l'autre sur un même plan, ne sont pas entièrement indépendantes ; elles peuvent avoir des centres et des axes d'homologie conjugués, et jouir à cet égard des nombreuses propriétés qui sont le sujet du précédent Chapitre, mais on voit en même temps que ces centres et ces axes doivent appartenir à des tangentes communes et à des points communs imaginaires.

Pour obtenir les axes ou les sécantes idéales communes dont il s'agit, et, par suite (292), les centres d'homologie correspondants, on pourrait, dans le cas actuel, avoir recours au procédé direct qui résulte de la définition même établie pour ces sortes de sécantes (57) ; mais la construction serait beaucoup trop laborieuse, et aurait le grave inconvénient de ne point éclairer la discussion. Celle que nous allons donner, outre qu'elle est exempte de ces défauts, offre encore l'avantage d'être générale et de pouvoir s'appliquer à

tous les cas que peut présenter le système des deux courbes données, en même temps qu'elle réduit l'objet de la question au degré de simplicité dont il paraît susceptible; mais il est essentiel que nous développions auparavant les principes sur lesquels cette construction se trouve nécessairement fondée.

Nouvelles propriétés et construction générale des points de concours des sécantes conjuguées communes.

370. On a dû s'apercevoir, d'après tout ce qui a été dit sur les trois points K, L, M (*fig.* 48 et 49) où se coupent, deux à deux, les sécantes conjuguées communes au système de deux sections coniques, que ces points sont entièrement analogues à ceux K, L (*fig.* 10) que nous avons appelés (76) les cercles ou points limites d'une suite de circonférences ayant une sécante idéale commune sur un plan. En effet, ces points, en y joignant celui où se coupent, à l'infini, les deux sécantes communes aux cercles dont il s'agit, sont les seuls (80) qui, comme les précédents, jouissent de la propriété d'être tels, « que la droite qui joint deux quelconques d'entre eux est la polaire du » troisième, et se trouve divisée harmoniquement par chacune des deux » courbes. »

Or il résulte, de cette identité parfaite de nature entre les uns et les autres de ces points, que, dans le cas particulier du cercle, les points limites K et L peuvent être considérés réciproquement comme la mutuelle intersection de sécantes communes conjuguées nécessairement imaginaires; et, comme ces points sont projectifs, de leur nature, étant liés aux deux cercles et à leurs sécantes communes par des relations projectives, il en résulte encore que leurs analogues, pour le cas général de deux sections coniques quelconques tracées sur un plan, doivent jouir (138) de toutes les propriétés projectives qui ont été développées dans les articles 83, 84 et suivants.

Ainsi, par exemple, en conservant aux *points réciproques* du plan commun de deux sections coniques la définition admise (82) pour le cas de deux circonférences de cercle, il résultera de l'article 84 que :

Tous les points réciproques de ceux d'une droite, donnée sur le plan de deux sections coniques quelconques, sont situés sur une autre section conique passant par les points où se coupent deux à deux les sécantes conjuguées communes aux premières; en sorte que, si l'on fait varier d'une manière quelconque la droite dont il s'agit sur le plan des courbes proposées, les sections coniques des réciproques auront, pour sécantes réelles ou idéales communes, les droites qui renferment deux à deux les trois points dont il s'agit.

371. Il suit de là que, quand deux sections coniques sont données à volonté sur un plan, on peut déterminer directement les points où se coupent, deux à deux, leurs sécantes conjuguées communes, en prenant arbitrairement deux droites sur ce plan et traçant les sections coniques des réciproques qui leur correspondent respectivement; ce qui peut s'exécuter très-simplement, au moyen de la règle, en déterminant pour chaque droite les réciproques de cinq points quelconques de leur direction (81), puis en faisant passer, au moyen de l'hexagramme mystique de Pascal (201), une section conique par les points ainsi obtenus; car les deux nouvelles sections coniques viendront se couper, en général, en quatre points dont trois seront les points demandés.

Le quatrième point d'intersection étant précisément (87) le réciproque de celui où se coupent les deux droites ou directrices arbitraires pourra se déterminer, à l'avance, au moyen de la règle seulement, et par conséquent il sera toujours réel et constructible. Or de là nous déduirons cette conséquence inévitable :

Quelles que soient la position et la grandeur relatives des deux sections coniques données sur un plan, elles ont au moins un de leurs points de concours de sécantes conjuguées communes réel.

372. Tout consiste, en effet, à prouver que les deux réciproques qui correspondent aux droites données, et qui ont déjà un point réel commun, en ont nécessairement un second, et c'est ce qui résulte évidemment, et sans intermédiaire, de ce que ces deux courbes sont continues de leur nature. D'abord on peut toujours ramener l'état de la question au cas où les courbes sont fermées, en les projetant convenablement sur un nouveau plan; ensuite, si on les imagine, l'une et l'autre, engendrées par les extrémités de deux rayons vecteurs placés sur une droite mobile tournant autour du point de l'intersection commune, comme *pôle* (196, note), l'examen attentif des circonstances du mouvement fera voir que l'un des points générateurs, après avoir été en deçà de celui qui lui correspond sur la même droite par rapport au pôle, devra enfin passer au delà; ce qui ne peut avoir lieu, par un mouvement continu, sans qu'il y ait eu une position intermédiaire de la droite mobile, pour laquelle les deux points en question se trouvaient nécessairement confondus en un seul, commun à la fois aux deux courbes proposées.

La démonstration cesserait pourtant d'être applicable, si les deux courbes ne se croisaient pas en faisant un angle au point pris pour pôle des rayons

vecteurs; mais alors les deux tangentes en ce point cesseraient également de faire un angle, et par conséquent se confondraient en une seule; donc les deux courbes se toucheraient au point commun; donc elles auraient deux points communs confondus en un seul (*).

Ainsi deux sections coniques quelconques, tracées sur un plan, ont toujours au moins un point de concours de sécantes conjuguées communes, et, s'il arrivait qu'elles en eussent deux, elles en auraient nécessairement (360) un troisième, qui serait le pôle de la droite qui contient les deux autres.

Construction des sécantes conjuguées communes dont le point de concours est donné.

373. Voyons maintenant comment, étant donné un tel point, on peut construire les deux sécantes conjuguées communes qui lui appartiennent; et, pour cela, remarquons d'abord que la section conique des réciproques d'une droite donnée sur le plan de deux autres sections coniques dégénère elle-même en deux droites (88), quand la directrice passe par l'un des points de concours des sécantes conjuguées communes, dont l'une, qui se confond avec la polaire de ce point, commune aux courbes proposées, renferme les deux points analogues au premier, et dont l'autre, au contraire, passe par le point dont il s'agit, et forme avec la directrice et les deux sécantes conjuguées correspondantes un *faisceau de quatre droites harmoniques* (**).

Il suit de là que, quand un point de concours de sécantes conjuguées communes est donné, on peut très-facilement, et en ne faisant usage que d'une simple règle, trouver deux systèmes de deux droites qui forment, avec les sécantes en question, deux faisceaux de quatre droites harmoniques. Il ne s'agit donc plus que de savoir comment, ces deux systèmes étant connus, on pourra déterminer les deux sécantes communes correspondantes; question qui revient évidemment (24), en coupant toutes ces droites par une transversale arbitraire, à la suivante :

374. *Trouver, sur une droite indéfinie, deux points* P *et* M (*fig.* 28), *qui*

(*) Ces raisonnements s'appliquent évidemment à deux courbes quelconques, dont l'une est fermée ou susceptible d'être mise en projection suivant une courbe fermée. L'on peut même démontrer, en suivant cette marche, qu'en général, pour deux pareilles courbes, le nombre de points communs réels est nécessairement toujours pair. Enfin on prouverait encore, à l'aide de la loi de continuité, qu'il n'y a que les courbes de degré pair qui soient susceptibles d'être fermées ou d'être projetées suivant des courbes fermées.

(**) Ceci se rapporte spécialement au troisième cas indiqué art. 88, attendu que dans les autres, les sécantes communes, relatives aux points que l'on considère, sont impossibles.

divisent à la fois harmoniquement les distances FH, F'H' *formées par deux autres systèmes de deux points donnés sur cette même droite.*

Par les deux points F et H, qui correspondent à la plus grande des deux distances, on fera passer, à volonté, une circonférence de cercle, à laquelle on mènera les deux tangentes HL, FL en ces points; on joindra ensuite le point d'intersection L de ces tangentes avec les deux autres points donnés F' et H', par les droites LF', LH', lesquels iront rencontrer respectivement la circonférence aux quatre points B et C, A et D, tels, qu'en les joignant deux à deux, dans un autre ordre, par de nouvelles droites, les unes iront concourir au point M, les autres au point P, demandés (186). Les points M et P, ainsi trouvés, appartenant respectivement aux sécantes conjuguées communes qu'on cherche, on aura ces sécantes elles-mêmes en joignant les deux points dont il s'agit avec celui où elles doivent concourir et qui, par hypothèse, est donné.

375. Cette construction n'est applicable qu'autant que les deux distances FH, F'H' se trouvent comprises l'une dans l'autre; cependant on peut prouver que les deux points P et M, et par suite les deux sécantes conjuguées communes qui leur correspondent, sont encore réels quand ces distances sont tout à fait extérieures entre elles; il est évident, en effet, que, dans ce cas, le faisceau des quatre droites convergentes, qui renferment (373) les extrémités de ces distances, pourrait encore être coupé par une tranversale, de façon que les distances qui correspondent aux deux premières soient renfermées l'une dans l'autre, comme dans le cas qui précède; c'est-à-dire que la construction demeurera applicable toutes les fois que les angles, formés respectivement par les deux systèmes de droites trouvées, ne se croiseront pas entre eux, en se superposant en partie.

Dans le cas contraire, la construction sera tout à fait impossible, et les deux sécantes communes seront par conséquent imaginaires. En effet, la distance F'H' couvrira nécessairement une partie de FH, quelle que soit la transversale qu'on ait choisie; l'un des points F', H' sera donc au dehors du cercle décrit sur FH, et l'autre au dedans; l'un des systèmes de points correspondants B et C, A et D, sera imaginaire et l'autre réel; ce qui exige, de toute nécessité, que les points P et M soient eux-mêmes imaginaires, sans quoi les droites AB, AC, etc., qui les donnent devraient être réelles, ce qui est absurde.

La même conséquence ne saurait plus avoir lieu quand les points F' et H' sont à la fois extérieurs au cercle auxiliaire, parce qu'alors les quatre

points A, B, C, D deviennent à la fois imaginaires, et qu'on ne peut plus affirmer, comme dans le premier cas, que celles qui les joignent deux à deux, et qui donnent les points P et M, soient réellement impossibles.

376. Cette discussion n'est pas inutile; elle est un nouvel exemple de ce qui a été avancé à la fin de la première Section (137), que, par cela seul qu'une construction graphique est impossible, on ne peut pas affirmer que l'objet final de cette construction le soit également; il faut que l'on puisse donner des raisons manifestes pour prononcer sur cette impossibilité, si elle a lieu. Au reste, on aurait pu éviter toute espèce de difficultés dans le cas qui précède, en ayant recours à une solution suffisamment générale du problème.

Supposons, en effet, que *bd* et FH soient les distances données; des extrémités *b* et *d* de la plus grande des deux, menons deux paires de tangentes au cercle, de rayon arbitraire, qui passe par F et H; en joignant deux à deux, par des droites, les points de contact qui n'appartiennent pas à une même paire de tangentes, ces quatre droites viendront évidemment se croiser aux points P et M demandés (186). Cette construction a même l'avantage de s'appliquer au cas où l'une des distances données est imaginaire, pourvu qu'on connaisse la section conique qui en renferme les extrémités avec la droite des deux autres points donnés : ces derniers points étant nécessairement alors extérieurs à la courbe, on voit, de plus, que la solution est toujours réelle et possible.

Nous montrerons bientôt (382) comment on peut résoudre le problème quand les deux distances sont à la fois imaginaires.

Recherche des diamètres conjugués parallèles des sections coniques, et construction directe des points de concours des sécantes conjuguées communes, quand l'un d'entre eux est donné.

377. La question que nous venons de résoudre revient évidemment à la suivante :

« Étant donnés, sur un plan, deux systèmes de deux droites convergentes
» en un point commun, déterminer un autre système de deux droites telles,
» que, en menant une transversale quelconque parallèle à l'une d'elles, les
» distances interceptées sur cette transversale par chacun des premiers sys-
» tèmes soient divisées en parties égales au point de leur intersection com-
» mune avec l'autre. »

Or, si l'on regarde les deux systèmes de droites données comme deux sec-

tions coniques (184, note), cette question pourra être envisagée comme un cas particulier de cette autre beaucoup plus générale :

Trouver les diamètres conjugués parallèles de deux sections coniques tracées sur un même plan.

Cette question revient évidemment à trouver, sur le plan des deux courbes, deux points à l'infini tels, que les polaires de l'un passent réciproquement par l'autre : or tous les points à l'infini d'un plan pouvant être censés (107) appartenir à une même droite, on voit qu'il s'agit, en définitive, de rechercher les deux points où cette droite est rencontrée par la section conique lieu de ses points réciproques (370); ce qui est facile (344), en déterminant, à volonté, cinq points de cette section conique avec la règle.

Présenté ainsi, ce problème paraît exiger la règle et le compas réunis; mais nous ferons voir plus loin (389, note) qu'en se servant du tracé des deux sections coniques proposées, la construction peut être remplacée par une autre purement linéaire, quelle que soit d'ailleurs la position de la droite donnée sur le plan de la figure.

378. Quand il arrive que la droite donnée, d'ailleurs quelconque, se trouve avoir même pôle dans les deux courbes, ou si, cette droite étant à l'infini, les courbes ont même centre, les deux points cherchés et le pôle dont il s'agit doivent, par là même, être tels (196), que chacun d'eux soit le pôle de la droite qui contient les deux autres; donc (363) ils se confondent nécessairement avec les trois points de concours des sécantes conjuguées communes aux deux courbes. Dans cette circonstance, la construction ci-dessus de la réciproque ne donne plus évidemment (195) qu'un seul point de son périmètre, c'est-à-dire le centre commun dont il s'agit, ou le pôle qui le remplace. Enfin cette réciproque elle-même dégénère (88, 1er cas) en deux droites, que la construction précédente laisse ainsi indéterminées de situation sur le plan de la figure.

La question proposée ne peut donc être résolue, dans le cas particulier qui nous occupe, qu'en la ramenant à la suivante, dont l'énoncé rentre évidemment dans celui du problème déjà exposé ci-dessus (371) :

379. *Étant donnés l'un des trois points de concours des sécantes conjuguées communes à deux sections coniques, et par conséquent aussi la droite qui renferme les deux autres et qui est la polaire commune du premier par rapport aux deux courbes, construire directement ces deux autres points.*

Il est facile de voir que cette question n'est que du second degré, et doit par conséquent pouvoir se résoudre avec la règle et le compas. En effet, si

l'on construit, comme dans le cas général de l'article 371, les deux sections coniques réciproques à deux droites quelconques du plan de la figure, elles devront, d'après ce qui a été dit au même endroit, passer à la fois par le point donné et par celui qui est le réciproque du point commun à la fois aux deux directrices; donc on connaîtra, à l'avance, une de leurs cordes communes et la direction de la sécante qui lui est conjuguée; au moyen de quoi il sera facile (344) de construire les deux points cherchés qui se trouvent à l'intersection commune de cette sécante et des deux réciproques.

Cette construction exige le tracé d'un grand nombre de lignes auxiliaires, mais on peut lui en substituer d'autres qui, quoique moins générales, sont beaucoup plus directes et plus simples : or, nous ne devons pas oublier que notre but véritable est (369) d'examiner les différents cas d'impossibilité du problème qui consiste à *rechercher les sécantes communes au système de deux sections coniques données sur un plan;* problème dont la solution complète et générale se trouve, il est vrai, déjà renfermée dans ce qui précède, mais n'éclaire pas suffisamment l'objet de la discussion.

En effet, nous avons bien fait voir, art. 372, que deux sections coniques, tracées sur un plan, ont toujours au moins un point de concours de sécantes conjuguées communes; nous avons même donné (373 et suiv.) les moyens de construire, dans tous les cas, les sécantes communes qui appartiennent à un tel point; mais il nous reste à rechercher dans quelles circonstances les deux autres points de concours semblables subsistent aussi bien que les sécantes qui leur correspondent respectivement : or, la première de ces questions revient précisément à celle qui a été posée ci-dessus, en regardant comme donné celui des trois points qui est nécessairement réel dans tous les cas. Cela posé, voyons donc comment, au moyen de celui-là, on pourra déterminer directement les deux autres.

380. Supposons d'abord que le point dont il s'agit soit extérieur à la fois aux deux sections coniques proposées : il est évident que sa polaire rencontrera en même temps les deux courbes; la question reviendra donc (361) à trouver, sur la direction de cette polaire, les deux points qui divisent à la fois harmoniquement les deux cordes qui lui correspondent; problème qui peut être résolu par l'un des moyens ci-dessus indiqués (374, 375 et 376), et qui est toujours possible (375), sauf le cas particulier où les deux cordes se superposent en partie, circonstance qui n'a lieu évidemment que pour le cas où les deux courbes se coupent en *deux points seulement*, puisque d'ailleurs, lorsqu'elles se coupent en quatre, les deux points cherchés sont nécessairement réels en même temps que le point donné (359).

Ainsi les trois points de concours des sécantes conjuguées communes sont nécessairement réels quand, l'un d'eux étant à la fois extérieur aux deux sections coniques proposées, il arrive que ces courbes ont, ou quatre points d'intersection réels, ou sont entièrement extérieures, ou sont renfermées l'une dans l'autre.

Dans tous ces cas, la construction pourra s'exécuter avec la règle seulement, pourvu que, dans la construction générale (376) rappelée ci-dessus, on substitue, au cercle auxiliaire dont on s'est servi pour déterminer les deux points cherchés, l'une ou l'autre des sections coniques qu'on suppose données et décrites sur le plan de la figure. Si elles n'étaient données que par certaines conditions, la solution cesserait évidemment d'être linéaire, et exigerait au moins (344) le tracé d'un cercle auxiliaire, comme dans le cas général.

381. Supposons maintenant que le point donné soit seulement extérieur à l'une des courbes proposées, mais intérieur à l'autre; alors la polaire commune de ce point cessera de rencontrer à la fois les deux courbes, et n'en rencontrera qu'une seule; l'une des cordes correspondantes deviendra par conséquent imaginaire.

Dans ce cas, en appliquant à la section conique qui détermine cette corde la construction indiquée art. 376, on obtiendra évidemment toujours deux points réels, sans employer autre chose que la règle, quand la section conique dont il s'agit sera entièrement décrite sur le plan de la figure. On peut aussi mener, du point donné, deux tangentes à la section conique pour laquelle il est extérieur; elles iront déterminer sur l'autre quatre points qui, étant joints deux à deux par de nouvelles droites, donneront lieu à un quadrilatère inscrit, dont les points de concours des côtés opposés seront (363) les deux points demandés.

Cette conséquence résulte, en effet, de la théorie des pôles, pour le cas ci-dessus où le point donné est à la fois extérieur aux deux courbes, et où ces courbes sont comprises l'une dans l'autre; car alors les cordes réelles, interceptées par la polaire de ce point, sont divisées à la fois harmoniquement (155 et 186) par les deux points trouvés; donc, en vertu de la loi de continuité, il en doit être de même aussi du cas qui nous occupe où l'une des deux cordes devient imaginaire.

Ainsi les trois points de concours des sécantes conjuguées communes sont nécessairement réels, quand l'un de ces points est à la fois intérieur à l'une des courbes et extérieur à l'autre, ce qui ne peut avoir lieu évidemment

qu'autant que ces deux courbes n'ont aucun point commun réel, puisque les sécantes communes du point donné sont essentiellement imaginaires.

Cas où le point de concours donné est à la fois intérieur aux deux sections coniques, ou leur sert de centre commun.

382. Il nous reste à examiner le cas où le point donné est à la fois intérieur aux deux courbes proposées, et auquel par conséquent aucune des constructions qui précèdent ne peuvent être applicables, puisque les cordes qui correspondent à la polaire commune de ce point sont à la fois imaginaires. Mais alors on peut construire facilement deux cercles auxiliaires qui aient respectivement cette polaire pour sécante idéale commune avec les sections coniques proposées; car tout consistera à rechercher (54) les cordes idéales communes relatives à cette sécante; au moyen de quoi on aura, de suite, les deux cercles. Cela posé, ayant cherché la sécante commune ordinaire de ces cercles, elle ira rencontrer la polaire ci-dessus en un point qu'on prendra pour le centre d'un cercle orthogonal aux proposés, dont la circonférence, toujours possible, renfermera évidemment (79 et 380) les deux points réels demandés (*).

Mais on peut aussi, dans le cas actuel, opérer directement sur les courbes proposées.

En effet, si ces deux courbes ont des points communs, ces points doivent évidemment être au nombre de quatre, car les sécantes conjuguées communes qui passent par le point donné sont nécessairement réelles et possibles; donc les deux derniers points cherchés le seront alors également, et pourront se déterminer *à priori* et d'une manière très-simple, au moyen du tracé des deux courbes.

Dans le cas contraire, les deux courbes seront nécessairement intérieures l'une à l'autre (*fig.* 50); et alors, si l'on conçoit (63) une nouvelle section conique qui ait avec l'une d'elles, celle intérieure par exemple, la polaire MK du point donné L pour sécante commune de contact idéal, et par suite ce

(*) La construction devient très-simple quand on remplace les cercles auxiliaires par les points limites (76) des suites qui les renferment; en effet, pour ces points, les hyperboles supplémentaires, qui appartiennent respectivement aux deux cordes idéales trouvées (54), se réduisent à des systèmes de droites rectangulaires; décrivant donc des cercles sur ces cordes, comme diamètres, ils rencontreront les perpendiculaires élevées sur leurs milieux respectifs aux points limites demandés; quant au cercle orthogonal qui renferme les points cherchés, il sera facile à construire, puisqu'il doit avoir son centre sur la polaire donnée et passer par les deux points limites trouvés.

point pour concours idéal des tangentes communes, il est évident, d'après la théorie des pôles, qu'il existera (322), sur la sécante de contact dont il s'agit, une infinité de systèmes de deux points qui, avec le point donné, seront tels, que l'un quelconque d'entre eux sera le pôle de la droite qui joint les deux autres, par rapport aux sections coniques qui ont un double contact; donc le système des points K et M, qu'on cherche, devra être commun à la fois à la nouvelle section conique et à la section conique extérieure proposée; c'est-à-dire (363) que les points L, M, K seront, pour celles-ci, des points de concours de sécantes conjuguées communes.

Tout consiste donc à déterminer la section conique auxiliaire, de façon que, sans la tracer, on puisse aisément obtenir les trois points L, M, K qui lui sont relatifs ainsi qu'à la section conique extérieure ABCD.

A cet effet, on se donnera, à volonté, un point A de la section conique extérieure pour y faire passer la nouvelle section conique; la droite AL, conduite par ce point et par le point L déjà donné, sera évidemment une sécante commune à ces courbes, laquelle ira déterminer, sur celle qui est donnée, un nouveau point commun C. D'un autre côté, d'après ce qui précède, la polaire MK du point L doit (360) renfermer les deux centres d'homologie, ou points de concours P, Q des tangentes communes aux mêmes courbes, conjugués (292) à la sécante AC dont il s'agit; si donc on connaissait un autre point quelconque X de la section conique auxiliaire et la tangente XY en ce point, on pourrait déterminer immédiatement les centres d'homologie P et Q (314, *Rem.*), et par suite le quadrilatère formé par l'intersection des tangentes communes correspondantes, dont les diagonales doivent d'ailleurs renfermer (360) les deux points cherchés. Or cette section conique doit avoir un double contact avec la section conique intérieure suivant MK, c'est-à-dire qu'elle doit avoir, avec elle, le point donné L et sa polaire MK pour centre et axe d'homologie conjugués (322); de plus, on connait le point A de son périmètre; donc enfin il sera facile (302) d'en obtenir un autre quelconque X et la tangente XY qui lui correspond, le tout sans employer autre chose que la règle.

383. Le problème que nous nous étions proposé à l'article 379 se trouve donc ainsi complétement résolu, par des méthodes qui nous paraissent également simples, et il en résulte qu'il n'y a qu'un seul cas où deux des trois points de concours des sécantes conjuguées communes à deux sections coniques soient imaginaires : c'est celui (380) où ces courbes ont deux points d'intersection réels, et n'en ont que deux; chose que l'on connaissait déjà, d'après le cas particulier du cercle (76).

On remarquera, d'ailleurs, que la plupart des constructions qui précèdent deviennent évidentes dans le cas où la polaire MK du point donné est à l'infini, et où par conséquent (363) ce point lui-même est le centre commun des deux courbes ; or cette évidence peut servir à justifier les constructions dont il s'agit d'une manière entièrement directe, en supposant qu'on ait mis les courbes proposées en projection, sur un nouveau plan, de façon que la polaire du point donné passe à l'infini.

Il en résulte aussi que, quand deux sections coniques tracées sur un même plan sont concentriques, on peut déterminer de suite, et par de simples intersections de lignes droites, soit les points où concourent deux à deux les sécantes conjuguées communes, dont un est donné à l'avance, et par suite ces sécantes elles-mêmes (373), soit (292) les tangentes communes, ou au moins leurs points de concours, quand ces tangentes cessent d'exister.

Construction générale des sécantes et des tangentes communes au système de deux sections coniques ; récapitulation des cas de possibilité et d'impossibilité du problème, et de ceux où il s'abaisse au second degré.

384. Pour en revenir maintenant à l'objet du problème général que nous nous étions proposé, et qui consite (369) à déterminer le système complet des sécantes communes à deux sections coniques données sur un plan, nous ferons observer que, d'après tout ce qui en a été dit dans ce qui précède, il ne doit plus guère être question que de discuter les différents cas que peut présenter ce problème, et le nombre des solutions dont il est susceptible ; or cet objet se trouve déjà rempli par les articles 359, 364 et suivants, sauf pour un seul cas, qui nous a semblé mériter exception à cause des doutes qu'il a pu laisser : c'est celui où les deux sections coniques sont intérieures l'une à l'autre (369).

Considérons donc le système de deux coniques ainsi disposées sur un plan, et proposons-nous de rechercher si elles ont véritablement deux sécantes idéales communes, ainsi que cela a été annoncé à l'endroit cité.

D'abord il résulte de ce qui précède (382) que les deux courbes ont alors nécessairement trois points de concours réels K, L, M (*fig.* 51) de sécantes conjuguées communes, dont deux extérieurs et l'autre intérieur à la fois à ces courbes. Or, pour trouver les deux sécantes communes qui correspondent à l'un quelconque de ces points, à M par exemple, il faudra (373) chercher deux systèmes de deux droites passant par ce point, qui, avec les sécantes dont il s'agit, forment séparément deux faisceaux de quatre droites harmo-

niques; mais le système des droites MK et ML est déjà dans ce cas (361); donc il ne s'agit plus que de trouver un autre système de droites pareilles.

Cela posé, si l'on prend, à volonté, un quatrième point P pour y faire passer l'une des droites cherchées, dont la direction est toujours arbitraire; qu'on détermine ensuite le réciproque P' de ce point par rapport aux deux courbes, c'est-à-dire (82) le concours des polaires qui lui correspondent, MP' sera la droite conjuguée ou la réciproque (373) de MP, de telle sorte que, si l'angle PMP' est compris dans celui des deux autres droites MK, ML, ou renferme entièrement cet angle, il sera très-facile d'obtenir les deux sécantes communes qui passent par le sommet M de ces angles, lesquelles existeront toujours (375) dans l'hypothèse dont il s'agit, et seront imaginaires dans l'hypothèse contraire.

Maintenant, si l'on joint pareillement, au moyen de lignes droites, les points P et P' avec chacun des deux autres points, K et L, de concours des sécantes communes, on obtiendra évidemment à la fois les systèmes de droites réciproques qui sont relatifs à ces points; or je dis que, dans le cas actuel où l'on suppose les sections coniques intérieures l'une à l'autre, il existe toujours un des points K, L, M qui remplit la condition ci-dessus prescrite, ou qui répond à deux sécantes communes non imaginaires. En effet, si l'on suppose que l'on ait pris le point arbitraire P dans l'intérieur du triangle KLM, il est évident que son réciproque P' sera nécessairement au dehors de ce même triangle, puisque autrement les sécantes communes seraient, toutes six, constructibles, selon ce qui précède; ce qui est absurde (359) quand les courbes n'ont, comme on le suppose, aucun point commun. D'un autre côté, on voit que nécessairement l'une des droites P'K, P'L, P'M, qui joignent ce point aux sommets du triangle, mais seulement une de ces droites, traversera la surface de ce triangle, de sorte que l'angle qu'elle formera avec sa réciproque sera compris entièrement dans l'angle des côtés correspondants; donc il existera réellement un système de sécantes conjuguées communes, mais il n'en existera qu'un seul de cette sorte, dont les sécantes seront nécessairement idéales, comme il s'agissait de le démontrer.

Cette démonstration s'appliquerait évidemment, mot à mot, au cas où les deux courbes proposées seraient entièrement extérieures, puisqu'alors elles auraient également (383) trois points de concours réels de sécantes conjuguées communes; ainsi l'on est dispensé d'avoir recours à la considération des tangentes communes, comme on l'a fait (365) pour démontrer, dans ce cas, l'existence des deux axes d'homologie.

385. Quand une fois l'on a trouvé les divers systèmes de sécantes conju-

guées communes ou d'axes d'homologie qui appartiennent à deux sections coniques, on en déduit sans peine (**292**) les points de concours conjugués des tangentes communes et ces tangentes elles-mêmes (*); ainsi nous avons complétement résolu ce problème difficile :

Trouver les sécantes et tangentes communes au système de deux sections coniques données sur un plan.

Concluons aussi de tout ce qui précède que :

Deux sections coniques quelconques, tracées sur un plan, ont en général, ou six sécantes communes réelles, ou deux sécantes communes dont une idéale et l'autre réelle, ou enfin deux sécantes communes idéales.

Dans le premier cas, les deux courbes ont quatre tangentes et quatre points communs réels, et par conséquent six centres d'homologie véritable (**368**).

Dans le second, elles ont deux points communs réels et deux imaginaires, avec deux tangentes communes et deux centres d'homologie conjugués aux deux sécantes, dont l'un réel et l'autre idéal ; dans le même cas, un seul des points de concours des sécantes conjuguées communes subsiste, les deux autres sont devenus imaginaires.

Enfin, dans le troisième cas, les quatre points d'intersection des deux courbes sont imaginaires, et, quoiqu'elles n'aient plus que deux sécantes communes idéales, elles n'en conservent pas moins, comme dans le premier cas, trois points de concours de sécantes conjuguées communes; mais alors deux de ces points de concours appartiennent à des sécantes communes imaginaires. Si, en outre, les deux courbes sont totalement extérieures, les quatre tangentes communes et les six centres d'homologie subsistent; mais, de ces six centres, il y en a quatre dont l'homologie n'est qu'idéale ou imaginaire (**368**); au contraire, si l'une des courbes est comprise dans l'autre, les quatre tangentes communes et les quatre derniers centres d'homologie sont à la fois imaginaires, mais les deux autres centres d'homologie subsistent.

386. Le mode de construction auquel nous sommes parvenus dans la solution du problème général ci-dessus a cela de remarquable, qu'il revient à ce que l'on a coutume d'appeler, en Algèbre, la réduction des équations du quatrième degré à celles du sixième, résolubles au moyen de celles du second et du troisième degré, et l'on aura sans doute aperçu que ces mêmes constructions s'appliqueraient très-bien au cas où les sections coniques ne

(*) On pourrait également obtenir ces tangentes, ou au moins leurs points de contact avec l'une des deux courbes, en recherchant les points d'intersection de cette courbe et de celle qui est la polaire réciproque de l'autre (**231**), par rapport à la première, prise pour directrice.

seraient pas décrites, mais données seulement par certaines conditions (338 et suivants); ce qui doit s'entendre également de toutes les solutions de problèmes qu'on a données jusqu'ici ou qu'on pourra donner par la suite.

Il résulte aussi, tant de ces constructions que de celles qui font le sujet du précédent Chapitre, que la recherche des sécantes et tangentes, communes au système de deux sections coniques données sur un plan, se réduit simplement à un problème du second degré, qui peut se résoudre, par conséquent, avec la règle et le compas quand les courbes ne sont pas décrites, ou simplement avec la règle quand l'une d'elles ou toutes deux sont tracées, toutes les fois qu'on a *soit une sécante commune* ou seulement un point de cette sécante (251 et 292), *soit un centre d'homologie* ou seulement une droite passant par ce centre, soit enfin *un point de concours de sécantes conjuguées communes aux deux courbes;* circonstances qui arrivent, en particulier (328 et 383), quand les deux courbes sont s. et s. p. ou concentriques : nous verrons, par la suite, d'autres circonstances également générales où la même chose a lieu.

Enfin l'on voit encore que, si deux cercles quelconques étaient décrits sur un plan, sans qu'on en connût le centre, il serait possible, au moyen de ce qui précède, de déterminer graphiquement, et en ne faisant usage que de la règle ou de simples alignements, soit les points limites de ces cercles, soit leurs sécantes communes, soit enfin leurs centres de symétrie ou de figure; au moyen de quoi on aurait tout ce qu'il faut (255 et 353) pour résoudre linéairement tous les problèmes du second degré. Or cette question, lorsque les cercles n'ont aucun point commun, ni aucune tangente commune possibles, n'est pas aussi simple qu'on pourrait le croire au premier abord.

Solution du dernier des problèmes énoncés art. 305, *et de quelques autres qui s'y rapportent; des points réciproques dans le plan d'un système de sections coniques ayant mêmes sécantes communes.*

387. Sous les différents points de vue qui viennent d'être signalés, la question générale de l'article 385 comprend implicitement toutes celles de l'article 305; car tout revient, en définitive, à déterminer les centres et les axes d'homologie de deux sections coniques, qui sont conjugués à un centre ou à un axe d'homologie supposé donné. Il reste d'ailleurs à résoudre (306) celles de ces questions qui sont relatives au cas où l'on se donne, soit deux centres, soit deux axes d'homologie conjugués des deux courbes; or la solution de ces dernières questions résulte immédiatement et très-simplement des principes qui précèdent.

En effet, si, dans le premier cas, les tangentes communes qui correspondent à l'un des centres d'homologie donnés sont possibles, on pourra les construire au moyen de l'une des deux courbes, et alors la question sera ramenée à quelqu'une de celles qui ont été résolues art. 310 et 312.

Dans l'hypothèse contraire, les centres d'homologie étant à la fois intérieurs aux deux courbes proposées, on pourra déterminer sans peine les trois points où concourent deux à deux les sécantes conjuguées communes; car l'un de ces points sera (360) le pôle de la droite qui renferme les deux centres d'homologie donnés, les deux autres diviseront à la fois harmoniquement (361) la distance de ces centres et la corde interceptée, dans la section conique supposée décrite, par la direction de la droite qui les renferme : appliquant donc à cette corde et à cette distance les constructions de l'article 376, qui alors sont possibles et n'exigent le tracé d'aucune autre courbe que de celle qui est donnée, on aura obtenu les trois points de concours des sécantes conjuguées communes, et, par suite (360), les diagonales du quadrilatère circonscrit à la fois aux deux courbes; au moyen de quoi, connaissant une tangente ou un point de la courbe non décrite, on pourra (193) en déduire sur-le-champ trois autres, et par suite (310 et 312) les deux axes d'homologie conjugués dont dépend la construction de cette même courbe.

388. Quant au cas où l'on se donne deux axes d'homologie conjugués des deux courbes, sa solution générale et complète dépend du théorème suivant, qui est une conséquence évidente (122, 127) du principe établi, art. 81, pour le cercle :

Si l'on considère l'ensemble des polaires qui correspondent à un point quelconque du plan d'une suite de sections coniques ayant mêmes sécantes communes, c'est-à-dire ayant quatre points réels ou imaginaires communs, toutes ces polaires iront concourir en un point unique, qui jouira réciproquement de la même propriété à l'égard du premier, c'est-à-dire qu'il sera son réciproque *par rapport à toutes les courbes du système.*

Or de là résulte immédiatement la solution de ce nouveau problème, qui conduit sans peine à celle de la question proposée :

389. *Deux sections coniques étant données à volonté sur un plan, décrire une autre section conique qui ait mêmes points communs avec les deux premières, ou, plus généralement, qui ait mêmes sécantes communes réelles ou idéales, et passe, de plus, par un autre point donné, ou touche une droite quelconque également donnée.*

D'abord on peut facilement trouver la tangente au point donné : en effet,

la polaire de ce point, pour la courbe qui y passe, se confond évidemment avec cette tangente : mais, d'après le théorème ci-dessus, cette polaire et celles du même point relatives aux courbes données doivent concourir toutes trois au point qui est le réciproque du premier ; traçant donc ces dernières, elles détermineront, par leur intersection mutuelle, un point qui appartiendra à la tangente cherchée, dont la direction sera ainsi parfaitement connue.

Si l'on avait, au contraire, la tangente, on déterminerait le point où elle touche la courbe correspondante, en recherchant, comme à l'article 377, celui ou plutôt ceux où elle est rencontrée par la section conique de ses réciproques, relative aux courbes données ; car, selon ce qui précède, chacun de ces points pourra être pris pour le point de contact demandé. Dans ce cas donc, le problème pourra être susceptible de deux solutions distinctes (*).

La tangente et son point de contact étant ainsi connus, on trouvera sans peine autant d'autres points qu'on voudra de la courbe demandée, en n'employant que la règle.

En effet, AA′ (*fig.* 52) étant la tangente en question, A son point de contact, on prendra à volonté un point T sur sa direction, et sa polaire pour la courbe cherchée devra passer par A ; mais elle doit aussi passer, d'après les conditions du problème, par le point T′, réciproque de T à l'égard des sections coniques données, point facile à construire au moyen des polaires qui correspondent à ces courbes et au point T ; traçant donc AT′, ce sera la polaire ou sécante de contact du point T relativement à la section conique cherchée.

Actuellement, pour trouver le second point X, qui appartient à la sécante de contact AT′ et à la courbe cherchée, on prendra un point quelconque B sur la direction de cette droite ; sa polaire devra, d'après la théorie des pôles (196), passer par T ; mais elle doit aussi passer par le point B′ réciproque de B et qu'il est facile de construire ; traçant donc TB′, ce sera la polaire de B par rapport à la courbe cherchée.

Le point B, le point T et le point E où TB′ rencontre AB, obtenus comme

(*) Nous avons observé, à l'endroit cité (377), que les deux points pouvaient se construire linéairement, au moyen de deux courbes données qu'on supposerait décrites ; et, en effet, ces points étant réciproques, ou tels (82), que les polaires de l'un quelconque d'entre eux, par rapport aux deux courbes, passent par l'autre, doivent évidemment diviser à la fois harmoniquement (191) les cordes interceptées par ces courbes sur la distance qui les renferme ; or ce problème, présenté ainsi, a été résolu linéairement, et pour les divers cas, aux articles 380, 381 et 382.

il vient d'être expliqué, étant évidemment tels (196), que chacun d'eux est le pôle de la droite qui joint les deux autres, par rapport à la courbe cherchée, il s'ensuit que la corde de contact AX devra (194) être divisée harmoniquement aux points trouvés E et B; il sera donc facile d'obtenir le point inconnu X, au moyen des trois autres, en exécutant (155) les constructions indiquées sur la figure; de plus, la droite TX sera en même temps la tangente au point dont il s'agit.

Ainsi on obtiendra, par ce procédé, non-seulement autant de points qu'on voudra de la courbe, mais encore la tangente en chacun de ces points, le tout en n'employant que la règle.

390. Ces diverses constructions sont d'ailleurs immédiatement applicables au cas où les sections coniques proposées sont remplacées, soit en tout, soit en partie, par des systèmes de deux lignes droites. Dans ce dernier cas, les quatre points, réels ou imaginaires, par lesquels doit passer (389) la courbe cherchée, se trouvant définis par le système d'une section conique et de deux droites, la question revient immédiatement à celle qu'on s'était proposé de résoudre art. 388, puisque ces droites peuvent être considérées comme des sécantes, réelles ou idéales, communes à la courbe inconnue et à la courbe donnée, selon que les points communs correspondants sont réels ou imaginaires. Dans l'autre cas, les deux sections coniques étant remplacées par deux systèmes de deux droites, les quatre points en question sont nécessairement réels et placés à l'intersection commune de ces systèmes; or il résulte de là, entre autres, une nouvelle solution (206) assez simple de cet intéressant problème :

Cinq points d'une section conique étant donnés, mener, avec la règle, la tangente en l'un de ces points.

Tout se réduit, en effet, à tracer (*fig.* 53) deux paires de droites RAD et RBC, SBA et SCD, qui renferment à la fois les quatre autres points donnés A, B, C, D; puis à construire, pour ces paires de droites, les polaires (197) RL et SK qui correspondent au cinquième point donné P; car elles viendront se couper au point P' réciproque de P, qui sera un second point de la tangente cherchée, en sorte que PP' sera cette tangente (*).

(*) D'après ce qui a été dit (389, note) pour le cas général où les paires de droites données sont remplacées par des courbes, on voit que, si c'était, au contraire, la tangente PP' qui fût connue, on obtiendrait de suite les points de contact correspondants P et P' par quelqu'un des procédés décrits art. 374 et suiv., en observant que ces points doivent diviser à la fois harmoniquement les distances comprises respectivement sur la tangente par chaque paire de droites données. Une autre

Il est sans doute inutile de dire que la plupart des théorèmes jusqu'ici démontrés et de ceux qui suivent subsistent de même, quand on remplace les sections coniques par des systèmes de deux droites, et donnent ainsi lieu à un grand nombre de considérations aussi neuves qu'intéressantes : c'est une remarque qui a été faite d'une manière générale, art. 184 de la IIe Section, et que nous avons déjà eu occasion de reproduire dans diverses circonstances particulières; c'est pourquoi nous ne croyons pas devoir insister davantage pour le moment.

Propriétés des diamètres conjugués parallèles des sections coniques qui ont quatre points communs, réels ou imaginaires, sur un plan.

391. La théorie des points réciproques, dont nous avons déjà tiré un parti si avantageux dans ce qui précède, conduit à beaucoup d'autres conséquences également remarquables.

Supposons, par exemple, que, dans l'énoncé du théorème de l'article 388, l'un des points réciproques dont il y est question passe à l'infini, on arrivera directement à ce corollaire, dû à M. Lamé (*), et qui s'étend, d'une manière analogue, aux surfaces du second ordre qui ont mêmes points ou mêmes courbes d'intersection :

Lorsque plusieurs sections coniques ont quatre points communs, leurs diamètres, conjugués à des diamètres parallèles, concourent tous en un même point.

Or de là on conclut immédiatement cet autre corollaire :

Les directions des diamètres conjugués parallèles, pour deux des sections coniques proposées, sont en même temps communes à toutes les autres.

392. Mais, parmi toutes ces sections coniques, il en est trois qui se trouvent réduites au système de deux lignes droites, savoir, les trois systèmes de sécantes conjuguées communes à toutes les courbes; donc :

La direction des diamètres conjugués parallèles d'un système de sections coniques ayant quatre points communs est aussi celle des diamètres conjugués parallèles (377) *des trois systèmes de sécantes conjuguées communes à toutes les courbes du système; c'est-à-dire que, si l'on mène, par chacun des points de concours des sécantes conjuguées communes, deux droites parallèles à ces diamètres, elles formeront, avec les sécantes communes qui lui correspondent, un faisceau de quatre droites harmoniques.*

---

solution de ce problème se trouve implicitement renfermée dans celle que nous avons donnée du problème général de l'article 341 : le même problème a aussi été résolu par M. Brianchon, art. 45 du *Mémoire sur les lignes du second ordre.*

(*) *Examen des différentes méthodes, etc.* Paris, 1818, p. 34 et suiv. (*Annotations de l'Errata.*)

393. Cette liaison remarquable offre, comme on voit, un nouveau moyen fort direct et fort simple de « trouver le système des diamètres conjugués parallèles de deux sections coniques, » quand on connait les trois systèmes de sécantes conjuguées communes qui leur appartiennent; car, en menant, par l'un quelconque des points de concours de ces derniers systèmes, deux droites parallèles aux sécantes communes de l'un des deux autres, la question sera évidemment ramenée à celle (377) déjà traitée ci-dessus.

Cette solution montre, en outre, que les diamètres en question ne sont imaginaires que dans le seul cas où les quatre points communs ne sont pas susceptibles d'appartenir aux sommets d'un quadrilatère convexe; circonstance qui n'a lieu évidemment que lorsque les deux courbes sont à la fois des hyperboles, et que le nombre des points d'intersection n'est pas le même pour les deux branches.

394. Quand, des deux sections coniques que l'on considère, l'une se trouve être un cercle, les diamètres conjugués parallèles ont alors, pour direction, celle des grands axes de l'autre; c'est-à-dire que :

Étant donnée une section conique quelconque, si l'on trace, à volonté, un cercle sur son plan, et qu'on détermine les sécantes communes correspondantes, les axes principaux de cette section conique seront parallèles aux droites qui divisent à la fois, en parties égales, l'angle formé par deux sécantes conjuguées communes quelconques et le supplément de ce même angle.

On a donc, par là, un nouveau moyen bien simple de déterminer *à priori* (345) la *direction des deux axes principaux d'une section conique*, et, par suite, la position et la grandeur de ces axes eux-mêmes, puisque chacun d'eux est la polaire du point situé à l'infini sur l'une des directions trouvées au moyen des sécantes communes.

Cette solution suppose que la courbe donnée soit entièrement décrite; dans le cas contraire, il faudrait en connaitre au moins cinq points, et alors, en faisant passer une circonférence de cercle par trois quelconques de ces points, la question serait ramenée à la suivante, qui se rattache immédiatement au sujet de ce Chapitre :

395. *Une section conique, non décrite, étant donnée par cinq points, dont trois appartiennent à une circonférence de cercle, trouver directement le quatrième point d'intersection des deux courbes, en n'employant que la règle.*

Soient A, C, E (*fig.* 54) les points déjà communs aux deux courbes, B et D les deux derniers points de la section conique; traçons les droites indéfinies BC et CD et celles AB et DE qui se rencontrent en I : d'après la propriété de

l'hexagramme de Pascal (201), tout triangle FKL dont les côtés passeront respectivement par les trois points A, E, I, et dont les deux sommets K, L appartiendront aux droites ou directrices indéfinies CD et BC, aura son dernier sommet F sur la section conique proposée. Pareillement, si l'on prolonge les directrices dont il s'agit jusqu'à leurs rencontres avec le cercle donné en D' et B' respectivement, qu'ensuite on trace les droites AB' et ED' allant concourir en I', tout triangle KFL, dont les côtés s'appuieront sur les points A, I', E, et dont les sommets K et L seront les directrices CDD', CB'B, aura son dernier sommet F placé sur le cercle; donc ce sommet sera à la fois sur le cercle et sur la section conique, si le côté KL, qui lui est opposé, passe lui-même à la fois par les deux pôles I, I'; ainsi rien ne sera plus aisé que d'obtenir ce sommet, en achevant le triangle KLF comme l'indique la figure.

Cette solution s'applique évidemment au cas où les deux courbes sont des sections coniques quelconques, pourvu que l'une d'elles soit entièrement décrite; autrement il faudrait trouver les points d'intersection B' et D' des directrices BC et CD avec la seconde courbe, ce qui s'exécuterait encore très-simplement, avec la règle (204), si l'on connaissait deux autres points quelconques de cette courbe, indépendamment des trois points A, C, E qui lui sont communs avec la première. On atteindrait encore, dans ces différents cas, le but proposé, mais d'une manière plus générale, en se servant des propriétés des sécantes communes dont trois ici sont supposées connues; car, quelles que soient les conditions par lesquelles on se donne les deux courbes, on pourra toujours ramener le problème à quelques-uns de ceux qui ont été résolus art. 307 et suivants.

Du lieu des pôles d'une droite donnée sur le plan d'une conique variable assujettie à certaines conditions; du lieu du centre de cette conique; de l'enveloppe de ses polaires relatives à un point quelconque de son plan.

396. Reprenons la théorie des points réciproques, et observons que, d'après les propositions 84 et 85 relatives au cas particulier du cercle, le théorème de l'article 370 peut s'étendre, de la manière suivante, à un nombre quelconque de sections coniques :

Quand plusieurs sections coniques ont quatre points communs, réels ou imaginaires, le lieu des points réciproques de ceux d'une droite quelconque, donnée sur le plan de la figure, est une seule et même section conique qui passe par les trois points de concours des sécantes conjuguées communes aux pre-

mières, et contient à la fois tous les pôles de la droite dont il s'agit, par rapport à ces différentes courbes.

Or, en supposant que cette même droite passe à l'infini, il résultera de là, entre autres, ce corollaire :

Les centres de toutes les sections coniques, assujetties à avoir mêmes sécantes ou mêmes points communs, sont situés sur une autre section conique passant par les points où se coupent, deux à deux, celles de ces sécantes qui sont conjuguées entre elles. En outre, cette section conique est aussi le lieu des points de concours (391) *des diamètres conjugués à la fois à une même direction donnée, mais variable* (*).

397. Les propriétés qui viennent de nous occuper en dernier lieu, et celles de l'article 391, se rattachent évidemment aux questions générales qui suivent :

Quel est le lieu des pôles d'une droite donnée par rapport à une section conique variable assujettie à quatre conditions quelconques?

Quelle est la courbe enveloppe des polaires d'un point donné, par rapport à une section conique variable assujettie à quatre conditions quelconques?

Quand on n'admet, parmi les conditions qui déterminent le système des sections coniques proposées, que celles où l'on exige que ces sections coniques touchent des droites ou passent par des points donnés, les deux problèmes peuvent facilement être ramenés l'un à l'autre, au moyen de la théorie des polaires réciproques exposée à la fin du IIe Chapitre de la IIe Section.

En effet, en supposant qu'on cherche le système des sections coniques (P') qui sont (231) les polaires des proposées (P) par rapport à une section conique auxiliaire quelconque (O), il est évident (232 et 233) 1° que, si les sections coniques proposées (P) sont assujetties à toucher une même droite donnée, leurs polaires réciproques (P') auront un point commun, pôle de cette droite par rapport à la directrice (O); 2° que, si les sections coniques (P) ont, au contraire, un point commun, leurs réciproques (P') auront une tangente commune, polaire de ce point par rapport à la directrice (O); 3° enfin que, si l'on prend à volonté un point A sur le plan des sections coniques proposées (P), l'enveloppe de ses polaires, par rapport à ces sections coniques, aura pour réciproque le lieu des points qui, par rapport aux sections coniques (P'), sont les pôles de la droite réciproque ou

(*) D'après cela, la courbe des points O de l'article 57 est nécessairement une section conique.

polaire de A relativement à la directrice auxiliaire (O), et *vice versâ :* or de là résulte évidemment ce qu'il s'agissait de démontrer.

398. Supposons, par exemple, que l'on traduise de cette manière l'énoncé du théorème de l'article 388, on en conclura sur-le-champ la réciproque suivante :

Le lieu des pôles d'une ligne droite donnée, par rapport à une suite de sections coniques tangentes à quatre droites quelconques, est lui-même une autre droite.

Dans le cas particulier où la droite donnée passe à l'infini, cet énoncé se change évidemment en celui-ci :

Le lieu des centres des sections coniques tangentes aux quatre mêmes droites est lui-même une autre ligne droite.

Les quatre droites proposées forment, par leurs intersections mutuelles, un quadrilatère complet dont chacune des diagonales peut être regardée, en vertu de la loi de continuité, comme le diamètre d'une section conique tangente aux côtés du quadrilatère, et qui a ses deux branches superposées suivant cette diagonale; or de là suit cet élégant théorème qui, selon la remarque de M. Brianchon (*), résulte aussi immédiatement de celui de Newton (**), relatif au quadrilatère simple à deux diagonales :

Dans tout quadrilatère complet circonscrit à une conique, les points, milieux des trois diagonales, appartiennent à un même diamètre.

399. La proposition de l'article 396 conduit pareillement à cette réciproque, quand on lui applique les considérations déjà mises en usage ci-dessus :

Les polaires d'un point, donné sur le plan d'une suite de sections coniques tangentes à quatre droites quelconques, enveloppent une autre section conique, touchant à la fois les trois diagonales du quadrilatère complet formé par ces quatre droites.

On voit d'ailleurs ce que deviendrait cet énoncé dans le cas où le point donné serait supposé à l'infini.

Ces exemples nous semblent suffire pour faire apercevoir comment, à l'aide des seuls principes posés dans cet ouvrage, il serait possible d'arriver à la solution des divers autres cas du problème général dont il a été question ci-

(*) *Mémoire sur les lignes du second ordre*, art. 41.

(**) *Principes mathématiques, etc.*, livre I, lemme XXV. Nous avons donné, dans les *Annales de Mathématiques*, t. XII, p. 109, une autre démonstration directe et géométrique de ce théorème de Newton.

dessus; ceux qui désireraient de plus grands détails sur cet objet pourront consulter plusieurs articles insérés aux *Annales de Mathématiques* (*), dont quelques-uns, purement analytiques, appartiennent à M. Gergonne, rédacteur de ce recueil.

400. La théorie des polaires réciproques, dont nous venons de faire usage dans ce qui précède, offre, comme on voit et comme cela a été avancé (235), de grandes ressources dans la recherche des propriétés des figures; or c'est ici le lieu de remarquer « qu'il n'est aucune des propositions que nous » avons énoncées sur les sécantes communes au système de deux sections » coniques, qui ne puisse se traduire, de la même manière, en une autre sur » les points de concours de leurs tangentes communes, et *vice versâ*. »

En effet, d'après la remarque déjà faite ci-dessus (397), si l'on trace sur le plan des sections coniques proposées une nouvelle section conique quelconque; qu'ensuite on s'en serve, comme de directrice, pour trouver les réciproques polaires des proposées, il paraîtra évident que, puisque tout point commun à l'un de ces systèmes de sections coniques est le pôle d'une tangente commune du système réciproque par rapport à la directrice, et *vice versâ*, il paraîtra évident, dis-je, que les sécantes communes de l'un de ces systèmes seront (195) les polaires des points de concours des tangentes communes de l'autre, et que les points de concours des sécantes conjuguées communes de ce système auront pareillement, pour polaires, les droites qui renferment, deux à deux, les points de concours conjugués des tangentes communes du système réciproque; c'est-à-dire, en un mot, que les quadrilatères complets, formés respectivement par les sécantes et les tangentes communes, seront réciproques polaires de l'un à l'autre système. D'ailleurs, tout point de l'une des sécantes communes est remplacé par une droite passant par le point de concours réciproque de deux tangentes communes, et *vice versâ;* donc il sera facile de passer directement, des propriétés purement descriptives de celui-ci, aux propriétés pareilles de celle-là, en s'appuyant d'ailleurs sur les autres relations de réciprocité établies par la théorie des pôles et polaires.

On doit enfin remarquer qu'en vertu de la loi de continuité toutes ces conséquences s'appliquent de même au cas où la sécante et le point de concours que l'on considère cessent d'appartenir réellement à des points communs ou à des tangentes communes des sections coniques.

401. Supposons, par exemple, que l'on applique ces considérations à la

(*) Tome XI, p. 205 et 379; t. XII, p. 109, 233 et 249

propriété énoncée art. 82, qui s'étend à toutes les sections coniques, on retombera évidemment sur celle de l'article 258; pareillement, la question de l'article 312 se ramène immédiatement à celle de l'article 315, et les constructions qui leur sont relatives jouissent entre elles de la même réciprocité, etc., etc.

D'après cela, nous aurions pu aisément réduire et simplifier tout à la fois l'objet de nos diverses recherches; mais nous avons préféré être un peu plus long, pour rendre l'exposition des vérités plus claire et plus complète; d'autant mieux qu'il s'agit d'exposer, dans cet ouvrage, les relations projectives des figures, et que la seule doctrine des projections suffit pour y parvenir d'une manière simple et directe. Nous continuerons à en agir de même, par la suite, toutes les fois qu'il n'y aura aucune raison d'adopter la marche contraire.

Nouvelles propriétés des sections coniques assujetties à certaines conditions sur un plan, des sections coniques s. et s. p. et du cercle osculateur en un point donné d'une telle courbe.

402. Les propriétés qui nous ont occupé, depuis l'article 388, font partie de celles qui appartiennent, en général, aux systèmes de sections coniques variables assujetties à certaines conditions sur un plan ; or un grand nombre de ces propriétés dérivent immédiatement des divers principes établis, dans ce qui précède, pour le cas de deux sections coniques données sur un plan.

Supposons, par exemple, que l'on considère une suite de sections coniques ayant en commun, sur un plan, ou quatre tangentes, ou quatre points, ou trois tangentes et un point, ou une tangente et trois points, ou enfin deux points et deux tangentes; soit que ces points et ces tangentes soient tous réels, ou seulement en partie réels et en partie imaginaires, les théorèmes des articles 360 et 361 feront découvrir, de suite, plusieurs des propriétés communes aux courbes de ces différents systèmes. Ainsi l'on voit que, dans le premier et dans le dernier cas, les cordes de contact des sections coniques avec les tangentes que l'on considère, ou, si l'on veut, les polaires des points d'intersection de ces tangentes, pivoteront respectivement sur des points fixes (*) appartenant à la fois à deux des sécantes conjuguées communes, et

(*) Ces relations particulières ont été déduites, par M. Brianchon, comme conséquences des propriétés (186 et suiv.) des quadrilatères inscrits et circonscrits aux sections coniques : voyez son *Mémoire sur les lignes du second ordre*, art. 15 et 19.

à deux des diagonales du quadrilatère formé par les tangentes communes de ces courbes, combinées deux à deux ou prises dans leur ensemble, etc.

Mais il n'est pas nécessaire de recourir aux propriétés déjà établies pour le cas particulier où l'on ne considère que le système de deux sections coniques situées sur un plan, pour en déduire celles qui concernent un nombre quelconque de semblables courbes; on peut, comme nous l'avons dit (401), y arriver directement, dans chaque cas, au moyen des principes de projection si souvent mis en usage dans le cours de ces recherches, c'est-à-dire en ramenant la figure à quelqu'une de celles qui sont élémentaires.

403. Pour en offrir un dernier exemple qui puisse nous conduire à quelques conséquences nouvelles et faciles, nous considérerons le système d'un nombre quelconque de circonférences de cercle, ayant une sécante commune ordinaire sur un plan, outre celle qui leur appartient en général (94) à l'infini. Cela posé, il est évident que, si l'on trace un dernier cercle quelconque sur le plan des premiers, et ayant par conséquent la sécante à l'infini commune avec eux, il est évident, dis-je, que ce cercle ira déterminer, sur chacun de ceux-ci, une nouvelle sécante commune conjuguée à la précédente, qui concourra (72), ainsi que toutes ses semblables, en un point unique de la sécante commune ordinaire des cercles dont il s'agit; donc on aura le théorème général qui suit (122):

Si un nombre quelconque de sections coniques, tracées sur un plan, ont mêmes points d'intersection ou mêmes sécantes conjuguées communes (ab) *et* (cd), *réelles ou idéales, et qu'on en trace, à volonté, une nouvelle qui ait l'une quelconque* (ab) *de ces sécantes en commun avec les premières, elle ira déterminer, sur chacune de celles-ci, une seconde sécante commune conjuguée à* (ab); *or cette sécante et toutes ses semblables concourront en un point déterminé et unique de celle* (cd), *qui appartient à la fois à toutes les sections coniques proposées.*

On traduirait de même évidemment toutes les autres propriétés des cercles, consignées à la fin du IIe Chapitre de la Ire Section.

404. Supposons maintenant que l'on remplace le système des sections coniques proposées, excepté la dernière, par des circonférences de cercle ayant une sécante commune avec elle; la sécante commune, conjuguée à celle-ci et relative aux cercles, passera tout entière à l'infini (94); donc on pourra énoncer ce corollaire, auquel nous sommes déjà parvenus d'une autre manière (336), pour le cas particulier où les cercles touchent la section conique proposée:

Si, sur le plan d'une section conique quelconque, on trace une suite de cercles

ayant avec elle deux points communs ou, plus généralement, une sécante commune, toutes les autres sécantes, communes à cette section conique et aux différents cercles, qui sont conjuguées à la première, seront parallèles ou iront concourir en un même point à l'infini.

La proposition subsiste évidemment (90), quand on remplace les cercles dont il s'agit par des sections coniques quelconques s. et s. p. sur le plan de la première; et il en résulte un moyen de mener, par deux points d'une section conique donnée et décrite, ou un cercle, ou une section s. et s. p. à une autre section conique quelconque, qui soient tangents à la première. En partant de là d'ailleurs, on déduirait immédiatement tous les théorèmes qui font le sujet des articles 392, 393 et 394.

405. La même proposition va nous donner un nouveau moyen, très-direct et très-simple, de mener le cercle osculateur en un point quelconque A (*fig.* 55) d'une section conique donnée et décrite sur un plan.

En effet, par le point A faites passer, à volonté, une circonférence de cercle rencontrant, de nouveau, la courbe aux trois autres points B, C, D; la sécante BC sera (292) conjuguée à celle AD; et par conséquent, si par le point A on mène, dans la section conique, la corde AA' parallèle à BC, son extrémité A' appartiendra au cercle qui, passant par A et D, toucherait cette section conique en A, car la corde AB sera devenue nulle, et sa direction tangente à la courbe : rien n'est donc plus facile que de mener, en un point donné A d'une section conique décrite, un cercle qui soit tangent à cette section conique.

Pour trouver maintenant le cercle osculateur au même point, on observera, toujours d'après le théorème cité, que ce cercle doit faire partie de ceux qui touchent la courbe en A, et que par conséquent sa corde commune, conjuguée à la tangente en ce point, doit être parallèle à celle A'D, et passer par le point A (320); menant donc par ce point la corde AD' parallèle à celle DA', sa nouvelle extrémité D', dans la courbe, appartiendra au cercle osculateur, qui sera ainsi facile à tracer. On voit, au surplus, ce qu'il y aurait à faire dans le cas où la section conique ne serait pas décrite, mais donnée seulement par un certain nombre de points (395).

Si l'on connaissait l'un des axes principaux de la courbe, on pourrait se dispenser de décrire le cercle auxiliaire ABCD; car (394) la direction de cet axe devant former le même angle avec les cordes conjuguées AD et BC, la direction de AA' serait par là même connue, et par suite celle de AD' parallèle à A'D. Si, en outre, l'on se donnait la tangente en A, conjuguée à A'D,

tout reviendrait évidemment à mener par ce point une droite AD′ formant le même angle qu'elle avec l'axe de la courbe; autrement on pourrait encore déterminer le point symétrique de A par rapport à cet axe, car le diamètre passant par ce point serait parallèle à D′A, et la construction reviendrait alors à celle qu'a donnée du même problème R. Simson, dans son *Traité des sections coniques* (liv. V, Prop. 39).

Réflexions générales sur l'objet du présent Chapitre et sur les moyens d'étendre, aux sections coniques en général, les propriétés des cercles qui se coupent ou se touchent sur un plan, etc.

406. Nous n'insisterons pas davantage sur ces exemples et ces applications; notre objet ici est moins, en effet, de multiplier le nombre des vérités particulières, quelque intéressantes qu'elles puissent d'ailleurs paraître, que de faire pressentir la fécondité qui est propre à chaque théorie, et de donner une idée exacte de l'étendue et de la généralité des conséquences qui peuvent résulter des principes qui ont été posés dans la première partie de cet ouvrage. C'est pourquoi nous nous contenterons d'observer en général, pour terminer le sujet qui nous occupe, que, puisque les sécantes communes réelles ou idéales, les polaires, les pôles, etc., sont projectifs (118, 127), toutes les propriétés et constructions établies, soit à la fin du IIe Chapitre de la Ire Section, soit dans le dernier Chapitre de la IIe Section, et qui sont relatives aux cercles qui se coupent ou se touchent sur un plan, etc., subsisteront, d'une manière analogue (138), pour des sections coniques quelconques qui auraient déjà une sécante commune, réelle ou idéale, représentant celle à l'infini des cercles, ou pour des sections coniques s. et s. p. sur un plan, dont la sécante commune serait de même placée à l'infini sur ce plan.

Ainsi, par exemple, étant données, sur un plan, trois sections coniques ayant une sécante commune, on pourra déterminer, par des constructions purement linéaires (270 à 286), une nouvelle section conique qui leur soit à la fois tangente, et qui ait cette sécante en commun avec elles, etc., etc.

D'un autre côté, il résulte (400) de la théorie des polaires réciproques, qu'il n'est aucune des propriétés des sections coniques, ayant une ou plusieurs sécantes communes sur un plan, qui ne puisse se traduire en une propriété analogue des sections coniques ayant un ou plusieurs points de concours de tangentes communes, et *vice versâ*; donc il sera facile de découvrir les diverses propriétés et solutions relatives, en général, à des sec-

tions coniques assujetties à toucher les mêmes droites, ou à passer par les mêmes points, donnés au nombre de deux, au moins, pour l'une quelconque des espèces.

407. Si maintenant on ajoute que toutes les propriétés et solutions ainsi obtenues demeurent applicables, en vertu de la loi de continuité, à tous les états particuliers par lesquels peut passer le système que l'on considère, comme, par exemple, lorsque certains points ou certaines droites deviennent imaginaires, se confondent deux à deux ou passent à l'infini, tandis que des sections coniques dégénèrent elles-mêmes en des points, en des droites, ou se rapprochent (287) l'une de l'autre jusqu'à se superposer entièrement, on concevra sans peine l'immensité des conséquences qui peuvent découler de ce qui précède pour la simple Géométrie.

Il semble d'ailleurs qu'après les divers exemples présentés, soit dans ce Chapitre, soit dans tout le reste de l'ouvrage, on ne pourra concevoir aucune espèce de difficultés dans l'application de nos principes; en sorte que nous pourrions terminer ici la tâche que nous nous étions proposé de remplir. Mais notre but ayant été aussi de développer les germes de chaque théorie particulière, lorsqu'elle peut avoir des applications utiles aux arts qui reposent sur le dessin linéaire, il nous reste encore beaucoup à faire sous ce rapport; l'on sait, en effet, que l'essentiel et le difficile, en pareil cas, n'est pas de poser des principes, mais de multiplier le nombre des applications et des exemples : nous poursuivrons donc la marche que nous avons déjà suivie, sans toutefois nous arrêter plus longuement sur les propriétés qui viennent de nous occuper en dernier lieu, lesquelles ne sont que des extensions faciles et, en quelque sorte, évidentes des divers principes déjà établis, dans la Ire et la IIe Section, pour le cas particulier des circonférences de cercle.

CHAPITRE III.

THÉORIE DES DOUBLES CONTACTS DES SECTIONS CONIQUES, ET SOLUTIONS DES PROBLÈMES QUI S'Y RAPPORTENT.

408. L'une des applications les plus intéressantes de nos principes est la théorie des doubles contacts des sections coniques, que nous n'avons point

encore eu l'occasion de développer de la manière convenable dans ce qui précède, et qui a, comme nous le verrons bientôt, une liaison on ne peut plus intime avec les propriétés des foyers des sections coniques, et celles de certaines figures inscrites ou circonscrites aux mêmes courbes. Quoique cette application ne présente aucune sorte de difficultés, et qu'elle soit une conséquence extrêmement simple des propriétés générales établies dans le précédent Chapitre, nous avons pensé qu'à cause du grand nombre de considérations neuves et piquantes qu'elle offre, ce ne serait pas trop faire que de consacrer un Chapitre tout entier à son exposition, d'autant plus qu'il n'est presque aucune de ces considérations qui ne soit indispensable pour les recherches dont nous aurons à nous occuper par la suite.

Nous avons d'ailleurs déjà fait connaître, art. 322 et suivants, les propriétés dont jouit le système de deux sections coniques qui ont un double contact, réel ou idéal, relativement aux axes et centres d'homologie qui peuvent leur appartenir; il ne peut donc plus être question de ces sortes de propriétés, que nous supposerons désormais bien connues, non plus que des moyens graphiques de construire l'une des courbes par l'autre, quand on se donne, avec certaines conditions, soit un centre, soit un axe d'homologie.

409. Cela posé, considérons le système de deux sections coniques quelconques ayant un double contact, et supposons qu'on ne connaisse ni la sécante de contact, ni le pôle de cette sécante, et qu'il s'agisse de les déterminer, soit immédiatement, quand les deux sections coniques sont tracées, soit, au contraire, quand on ne se donne qu'une seule de ces courbes, et que l'autre doit être assujettie à certaines conditions, comme de passer par des points donnés, etc. Il est évident que ces sortes de questions sont d'un tout autre ordre que celles qui ont été résolues aux articles cités, et qu'elles exigent aussi des principes différents; or il convient que nous examinions d'abord le cas où l'on suppose les courbes décrites ou données (341) par certaines conditions. Et comme, jusqu'à présent, nous avons constamment fait usage des principes de la projection centrale pour établir les bases de nos diverses constructions, nous continuerons à en agir de même dans tout ce qui va suivre.

Propriétés générales et construction de la sécante de contact commune au système de deux sections coniques doublement tangentes et données sur un plan.

410. Deux sections coniques au double contact pouvant, en général, être

regardées (131) comme la projection de deux cercles concentriques, pour lesquels la sécante de contact est passée tout entière à l'infini, tandis que son pôle est devenu le centre commun des deux courbes, il ne sera pas difficile de découvrir les propriétés projectives qui peuvent appartenir à leur système.

Supposons, en effet (*fig.* 56), qu'au travers des deux cercles on mène une transversale arbitraire AB, rencontrant ces cercles aux points A et B, A' et B' respectivement; qu'ensuite on détermine les pôles P et P' de cette transversale, par rapport à chaque courbe, il est visible que la droite PP' ira passer par le centre commun O, pôle de la sécante de contact à l'infini; ce sera donc la direction commune à deux diamètres des cercles, dont le pôle à l'infini L sera le même, et appartiendra à la sécante de contact de ces cercles.

Si l'on observe, en outre, que chacune des cordes AB, A'B' est divisée harmoniquement (27) par le point I de son intersection avec la direction commune des diamètres dont il s'agit, et par le point L qui se trouve sur la sécante de contact, on aura, au besoin (374), un nouveau moyen de construire directement ces deux points indépendamment de la connaissance des pôles P et P'.

Pareillement encore, en traçant les tangentes aux extrémités des cordes AB et A'B', elles formeront, par leurs intersections mutuelles, un quadrilatère complet dont une diagonale PP' sera la direction commune des diamètres ci-dessus, et dont les deux autres concourront évidemment, à l'infini, au point L.

Mais, d'après le principe de l'article 138, toutes ces constructions demeurent immédiatement applicables aux sections coniques proposées, dont les cercles sont censés les projections; donc, en les répétant sur ces courbes pour deux transversales arbitraires, on aura à la fois et la sécante de contact qui leur appartient et le pôle commun de cette sécante, le tout par des opérations qui n'exigent que l'emploi de la règle, quand les courbes sont entièrement décrites.

411. Supposons encore que, d'un point quelconque P (*fig.* 57) du plan de nos deux cercles, on leur mène respectivement deux paires de tangentes: les cordes de contact ou polaires correspondantes AB, A'B' seront évidemment parallèles, et donneront par conséquent un point L de la sécante de contact, à l'infini, commune à ces cercles; de plus, si elles rencontrent à la fois les cercles auxquels elles correspondent, c'est-à-dire si ce sont des cordes réelles, et qu'on joigne, deux à deux, leurs extrémités par de nouvelles

droites, ces droites iront s'entrecouper respectivement aux points I et K, qui appartiendront à la direction commune de deux diamètres passant par le point P. Ainsi l'on aura obtenu, à la fois, et un point de la sécante de contact des deux courbes, et une droite passant par le pôle O de cette sécante.

Il ne serait pas difficile, au surplus, de trouver d'autres points ou d'autres alignements propres à construire la sécante dont il s'agit et son pôle : la symétrie des figures que nous venons de considérer nous dispense d'entrer dans de plus grands développements.

Ainsi, quand deux sections coniques, au double contact, sont données et décrites sur un plan, rien n'est plus aisé que de déterminer, à l'aide de constructions purement linéaires, leur sécante commune de contact et le pôle de cette sécante; mais il n'en est plus de même du cas où, une seule de ces sections coniques étant donnée et décrite, l'autre est seulement déterminée par certaines conditions. En effet, la seule hypothèse que les courbes aient entre elles un double contact comporte déjà deux conditions distinctes, et il n'en reste que trois d'entièrement arbitraires, et qu'on puisse se donner explicitement. Il n'est donc plus possible d'opérer directement, sur la courbe que déterminent ces conditions, comme on le ferait (344) si ces conditions étaient au nombre de cinq et de la nature de celles de l'article 341.

Néanmoins les considérations qui suivent peuvent encore conduire au but, d'une manière également simple, dans plusieurs des cas principaux.

Des sections coniques doublement tangentes à une section conique donnée, et assujetties à passer par deux points aussi donnés.

412. Continuons, comme ci-dessus, à ne nous occuper que des cercles concentriques, projections des deux sections coniques qui, par hypothèse, doivent avoir entre elles un double contact; et remarquons qu'il ne peut ainsi être question que des propriétés qui appartiennent individuellement à l'un des systèmes de celles qui remplissent les conditions du problème; nous nous occuperons ensuite du nombre des solutions dont peut être susceptible ce même problème.

Soient A et B (*fig.* 58) deux points de la circonférence extérieure, supposée non décrite; de chacun de ces points, menons une paire de tangentes à la circonférence intérieure, pour former le quadrilatère simple MNPQ circonscrit à cette circonférence; traçons les deux diagonales NQ et MP, ainsi que la droite AB qui joint les points de concours des côtés opposés du quadrilatère. Il est évident, d'après la symétrie de la figure, que l'une, NQ, des

diagonales passera par le centre commun O, et divisera la distance AB en deux parties égales en I; qu'en outre l'autre diagonale MP sera parallèle à cette même distance, et ira concourir avec elle en un point L de la sécante de contact, à l'infini, commune aux deux cercles.

Ainsi, au moyen des deux points donnés A et B, on aura, à la fois, et un point de la sécante dont il s'agit, et une droite renfermant le pôle O de cette sécante. Si donc on se donnait un troisième point de la courbe extérieure, on obtiendrait directement, au moyen de ce qui précède, la sécante de contact et le pôle qui lui correspond, le tout par des constructions purement linéaires.

413. Supposons maintenant que l'on trace le quadrilatère inscrit *mnpq*, qui a pour sommets les points de contact des côtés du premier, il aura évidemment (186) I et L pour points de concours de ses côtés opposés, et le point K sera l'intersection commune de ses diagonales et de celles du quadrilatère MNPQ; en sorte que les points I, K, L seront tels (192), que « chacun d'eux sera, par rapport à la courbe donnée, le pôle de la droite qui contient les deux autres. » Donc on pourra se dispenser de construire les tangentes qui répondent aux points A et B, et se contenter simplement de tracer les polaires ou cordes de contact *nq* et *mp* qui appartiennent à ces points.

Toutes les constructions qui précèdent demeurant immédiatement applicables au cas où les deux courbes sont des sections coniques ayant un double contact, on en déduit sur-le-champ la proposition suivante :

Si l'on fait varier une conique, assujettie à passer par deux points connus A, B (*fig.* 59), *et à toucher, en deux points* T, T', *une autre section conique* mnp *donnée de position, la sécante de contact* TT', *qui peut d'ailleurs être idéale, changera de situation en pivotant constamment sur un point fixe* L, *placé sur la droite qui renferme les points* A *et* B.

414. Dans le cas particulier où la section conique donnée *mnp* dégénère en deux lignes droites, la proposition subsiste toujours, et revient à celle qu'a démontrée M. Brianchon, à la page 20 de son *Mémoire sur les lignes du second ordre*, et dont nous avons déjà dit quelques mots à l'article 402 du précédent Chapitre. On peut, au surplus, les établir directement, l'une et l'autre, sans recourir aux considérations particulières ci-dessus, et en leur donnant toute la généralité dont elles sont susceptibles.

En effet, toutes les sections coniques qui passent par A et B ayant une sécante commune, réelle quand ces points le sont eux-mêmes, et idéale quand

ils sont imaginaires, on pourra, en général (122), considérer la figure comme la projection d'une autre, pour laquelle toutes les sections coniques seront devenues des circonférences de cercle, dont la sécante commune sera passée tout entière à l'infini. Or, par hypothèse, ces cercles doivent toucher, en deux points, la section conique projection de celle qui est donnée; donc toutes les cordes ou sécantes de contact seront parallèles entre elles et à l'un des axes principaux de la courbe, c'est-à-dire qu'elles iront concourir en un point de la droite, à l'infini, projection de celle où se trouvent les points A et B qui, d'ailleurs, peuvent être réels ou imaginaires, aussi bien que la corde de contact, sans que la proposition cesse de subsister.

415. On remarquera qu'il existe deux systèmes de cercles tangents à la section conique de projection, auxquels correspondent deux systèmes de cordes ou de sécantes de contact parallèles, mais dont l'inclinaison est différente d'un système à l'autre, les unes étant parallèles au grand axe de la courbe, les autres à son petit axe. Il y a donc aussi, dans le cas général (413), deux systèmes distincts de sections coniques doublement tangentes à la proposée, et passant par les points A et B; or, il est aisé de voir que, tandis que les cordes ou sécantes de contact des unes pivotent sur le point L, celles des autres doivent pivoter, au contraire, sur le point I déjà défini ci-dessus, et qui divise, avec le premier, la distance AB et la corde qu'elle intercepte dans la section conique donnée, en segments harmoniques.

De là, au reste, on déduirait immédiatement tout ce qui a déjà été démontré d'une autre manière (412 et 413); car si, de chacun des points A et B, on mène une tangente à la courbe donnée, le système de ces deux tangentes représentera une section conique ayant un double contact avec cette courbe, et la corde ou sécante de contact correspondante, faisant partie de l'une des séries de cordes en question, devra concourir en celui des points I et L auquel elle correspond en particulier.

Cas pour lesquels l'un des points de contact est donné ou se confond avec l'autre.

416. Si l'on se donnait l'un, T, des deux points où la section conique, passant par A et B, doit toucher la proposée, on aurait immédiatement celui, T', qui lui correspond, par l'intersection de la droite LT ou IT avec cette dernière courbe. Ainsi le problème, où l'on se propose de *mener, par deux points* A *et* B, *une section conique ayant un double contact avec une section conique donnée, et dont un des points de tangence soit assigné,* est susceptible de

deux solutions distinctes, qui n'exigent l'une et l'autre que l'emploi de constructions linéaires, quand la courbe donnée se trouve en même temps décrite.

C'est, au reste, ce qu'on déduirait immédiatement des considérations exposées, art. 323, puisque le point de contact donné peut être regardé comme un centre d'homologie. Car, en recherchant, sur la courbe proposée, la corde qui est l'homologue de celle donnée AB, par rapport à ce centre, elle rencontrera celle-ci en un point qui devra appartenir à l'axe d'homologie conjugué à ce centre; or, cet axe n'étant ici autre chose (322) que la tangente commune au second point de contact des deux courbes, ce point sera parfaitement déterminé, et il en sera de même de la courbe cherchée.

417. Si l'on exigeait que la section conique, passant par A et B, fût *osculatrice du troisième ordre* de la proposée, les deux points de contact T, T' devraient se confondre en un seul, et la sécante qui lui correspond deviendrait une tangente à cette dernière section conique, passant par l'un ou par l'autre des points L et I; le point d'osculation pourrait donc se déterminer aisément, par des constructions purement linéaires, si la courbe donnée était en même temps décrite; au moyen de quoi l'on obtiendrait ensuite (323) tout ce qui concerne l'osculatrice, en ne se servant également que de la règle. Enfin on voit qu'il existe, en général, quatre osculatrices distinctes satisfaisant également bien aux conditions du problème.

Des sections coniques doublement tangentes à une section conique donnée, et assujetties à passer par trois points aussi donnés.

418. Si, au lieu des conditions qui précèdent, on se donnait, à volonté, un troisième point C, par lequel dût également passer la section conique ayant un double contact avec la proposée ; en joignant ce point avec les deux autres A et B, on obtiendrait deux nouvelles droites AC et BC qui, traitées comme la première AB, donneraient quatre points analogues à ceux I, L, appartenant deux à deux à ces droites : ce qui formerait, en tout, six points rangés deux par deux, comme on vient de le dire, sur les côtés du triangle ABC, et divisant harmoniquement chacun de ces côtés ; ainsi donc il y aurait, entre ces six points et ceux A, B, C, les diverses dépendances qui ont déjà été signalées art. 162.

La corde ou sécante de contact, relative à l'une des sections coniques cherchées, s'obtiendrait ensuite en joignant à volonté, par une nouvelle droite, deux quelconques de ces six points, qui ne proviennent pas d'une

même combinaison ou d'un même côté ; ce qui donnerait évidemment, en tout, quatre droites distinctes, renfermant, trois à trois, les six points en question, et formant, par leurs intersections mutuelles, un quadrilatère complet dont ces six points seraient les sommets, et dont les droites AB, BC, CD seraient, en direction, les trois diagonales.

Quant aux pôles O des sécantes de contact TT', ils se trouvent évidemment (412 et 415), deux à deux, sur chacune des trois paires de droites analogues à celles LK, IK qui correspondent à AB et ont, pour point d'intersection, le pôle K de cette dernière droite, et pour pôles les points I et L qui appartiennent à sa direction. Enfin, chacun des points O dont il s'agit s'appuyant à la fois sur trois des six droites LK, IK provenant de combinaisons différentes, ces six droites doivent former un quadrilatère simple avec ses deux diagonales ordinaires, aux sommets duquel se trouvent situés les quatre pôles des sécantes de contact.

419. L'ensemble de toutes ces relations est exprimé dans la *fig.* 60 : A, B, C sont les trois points donnés, par lesquels il s'agit de faire passer une section conique doublement tangente à la proposée ; ANP et AMQ, BN''P'' et BM''Q'', CN'P' et CM'Q' sont les trois paires de tangentes issues des points A, B, C et formant par leurs rencontres mutuelles, en les combinant deux à deux, trois quadrilatères circonscrits MNPQ, M'N'P'Q', M''N''P''Q'', analogues à ceux dont il a été question précédemment (412 et 413) ; enfin I'L'', I''L', I'I''L et LL'L'' sont les quatre sécantes de contact cherchées, et O, O', O'', O''' les pôles qui leur correspondent respectivement. L'usage des autres lignes et des autres points de la figure est facile à reconnaître, d'après ce qui a été dit sur la *fig.* 59, puisqu'on a eu le soin d'employer les mêmes lettres, différemment accentuées, pour indiquer les points qui remplissent des fonctions analogues à l'égard de chacune des trois droites AB, BC et CD.

On remarquera que les trois paires de tangentes issues des points A, B, C forment en outre, par leurs rencontres mutuelles, quatre hexagones distincts, tels que NQ''N'QN''Q'N, circonscrits à la courbe donnée, dont les trois diagonales NQ, N'Q', N''Q'', qui joignent les sommets opposés et appartiennent respectivement aux quadrilatères ci-dessus mentionnés, vont concourir (208 et 418) en l'un O''' des quatre pôles des sécantes de contact cherchées, et rencontrent celles des droites AB, AC, BC qui leur correspondent respectivement ou renferment les points de concours des tangentes d'où elles proviennent, en trois points I, I', I'' situés, deux par deux, sur trois des sécantes dont il s'agit.

Si, au lieu des trois points A, B, C et des paires de tangentes qui leur appartiennent, on considérait les polaires et les points de contact correspondants, on arriverait à des conséquences analogues, que nous aurons occasion de reproduire (424), lorsqu'il s'agira du cas où l'on se donne trois tangentes de la section conique qui doit avoir un double contact avec la proposée. Nous verrons, en effet, que les deux questions ont entre elles une analogie telle, qu'on peut toujours les ramener l'une à l'autre au moyen de la théorie des pôles.

Au surplus, toutes ces considérations deviennent, en quelque sorte, évidentes, et peuvent se démontrer *à priori* en supposant, ainsi qu'on l'a fait art. 412, la figure mise en projection, sur un nouveau plan, de façon que la section conique proposée et l'une de celles qu'on cherche deviennent à la fois des circonférences de cercle concentriques.

420. Les constructions par lesquelles nous venons d'obtenir les sécantes de contact des sections coniques doublement tangentes à une section conique donnée, et passant par trois points connus de position sur son plan, cessent d'être applicables quand ces trois points sont, en tout ou en partie, compris dans l'intérieur de la courbe donnée ; il en est encore de même, à plus forte raison, du cas où deux de ces points doivent être imaginaires, c'est-à-dire lorsque la droite correspondante doit être une sécante idéale commune (312) à la section conique cherchée et à une autre section conique quelconque donnée. Mais, excepté le cas où les points donnés se trouvent partie au dedans, partie au dehors de la courbe proposée, lequel ne peut évidemment être susceptible d'aucune solution réelle, on ne doit pas conclure que, la construction devenant illusoire, la section conique cherchée doive, par là même, cesser d'être possible (376). En effet, dans le cas où deux des points donnés sont imaginaires, on peut toujours (110) mettre la figure en projection sur un nouveau plan, de façon que la section conique cherchée devienne une circonférence de cercle : le problème se trouve donc ramené, d'une manière directe et purement géométrique, à celui où il s'agit de *mener, par un point donné sur le plan d'une section conique décrite, une circonférence de cercle qui soit doublement tangente à cette section conique :* problème qui est évidemment toujours susceptible d'une solution réelle, quelle que soit la situation du point donné sur le plan de la courbe.

421. Quant au cas où les trois points donnés sont à la fois intérieurs à la section conique, on peut, comme dans l'article 412, supposer la courbe donnée et celle qu'on cherche remplacées par des circonférences de cercles con-

29.

centriques; or il n'est pas difficile de prouver qu'on peut encore dans ce cas, de même que dans celui qui précède, déterminer directement, et par des constructions purement linéaires, la sécante de contact à l'infini et le centre commun des deux cercles, c'est-à-dire le pôle de cette sécante.

Soient, en effet, A et B (*fig.* 61) deux points donnés de la circonférence intérieure, K le pôle de la droite AB par rapport au cercle extérieur; joignons ce pôle aux deux points donnés par les sécantes indéfinies KA, KB, rencontrant en D et F, E et G respectivement le cercle extérieur dont il s'agit, les cordes DE, GF seront évidemment parallèles à AB et concourront par conséquent avec elle en un point L de la sécante de contact à l'infini; celles DG, EF se couperont, au contraire, au point I milieu de AB, en sorte que KI passera par le centre commun O des deux cercles. Ainsi on aura obtenu, pour le système des points A et B, les deux droites IK, KL analogues à celles qui nous ont occupés dans l'article 412; et l'on remarquera que les nouvelles constructions ont, sur les premières, l'avantage de s'appliquer indistinctement aux deux cas.

Il est sans doute inutile de dire que la même opération, répétée sur chacune des trois droites qui joignent deux à deux les points donnés, produira les trois systèmes de lignes dont les intersections respectives appartiendront (418) aux pôles des sécantes de contact cherchées, lesquelles seront évidemment encore au nombre de quatre, aussi bien que les courbes qui leur correspondent respectivement (*). Nous avons donc résolu complètement et d'une manière assez simple, ce semble, le problème général qui suit :

Par trois points, donnés à volonté sur le plan d'une section conique décrite, mener, avec la règle seulement, une autre section conique qui ait un double contact avec la première.

422. Il est bien digne de remarque que nous n'ayons employé que le tracé de simples lignes droites pour résoudre ce problème, quand la section conique donnée se trouve décrite, tandis que nous avons été obligés (309 et 339) d'employer le tracé d'un cercle auxiliaire pour résoudre la même question dans le cas où cette section conique dégénère en deux lignes droites. La raison en paraîtra simple et évidente, si l'on considère qu'on ne peut et qu'on ne doit pouvoir résoudre linéairement, sur un système de lignes droites données, que les problèmes qui ne sont susceptibles que d'une seule solution, ou dont les solutions multiples sont entièrement séparables de leur nature;

(*) Il serait aisé de reconnaître, d'après cela, le système des relations qui lient toutes ces droites et tous ces points, soit entre eux, soit avec les données du problème.

et qu'il faut nécessairement le tracé d'une courbe du second degré, donnée et décrite sur le plan de la figure, pour obtenir les solutions qui ne peuvent être séparées autrement que par la pensée.

Des sections coniques doublement tangentes à une autre, et qui touchent, de plus, trois droites données.

423. La question qui vient de nous occuper, dans ce qui précède, se ramène directement à la suivante, et *vice versâ :*

Trois droites étant données à volonté sur le plan d'une section conique décrite, mener, avec la règle seulement, une autre section conique qui touche ces trois droites, et ait un double contact avec la première.

En effet, il est facile de voir, soit à l'aide de la théorie des polaires réciproques, soit directement au moyen du principe de l'article 131, que :

La réciproque polaire (231) *d'une section conique doublement tangente à une autre, prise pour directrice, doit toucher celle-ci aux mêmes points que la première, ou, plus généralement, doit avoir même sécante de contact et même pôle relatif à cette sécante.*

Si donc trois tangentes quelconques de l'une des sections coniques au double contact étaient données, il suffirait, pour avoir la sécante de contact correspondante, de déterminer les pôles qui appartiennent aux trois tangentes par rapport à la section conique supposée donnée et décrite, puis de se proposer, sur ces trois points, la question qui a été résolue ci-dessus.

Réciproquement, trois points étant donnés, on recherchera leurs polaires par rapport à la courbe décrite, et la question sera ramenée à celle où l'on se donne trois tangentes de la courbe au double contact.

Mais on peut aussi opérer directement dans le cas de trois tangentes, et la solution qu'on obtient, quand ces tangentes rencontrent à la fois la section conique donnée, offre l'avantage d'être très-élégante et de n'exiger, en quelque sorte, le tracé d'aucune des lignes auxiliaires qui compliquent l'autre.

424. Soient, en effet, mp, nq (*fig.* 58 et 59) deux quelconques des tangentes dont il s'agit, rencontrant en m et p, n et q respectivement la courbe qui est donnée, et se coupant mutuellement au point K; en joignant, deux à deux, leurs extrémités par de nouvelles droites, ces droites détermineront, par leurs intersections respectives, deux autres points I et L qui, avec le premier K, seront tels (192), que la droite qui joint deux quelconques d'entre eux aura pour pôle le troisième, par rapport à la courbe donnée; or il est aisé de prouver, par les considérations déjà mises en usage, art. 412 et sui-

vants, que les points I et L, ainsi obtenus, appartiendront à la mutuelle intersection de deux paires de sécantes de contact, tandis que les droites correspondantes IK et KL renfermeront, deux à deux, les pôles de ces sécantes.

Donc, si l'on opère de la même manière sur chacune des paires de tangentes données, supposées au nombre de trois, on obtiendra simultanément les quatre sécantes de contact dont il s'agit et les quatre pôles qui leur correspondent respectivement. En se bornant à exécuter les opérations relatives à deux paires de tangentes, on voit que tout se réduira à tracer douze lignes droites indéfinies; autrement il en faudrait dix-huit; mais alors les points I, L et leurs analogues seront, trois par trois, en ligne droite, et les droites IK, KL, prises dans un certain ordre, concourront, trois à trois, en un même point, comme l'indique déjà la *fig.* 60; d'ailleurs les droites et les points ainsi obtenus seront les quatre sécantes de contact cherchées et les quatre pôles qui leur correspondent respectivement.

L'ensemble de ces relations est exprimé par la *fig.* 62, dans laquelle *mp*, *nq*, *rs* sont les trois tangentes données, terminées aux points de leur intersection avec la section conique que doit toucher celle qu'on cherche. Les douze droites, qui joignent deux à deux ces extrémités, forment, comme on le voit, quatre hexagones inscrits, analogues à celui *mnrpqsm* dont les diagonales, joignant les sommets opposés, sont précisément les trois tangentes données, et dont la droite LL'L", qui renferme les points de concours des côtés pareillement opposés (201), est évidemment, d'après ce qui précède, une des sécantes de contact cherchées. On voit, en outre, qu'au moyen de l'un quelconque de ces hexagones, on obtiendra directement les quatre pôles O, O', O", O‴ de ces sécantes : en effet, en joignant chacun des points de concours L, L', L" des côtés opposés de cet hexagone avec celui des points d'intersection K, K', K" des tangentes dont il provient, on formera un triangle OO'O" dont les trois sommets feront partie des pôles dont il s'agit; en joignant ensuite chaque sommet avec celui des points K, K', K" qui appartient au côté opposé, on obtiendra trois droites qui, d'après ce qui précède, viendront concourir au quatrième pôle O‴, lequel appartient précisément à la droite LL'L" que l'on considère en particulier.

Au surplus, l'analogie qui règne entre la figure qui nous occupe et la *fig.* 60 est facile à saisir, et, en les rapprochant entre elles, on aura, comme on voit, l'ensemble des propriétés qui peuvent appartenir à trois points A, B, C, donnés à volonté sur le plan d'une section conique, et aux polaires *mp*, *nq*, *rs* de ces trois points.

Cas où, les droites données étant au nombre de deux seulement, l'un des points de contact des deux courbes est assigné, se confond avec l'autre, ou est variable avec lui sur l'une de ces courbes.

425. Les considérations qui viennent de nous occuper, relativement au cas général où l'on se donne trois tangentes de la section conique au double contact, s'appliquent également bien aux questions analogues à celles qu'on s'est proposées art. 416 et 417 : supposons, par exemple, qu'on ne se donne que deux tangentes *mp* et *nq* (*fig.* 59) de la section conique cherchée, et qu'on demande que cette section conique soit osculatrice du troisième ordre avec la proposée; tout consistera évidemment (424), pour avoir les points d'osculation et, par suite, les différentes courbes qui résolvent le problème, à mener, des points I et L obtenus comme il a été dit ci-dessus, deux paires de tangentes à la courbe donnée, lesquelles auront pour points de contact les points demandés, qui seront par conséquent, en général, au nombre de quatre, aussi bien que les osculatrices qui leur correspondent respectivement; et, comme les droites LK, IK sont les polaires des points I, L dont il s'agit, les quatre points d'osculation se trouveront précisément à l'intersection de ces deux droites et de la courbe donnée.

On voit d'ailleurs, d'après ce qui a été dit ci-dessus (423), ce qu'il y aurait à faire dans le cas où les tangentes *mp* et *nq* ne rencontreraient plus cette courbe. Ainsi, excepté le cas où les tangentes données ne sont qu'en partie extérieures à la section conique proposée, on pourra toujours résoudre graphiquement ce problème, qui est en quelque sorte le réciproque de celui qui nous a déjà occupés, art. 417 :

Mener une section conique osculatrice du troisième ordre à une autre section conique décrite, et qui touche, de plus, deux droites données de position sur son plan, le tout en n'employant que la règle.

426. On déduit encore, des considérations qui précèdent, ce théorème analogue à celui de l'article 413 :

Si l'on fait varier une conique, assujettie à toucher deux droites données mp, nq (*fig.* 59), *et à avoir un double contact avec une autre section conique quelconque* mnp *donnée de position sur le plan de ces droites, la sécante de contact* TT', *réelle ou idéale, pivotera sans cesse sur un point fixe* L, *placé sur la polaire du point d'intersection* K *des tangentes* mp *et* nq *; de plus, le point* L *sera aussi celui autour duquel pivote la corde de contact relative à ces tangentes.*

Comme il y a deux séries distinctes de sections coniques au double con-

tact, il existe aussi deux points I et L, placés sur la polaire de K qui renferme les pôles A et B des tangentes données, autour desquels pivotent respectivement les deux séries de sécantes de contact d'espèces différentes; or il est aisé de reconnaître (412 et suivants) que ces points divisent à la fois en segments harmoniques, soit la distance AB comprise entre les deux pôles dont il s'agit, soit celle comprise entre les tangentes *mp* et *nq* qui leur correspondent, soit enfin la corde interceptée par la section conique proposée sur la droite AB, lorsque cette corde est possible.

On voit ce qu'il y aurait à faire pour résoudre cet autre problème :

Inscrire dans un angle donné une conique doublement tangente à une conique décrite, et dont l'un des points de contact soit assigné.

Des sections coniques doublement tangentes au système de deux sections coniques données sur un plan.

427. Les théorèmes qui précèdent sont susceptibles d'une extension beaucoup plus grande, en remplaçant les deux tangentes données par une section conique quelconque.

Soient M, N, P, Q (*fig.* 63) les quatre points où se coupent, en général, les deux sections coniques proposées que doivent envelopper ou toucher doublement celles qui sont variables; soient K, L, I les trois points où se coupent, deux à deux (360), les sécantes conjuguées communes passant par les points M, N, P, Q; considérons d'abord l'une quelconque T*t*T' des sections coniques enveloppes, touchant en T et T', *t* et *t'* respectivement les proposées, et soient R et *r* les pôles des cordes de contact TT', *tt'*. Si l'on met la figure en projection sur un nouveau plan, de façon (110) que la section conique enveloppe devienne un cercle et que la droite R*r*, qui renferme les deux pôles en question, passe à l'infini, les cordes de contact TT', *tt'* deviendront des diamètres de ce cercle, communs aux sections coniques proposées, et par conséquent le point d'intersection de ces diamètres sera à la fois le centre de ce cercle et de ces sections coniques; ce sera donc aussi (363) l'un des trois points de concours K des sécantes conjuguées communes qui appartiennent à ces dernières, et partant la droite R*r*, qui est la polaire de ce point, renfermera les deux autres points de concours I et L (360). Or de là résulte immédiatement ce théorème :

Si une section conique quelconque a un double contact avec deux autres sections coniques données, les sécantes de contact iront concourir en l'un des trois points de concours des sécantes conjuguées communes à ces sections co-

niques, et par conséquent leurs pôles respectifs seront placés sur la droite qui renferme les deux autres de ces trois points.

428. Cette proposition a été démontrée d'une autre manière par M. Chasles, à la page 338 du tome III de la *Correspondance Polytechnique;* il s'en est servi avec succès pour établir un théorème de Monge sur les surfaces du second degré qui en enveloppent une troisième (*). Au reste, si l'on joint à cette proposition tout ce qui a été dit (186) sur les quadrilatères inscrits et circonscrits aux coniques et sur le pôle et la polaire; si l'on y ajoute aussi les propriétés des articles 360 et 362, on aura à peu près le système de celles qui appartiennent à une ou plusieurs sections coniques qui en enveloppent à la fois deux autres, ou ont un double contact avec chacune d'elles.

Toutes ces propriétés se déduisent d'ailleurs directement de la projection de la figure dont il a été fait mention ci-dessus, puisque tout y est symétrique par rapport au point K, devenu centre commun des trois courbes.

Comme il y a trois points de concours I, K, L des sécantes conjuguées communes aux deux sections coniques proposées, il existe aussi trois systèmes distincts de sections coniques doublement tangentes, dont les points de contact appartiennent à des combinaisons d'arcs différemment situés, et qui sont faciles à reconnaître, pour chacun des points I, K, L, puisque les cordes de contact appartenant à ces arcs doivent concourir au point dont il s'agit. Maintenant, si l'on suppose que l'on fasse varier les sections coniques d'un même système, il en résultera cet énoncé général que nous avions en vue dans ce qui précède :

Les trois systèmes distincts de sections coniques, à la fois doublement tangentes à deux sections coniques données de position sur un plan, sont tels, que pour chacun d'eux les cordes de contact correspondantes pivotent sur un point fixe, placé à l'intersection de l'un des trois systèmes de sécantes conjuguées communes des sections coniques proposées.

Quand on suppose qu'une ou deux des coniques proposées dégénèrent en lignes droites, on retombe évidemment sur les propriétés des articles 402 et 426.

429. Les considérations de la projection centrale conduisent également à la proposition suivante, qui est une extension du théorème de l'article 413 :

« Supposons que, deux sections coniques, que je nommerai (O) et (O'),
» ayant une sécante commune, on en trace une infinité d'autres qui, passant
» par deux points quelconques A, B de la direction de cette sécante, aient

(*) *Voyez* le Supplément, à la fin de l'ouvrage, art. 601.

» un double contact de même espèce, soit avec (O), soit avec (O'); je dis » que les cordes de contact, relatives à l'un et à l'autre de ces systèmes, pi- » voteront toutes sur les mêmes points de la direction de AB. »

Pour le démontrer, il suffit de supposer la figure en projection, sur un nouveau plan, de façon (122) que les sections coniques des deux systèmes dont il s'agit deviennent des cercles, pour lesquels la sécante commune AB passe à l'infini : car, celles (O) et (O'), qui sont données de position et ont aussi AB pour sécante commune, devenant en même temps (125) s. et s. p., les cordes de contact des deux séries de cercles tangents à l'une et à l'autre de ces sections coniques seront respectivement parallèles à leurs axes principaux, ou concourront aux mêmes points de la droite, à l'infini, qui représente AB dans la première figure.

Cette proposition, qui s'applique évidemment, comme les précédentes, au cas où l'on remplacerait une ou plusieurs sections coniques par des systèmes de lignes droites indéfinies, aurait pu s'établir directement, sans recourir aux principes de la projection centrale, en remarquant que les points, autour desquels pivotent les sécantes de contact de l'un et l'autre systèmes, doivent diviser à la fois harmoniquement (115) la corde AB commune à ces systèmes et celle qui, sur la direction de AB, est également commune aux deux sections coniques proposées.

Considérations relatives au cas où l'on connaît, soit un point et deux tangentes, soit une tangente et deux points, de la section conique doublement tangente à une autre.

130. Je reviens maintenant au problème où il s'agit de déterminer une section conique doublement tangente à une section conique donnée, et assujettie à remplir, en outre, certaines conditions.

D'après ce qui en a déjà été dit dans ce qui précède, il ne reste plus évidemment qu'à s'occuper des cas où l'on se donnerait, soit deux points et une tangente, soit deux tangentes et un point de la section conique cherchée : or, ces cas ne peuvent se traiter directement comme ceux des articles 121 et 122, ou, au moins, exigent des principes essentiellement différents.

A la vérité, au moyen du système des deux tangentes ou des deux points donnés, on trouve encore (112, 121, etc.) deux points I et L (*fig.* 59), par lesquels doivent passer les sécantes de contact, et deux droites IK et KL renfermant les pôles correspondants de ces sécantes; mais il est impossible d'obtenir, de la même manière et par les mêmes considérations, soit d'autres

droites, soit d'autres points appartenant à ces pôles ou à ces sécantes.

Toutefois, s'il est impossible de déterminer, *à priori*, ces sécantes et leurs pôles, on peut au moins trouver, soit un second point de chacune des courbes qui résolvent le problème, quand un seul est donné, soit une seconde tangente de cette courbe, quand une seule tangente est donnée.

En effet, ayant obtenu les deux points I et L ainsi que les droites KL et IK qui leur corrrespondent, on remarquera que, le point L étant, en particulier, celui autour duquel pivotent les sécantes de contact de l'une des séries de coniques doublement tangentes à la proposée *mnp*, qui remplissent les deux premières conditions du problème, celle de toucher deux droites ou de passer par deux points donnés; on remarquera, dis-je, que IK est à la fois (412 et 424) la polaire du point L, soit par rapport à la courbe proposée, soit par rapport à l'une quelconque de celles qui font partie de la série dont il vient d'être parlé; de sorte que toute transversale passant par ce point rencontrera, soit chacune des deux courbes, soit deux tangentes quelconques de l'une d'elles, qui auraient leurs points d'intersection sur IK, en deux points dont la distance devra être divisée harmoniquement (194) au point L et au point de sa rencontre avec IK.

Supposant donc qu'on ait soit un point, soit une tangente quelconque de l'une des deux courbes, il ne sera pas difficile d'obtenir linéairement un second point ou une seconde tangente de cette courbe, au moyen du point L et de sa polaire IK : toutes ces remarques et ces constructions deviennent d'ailleurs évidentes, *à priori*, quand on considère la projection des deux courbes suivant deux cercles concentriques (*fig.* 58).

Ainsi, par ce qui précède, on aura à la fois deux points et deux tangentes de celles des courbes cherchées dont les sécantes de contact passent par le point L, et l'on en obtiendrait tout autant pour celles dont les sécantes de contact passent, au contraire, par le point I; mais on remarquera, sans doute, que, pour avoir trouvé un nouveau point ou une nouvelle tangente de chacun des systèmes distincts des sections coniques cherchées, on n'a pas pour cela avancé de beaucoup la solution du problème; car il est visible qu'on n'aura encore aucun moyen d'obtenir d'autres points des sécantes de contact que ceux I et L.

Il n'en serait plus de même si, au lieu de deux tangentes et un point ou de deux points et une tangente, on s'était donné, à la fois, soit trois tangentes, soit trois points; car chaque paire de ces tangentes ou de ces points fournissant, au moyen des points I et L qui lui correspondent, deux nouvelles tangentes ou deux nouveaux points, on aurait, en tout, neuf tangentes

ou neuf points qui, pris six à six dans un certain ordre, appartiendraient aux quatre sections coniques distinctes qui résolvent le problème. On aurait donc ainsi une nouvelle solution des problèmes déjà résolus aux articles 418 et 424, laquelle donnerait lieu à des remarques non moins intéressantes que celles que nous avons eu occasion de faire alors. Comme il est facile d'y arriver au moyen de tout ce qui précède, nous les supprimerons, dans la crainte d'allonger par trop ce Chapitre, où il nous reste beaucoup de choses essentielles à dire.

Nouvelles propriétés de la section conique doublement tangente à une autre, et description de cette courbe par l'intersection continuelle de ses tangentes.

431. Les considérations qui viennent de nous occuper ne pouvant suffire pour résoudre les questions où l'on se donne deux tangentes et un point ou deux points et une tangente de la section conique au double contact, nous sommes naturellement amenés à exposer quelques nouveaux principes touchant les lignes du second ordre qui ont une sécante de contact commune; nous verrons, dans la suite, comment ces mêmes principes peuvent conduire simplement aux propriétés des foyers des sections coniques et à celles des polygones variables qui leur sont inscrits et circonscrits.

Soit O (*fig.* 64) le centre commun des deux cercles concentriques, projections des deux sections coniques au double contact que l'on considère; soit AB une corde quelconque inscrite à celui qui est extérieur, et touchant l'autre au point t, milieu de AB; soit enfin ACB un angle inscrit à la circonférence extérieure, et dont les côtés s'appuient aux extrémités A et B de la corde dont il s'agit; il est évident que, si l'on fait mouvoir cet angle de façon qu'il demeure toujours inscrit, et que ses côtés restent constamment parallèles à eux-mêmes, ou pivotent sur des points fixes P, P′ placés sur la sécante de contact, à l'infini, commune aux deux cercles, il est évident, dis-je, que la corde AB roulera, de son côté, sur la circonférence du cercle qui lui correspond.

Ces conséquences pouvant s'étendre, d'une manière analogue, au cas de deux sections coniques doublement tangentes (138), il en résulte un moyen très-simple de construire l'une des courbes par l'autre et par l'intersection continuelle de ses tangentes. Car AB (*fig.* 65) étant l'une de ces tangentes, terminée à la courbe extérieure, TT′ la sécante commune de contact, réelle ou idéale, si, d'un point quelconque C de cette courbe, on mène les droites CA et CB aux extrémités de la corde AB, elles couperont la direction de TT′

aux points P et P', qui seront tels, qu'en faisant mouvoir l'angle inscrit ACB de façon que ses côtés pivotent respectivement sur chacun de ces points, la corde AB, qui le sous-tend, demeurera, dans toutes ses positions, tangente à la section conique intérieure. Ce théorème, qui nous sera utile, peut s'énoncer ainsi :

Un triangle ABC *étant inscrit à une section conique quelconque, si on vient à le faire varier de façon qu'étant toujours inscrit, deux de ses côtés* CA, CB *pivotent constamment sur les points fixes* P *et* P', *pris arbitrairement sur leurs directions respectives ; le côté libre* AB *enveloppera, dans toutes ses positions, une autre section conique, ayant avec la première un double contact, réel ou idéal, suivant la droite* PP' *qui renferme les deux points fixes dont il s'agit.*

432. Il résulte de ce théorème, qu'ayant une fois construit, au moyen des deux points donnés P, P', un triangle quelconque ABC, on trouvera autant d'autres systèmes de points fixes que l'on voudra, qui donneront tous lieu à la même courbe ; car, en formant à volonté un nouveau triangle inscrit ABC' qui ait le côté AB en commun avec le premier, ses deux autres côtés AC', BC' iront rencontrer la droite indéfinie PP' aux points p et p', qui pourront être pris pour les nouveaux *pôles* ou points fixes, sans que la courbe ainsi construite varie : puisqu'en touchant AB comme la première, elle aura encore les points de contact T et T' en commun avec elle (191). La même chose résulte d'ailleurs de la projection ci-dessus de la figure.

Il est clair que l'un des points p, p' peut être choisi à volonté sur la droite PP', et que l'autre s'ensuit nécessairement au moyen de la construction qui précède. Or cette remarque conduit immédiatement au théorème sur les quadrilatères inscrits, déjà démontré de plusieurs manières différentes dans la Section II (180, 276, 287), et sur lequel il devient ainsi inutile d'insister davantage pour le moment.

433. Si l'on voulait, dans le cas ci-dessus, déterminer, pour chaque position de la tangente mobile AB, le point t où elle touche la courbe d'enveloppe, on y parviendrait aisément au moyen des points fixes P, P' qui dirigent le mouvement de l'angle ABC; car, dans la projection (*fig.* 64) de cette courbe et de la proposée suivant des cercles concentriques, le point t occupant le milieu de la corde AB, si l'on mène par les extrémités de cette corde les droites BP, AP' parallèles aux côtés AC et BC de l'angle correspondant C, et concourant par conséquent avec eux sur la sécante de contact à l'infini, elles donneront lieu au parallélogramme ACBR, dont la diagonale CR passera par le point t dont il s'agit. Tirant donc, dans la *fig.* 65, les droites AP' et BP,

elles se croiseront en un point R de la droite Ct qui renferme le point de contact de AB avec l'enveloppe.

434. La proposition de l'article 431 donne évidemment lieu à la réciproque suivante, qui pourrait d'ailleurs se démontrer de la même manière :

Un triangle ABC *étant inscrit à une conique, si on vient à le faire varier de telle sorte que, demeurant toujours inscrit à la même courbe, l'un,* AB, *de ses côtes enveloppe continuellement une autre conique ayant un double contact avec la première suivant la direction de* TT', *tandis qu'un autre côté quelconque* AC *pivote sans cesse sur un point fixe* P *placé sur cette direction ; le dernier côté* BC *du triangle pivotera aussi constamment sur un troisième point fixe* P' *placé, de même que le premier, sur la direction* TT' *dont il s'agit.*

Description de la section conique doublement tangente à une autre par le mouvement continu d'un point.

435. Supposons maintenant qu'on circonscrive à la courbe proposée un triangle *abc*, dont les côtés touchent cette courbe aux sommets du triangle inscrit ABC ; il est visible que, dans le mouvement de ce dernier triangle, les sommets *a* et *b*, qui sont les pôles respectifs des cordes de contact AC et BC, décriront des droites OM et OM', polaires (195) des points fixes P et P', et se rencontrant au point O, pôle de la sécante de contact TT' des deux sections coniques ci-dessus ; quant au dernier sommet *c*, il décrira évidemment une troisième section conique, polaire réciproque (231) de celle qu'enveloppe AB dans son mouvement, et ayant même sécante de contact TT' avec la proposée.

On s'en rendra raison *à priori*, en se reportant à la *fig.* 64, projection de celle qu'on considère; car, tandis que la corde mobile AB roule sur un cercle concentrique au proposé, les sommets *a* et *b* du triangle circonscrit *abc* décrivent des diamètres OM, OM', et le dernier sommet *c* parcourt, en vertu du même mouvement, un troisième cercle concentrique aux deux autres.

Comme les points P, P' (*fig.* 65), qui dirigent le mouvement des côtés de l'angle inscrit ACB, sont arbitraires, les directrices OM et OM', polaires de ces points par rapport à la courbe donnée, le sont également; on peut donc déduire, de ce qui précède, ce nouveau théorème :

Si un triangle abc, *perpétuellement circonscrit à une section conique quelconque, est assujetti à avoir constamment deux de ses sommets* a *et* b *sur deux directrices droites* OM *et* OM', *d'ailleurs arbitraires, le troisième sommet* c *par-*

courra, dans toutes ses positions, une autre section conique, ayant un double contact avec la première, suivant la droite qui est la polaire du point d'intersection O des deux directrices.

Cette proposition est évidemment susceptible d'une réciproque analogue à celle de l'article 434, dont elle pourrait d'ailleurs se déduire directement au moyen de la théorie des pôles.

436. De même qu'il y a une infinité de systèmes de points directeurs P et P', *p* et *p'*, etc., à l'aide desquels on peut tracer la courbe enveloppe de AB, de même aussi il y a une infinité de systèmes de directrices correspondantes OM et OM', propres à construire une même courbe par le mouvement du sommet *c*, mais tous ces systèmes ont évidemment le point O commun. On voit, au surplus, ce qu'il y aurait à faire si, une directrice quelconque étant donnée, on voulait trouver celle qui lui est conjuguée ; et l'on remarquera, à ce sujet, qu'à une même directrice OM, ou à un même pôle P, il en correspond toujours deux autres qui lui sont respectivement conjugués, selon la façon dont on construit les triangles ABC, *abc* au moyen de ce premier pôle et de cette première directrice.

Cas où la courbe décrite se réduit à un point ou dégénère en des droites.

437. La section conique qu'enveloppe le côté AB du triangle inscrit ABC se réduira évidemment (192) au point O, pôle de PP', quand les deux points P et P' seront tels, que « la polaire de l'un quelconque d'entre eux passera » par l'autre. » Pareillement, quand les deux directrices OM, OM' auront été choisies de façon que chacune d'elles passe réciproquement par le pôle de l'autre, la section conique parcourue par le sommet *c* du triangle mobile et circonscrit *abc* dégénérera en une simple ligne droite (192), qui sera la sécante de contact elle-même, ou la polaire du point d'intersection O de ces directrices.

Il résulte de là des paradoxes assez étranges ; car, puisque l'une et l'autre des deux courbes engendrées, soit par la droite AB, soit par le point *c*, doivent avoir un double contact, suivant la ligne PP', avec la section conique proposée, on est conduit à admettre qu'une droite et un point peuvent avoir un double contact avec une section conique, ce qui parait tout à fait absurde.

Mais, en premier lieu, on peut très-bien concevoir qu'une section conique doublement tangente en T et T' à une autre se réduise à une portion finie ou infinie de ligne droite, quand c'est une ellipse ou une parabole, et à deux

portions infinies et non contiguës d'une pareille droite, quand c'est une hyperbole : il suffit, pour cela, de supposer que, l'un des axes de la courbe demeurant le même, l'autre devienne infiniment petit, de façon que la courbe s'aplatisse le long du premier.

En second lieu, un point se trouvant dans l'intérieur d'une section conique, peut très-bien être censé avoir un double contact idéal avec elle, suivant la polaire qui lui correspond, pourvu qu'on le considère lui-même comme une section conique infiniment petite; au contraire, s'il est extérieur à cette courbe, la sécante de contact ou polaire correspondante donnant deux points d'intersection réels, il faudra nécessairement le regarder comme le sommet d'une hyperbole qui s'est confondue avec les deux tangentes issues de ce point, ou avec ses asymptotes; et en effet, dans ce cas, toutes les tangentes à l'hyperbole passent (184, note) par le sommet de l'angle de ces asymptotes, qui représente ainsi les deux sommets réels de la courbe réunis en un seul.

Quand le système des tangentes qui enveloppent une section conique vient à passer par un même point, on ne doit donc pas toujours regarder la courbe comme une section conique qui s'est elle-même réduite à ce point; car ce qui précède prouve qu'elle peut, dans certains cas, se réduire aussi au système de deux droites passant par ce point, et qu'il n'y a de différence entre les deux cas, qu'en ce que dans le premier ces droites sont imaginaires, et qu'elles sont réelles dans le second : les conditions particulières du système primitif et la loi de continuité suffiront d'ailleurs pour lever les doutes dans chaque cas.

Remarques relatives aux théorèmes qui précèdent, et extension de ces mêmes théorèmes.

438. Puisque, dans le théorème ci-dessus (431), la courbe qu'enveloppe le côté variable et mobile AB (*fig.* 65) a un double contact avec la section conique proposée à laquelle est incrit ce côté, elle doit jouir, à l'égard de celle-ci, de toutes les propriétés exposées dans les précédents articles sur les sections coniques au double contact : ainsi, par exemple, si l'on considère un second côté A'B' tangent à la courbe d'enveloppe, les droites AB', BA', qui joignent les extrémités, d'espèces différentes, de ces côtés, devront concourir constamment en un point L de la sécante de contact TT' (424).

J'ai dit d'*espèces différentes*, car il est facile de voir, en se reportant à la *fig.* 64 projection de celle que l'on considère, qu'en effet il n'y a que les droites qui appartiennent à des extrémités différentes, quant au mode particulier de génération de la courbe enveloppe, qui puissent jouir de la pro-

priété dont il s'agit. Les deux autres droites AA', BB', qui joignent des positions homologues des sommets A et B, concourent évidemment en un point I, qui, conjointement avec le point K d'intersection des deux côtés générateurs AB, A'B', appartient à la polaire de L passant par le pôle commun O de la sécante de contact des deux courbes.

Des remarques analogues sont évidemment applicables au théorème de l'article 435.

439. Les considérations qui viennent d'être présentées, en dernier lieu, sur les sections coniques à double contact, conduisent immédiatement aux théorèmes suivants, qui sont des extensions de ceux des articles 431, 434 et 435 :

Si un triangle, variable de forme, est assujetti à demeurer inscrit à une même section conique, tandis que l'un de ses côtés pivote constamment autour d'un point fixe quelconque, et qu'un autre de ces côtés roule en enveloppant une seconde section conique doublement tangente à la première, le dernier côté du triangle enveloppera lui-même, dans son mouvement, une troisième section conique ayant un double contact avec la première.

Pareillement :

Si un triangle, variable de forme, demeure perpétuellement circonscrit à une section conique, et qu'en même temps l'un de ses sommets soit assujetti à parcourir une droite quelconque donnée, tandis qu'un autre sommet parcourt une seconde section conique doublement tangente à la première, le troisième sommet décrira également une troisième section conique ayant un double contact avec la première.

La démonstration de l'une de ces propriétés se ramenant immédiatement à celle de l'autre, au moyen de la théorie des pôles (435), il suffira simplement de s'occuper de celle de la première.

Soit *abc* (*fig.* 66) le triangle, variable de forme, assujetti à demeurer inscrit dans l'une des deux sections coniques dont il s'agit; soit *p* le point sur lequel doit pivoter le côté *ab*, tandis que le côté *bc* roule sur l'autre section conique, ayant un double contact avec la première suivant ML; il s'agit de prouver que, dans ce mouvement, le dernier côté *ac* du triangle mobile enveloppera une troisième section conique doublement tangente à celle *abc* dans laquelle il est inscrit.

Traçons la droite indéfinie O*p*, qui passe par le point fixe *p* et par le pôle O de la sécante de contact ML, commune aux deux courbes directrices; par le sommet *b* du triangle mobile, opposé au côté *ac*, menons *bb'* passant par

le point L, pôle commun (322) de O*p* par rapport aux deux courbes, et rencontrant de nouveau celle à laquelle est inscrit le triangle *abc* en *b'*; le troisième côté *ab'* du triangle *abb'* sera constamment dirigé (437) vers un troisième point fixe P, pôle de la droite L*p*, et qui se trouve placé sur la direction de O*p*, polaire du point L.

Maintenant, si l'on achève le triangle inscrit *ab'c*, il sera facile de prouver que, dans le mouvement auquel il est assujetti, le côté *b'c* devra se diriger constamment vers un dernier point fixe P' situé sur la sécante de contact ML commune aux deux courbes proposées. En effet, le triangle *bcb'*, inscrit à l'une de ces courbes, a déjà un de ses côtés *bb'* assujetti à pivoter sur un point fixe L placé sur cette sécante, et son second côté *bc* demeure, par hypothèse, tangent à l'autre de ces mêmes courbes; donc (434) le troisième côté *b'c* de ce triangle doit aussi pivoter sur un point P' de la sécante de contact ML. Or il suit de là que le triangle *ab'c*, en demeurant inscrit à la courbe extérieure, aura constamment deux de ses côtés *ab'*, *b'c* dirigés vers des points fixes P et P'; donc enfin (431) le troisième côté *ac* de ce triangle roulera en enveloppant une section conique doublement tangente à cette courbe suivant la droite qui joint les deux points fixes P et P', comme il s'agissait de le démontrer.

440. Supposons que, du point fixe *p*, l'on mène deux tangentes *p*B, *p*D à la section conique qu'enveloppe *bc* dans son mouvement, elles rencontreront la section conique extérieure aux points respectifs B et A, C et D : or, en suivant attentivement le mouvement de l'angle *b* du triangle mobile *abc*, on verra qu'il existe deux positions, C et B, de son sommet, pour lesquelles cet angle devient nul ainsi que le côté *ac* qui lui est opposé ; donc alors ce côté est tangent en D et en A à la section conique *abc*, et par conséquent la droite AD est la sécante de contact de cette section conique et de celle qu'enveloppe *ac*, laquelle, d'après ce qui précède, doit renfermer aussi les points P et P'.

D'après la remarque déjà faite art. 438, on obtiendrait d'ailleurs immédiatement autant de points qu'on voudrait de la sécante de contact AD dont il s'agit, en considérant le côté *ac* dans deux de ses positions quelconques ; car, en joignant par des droites les extrémités de ces côtés qui sont d'espèces différentes, ou qui ne proviennent pas des mêmes côtés *ab*, *bc* du triangle mobile *abc*, ces droites iraient concourir constamment en des points appartenant à cette sécante de contact.

Comme à une même position du sommet *b*, sur la courbe extérieure, cor-

respondent toujours deux tangentes *bc*, *bc'* à l'autre, il existe nécessairement aussi deux sections coniques distinctes relativement à ce sommet, l'une enveloppée par la droite *ac*, l'autre par la droite *ac'* : la première touchant la section conique extérieure aux points A et D, la seconde la touchant aux points B et C opposés à ceux-ci sur les tangentes AB et CD. On voit, en effet, que, dans aucune de ses positions, le triangle mobile *abc* ne pourra se confondre avec celui *abc'* qui répond à la seconde tangente *bc'*, de sorte qu'il appartient nécessairement à un autre mode de génération et à une autre courbe ; c'est ce qu'on pourrait, au reste, démontrer directement en répétant sur ce triangle le raisonnement qui a déjà été fait sur le premier. Ainsi donc il est très-essentiel, lorsqu'il s'agit de décrire les sections coniques enveloppes, de ne point confondre entre eux ces deux modes de génération, et de bien suivre attentivement le mouvement de l'angle *abc*.

441. Supposons que, dans le premier des théorèmes de l'article 439, le point *p*, au lieu d'être quelconque, se trouve placé (*fig.* 67) sur la section conique que touche *ab* dans le mouvement du triangle *abc* ; alors les points A et D (*fig.* 66) se confondront en un seul A (*fig.* 67), et la sécante de contact PP' deviendra une tangente commune aux deux courbes qui lui correspondent ; donc la section conique, enveloppe du côté *ac*, sera osculatrice du troisième ordre de celle *acb* au point A, où elle est coupée par la tangente en *p* à l'autre section conique donnée ; et, comme il y aura encore deux séries distinctes de triangles variables *abc*, il y aura aussi deux sections coniques osculatrices, l'une au point A dont il s'agit, l'autre au second point B d'intersection de la tangente en *p* avec la courbe qui contient déjà A.

Je crois assez inutile d'entrer dans de nouveaux détails relativement au second des théorèmes de l'article 439, lequel donne lieu à des remarques entièrement analogues, et qui peuvent se déduire immédiatement des premières à l'aide de la théorie des pôles et polaires réciproques. Si l'on suppose par exemple, dans le théorème cité, que la droite qui dirige le mouvement de l'un des sommets du triangle mobile, au lieu d'être entièrement arbitraire, soit tangente à la courbe que décrit le deuxième sommet, la section conique parcourue par le troisième, ou par le sommet libre, sera également osculatrice du troisième ordre de celle sur laquelle s'appuient les côtés du triangle, en un point qu'il est très-facile de reconnaître, etc.

Construction de la section conique doublement tangente à une autre, quand on se donne, soit un point et deux tangentes, soit une tangente et deux points appartenant à son périmètre.

442. Les corollaires qui précèdent nous fournissent un moyen très-simple de résoudre les questions dont il a été parlé art. 430.

Par exemple : qu'il s'agisse de *mener une section conique doublement tangente à une section conique décrite, qui, touchant deux droites données, passe en outre par un point donné*. En admettant que *abc* (*fig.* 67) soit la section conique décrite, et *p* le point donné, tout consistera évidemment (424) à trouver la tangente AB qui correspond à ce point; or c'est à quoi l'on parviendra aisément au moyen de ce qui précède.

En effet, par hypothèse, on a deux tangentes *ab*, *a'b'* de la section conique qui doit avoir un double contact avec la proposée et passer par le point *p*, et, par suite, on a deux positions *abc*, *a'b'c'* d'un triangle mobile, dont le côté *ac* ou *a'c'* enveloppe (441) une section conique osculatrice de la proposée au point A qui appartient à la tangente cherchée; donc enfin tout se réduit à trouver le point d'osculation A au moyen de *ac*, *a'c'*; ce qui est facile, puisque les droites *ac'*, *ca'*, qui joignent leurs extrémités d'espèces différentes, doivent concourir (438) en un point *l* de la tangente ou sécante de contact relative à ce point.

Au point *l*, ainsi obtenu, correspondent en général deux tangentes de la section conique proposée *abc*; donc il existe aussi, en général, deux tangentes AB pour le point donné, et par conséquent deux sections coniques distinctes remplissant les conditions du problème ci-dessus proposé, lesquelles correspondent aux deux triangles *abc*, *a'b'c'* qu'on vient d'examiner en particulier, et qui sont determinés au moyen des tangentes *ab*, *a'b'* et du point donné *p*.

Cela posé, puisqu'il y a deux triangles analogues à *abc*, pour chaque tangente donnée, selon qu'on joint le point *p* avec l'une ou l'autre de ses extrémités, on aura quatre triangles pareils à considérer, et, en combinant deux par deux ceux de ces triangles qui ne correspondent pas à une même tangente, il en résultera quatre paires de triangles, et par conséquent quatre paires de côtés *ac*, *a'c'*; d'où il semblerait naturel de croire qu'il existe aussi quatre paires de sections coniques touchant doublement la proposée; mais il est évident que, tandis qu'une paire de triangles, tels que ceux *abc*, *a'b'c'*, donne l'extrémité A de la tangente en *p*, la paire des deux triangles restants doit donner aussi l'autre extrémité B de cette tangente (441); en sorte que

le nombre total des solutions distinctes du problème se réduit, en dernière analyse, à quatre seulement, puisqu'on sent bien d'ailleurs qu'à une même tangente en p il ne peut correspondre qu'une seule section conique ayant un double contact avec la proposée, et qui touche en même temps les droites ab, $a'b'$.

Pour déterminer entièrement la section conique dont il s'agit, il faudra appliquer aux trois tangentes ab, $a'b'$, AB et à la section conique donnée abc les constructions relatives au problème de l'article 424. Mais, comme les sections coniques qui en résultent, en général, sont au nombre de quatre, et qu'il n'y en a qu'une seule d'entre elles qui touche réellement la tangente AB au point p, il sera nécessaire de distinguer : à cet effet, on remarquera que l'on connait déjà un point L de la sécante de contact ML qui lui correspond ; car, d'après ce qui a été dit ci-dessus (439), le point L (*fig.* 66 et 67) est, par rapport à la section conique donnée, le pôle de la droite PM qui passe par le point donné p et par le point P devenu, pour le cas actuel, le pôle de la tangente AB. Ainsi on ne devra admettre, parmi les quatre sécantes de contact que donnent (424) les tangentes ab, $a'b'$ et AB, que celle qui passe par le point L dont il s'agit.

On obtiendra d'ailleurs de suite un second point L' (*fig.* 67) de cette sécante de contact, en réunissant (440), par de nouvelles droites $b'a$, ba', chacune des extrémités b', b des tangentes données avec les extrémités a, a qui leur sont opposées; mais il faudra avoir soin de prendre, pour les premières extrémités, celles b, b' qui ont servi à tracer les droites bpc, $b'pc'$ de la combinaison dont on s'occupe (*) : l'intersection des droites $b'a$, ba', obtenues de cette manière, donnera le point L' demandé, lequel évidemment appartiendra à la fois aux deux sécantes de contact des sections coniques doublement tangentes à la proposée, et qui sont relatives à cette même combinaison.

Enfin, en traçant les nouvelles droites aa', bb' qui joignent, dans un autre ordre, les extrémités qui appartiennent aux deux tangentes proposées, elles donneront, par leur intersection en L'', un point appartenant à la fois aux sécantes de contact des deux sections coniques qui répondent aux triangles de la seconde combinaison.

(*) En effet, tous les raisonnements qui précèdent et sont relatifs à cette combinaison supposent que les points a et a' d'une part, b et b' de l'autre, sont de *même espèce* (438), ou appartiennent au même mode de mouvement continu de la tangente ab autour de la courbe qu'on cherche.

443. Si, au lieu de deux tangentes et d'un point, on se donnait deux points et une tangente de la section conique au double contact, on pourrait rechercher d'abord une seconde tangente de la courbe (430); au moyen de quoi le problème serait ramené directement à celui qui précède, pourvu qu'on ait soin ensuite de n'admettre que les systèmes de solutions qui répondent exactement aux données primitives, ce qui est assez facile pour que nous puissions nous dispenser d'entrer dans de plus longs développements à ce sujet.

On pourrait également, dans le cas où l'on se donne un point et deux tangentes, se procurer de nouvelles tangentes au moyen de celles AB déjà trouvées, comme il a été expliqué ci-dessus, car on aurait tout ce qu'il faut pour construire immédiatement, par la règle seule (213), les quatre sections coniques distinctes qui résolvent le problème.

Réflexions sur les diverses constructions qui précèdent.

444. Toutes les solutions qui viennent de nous occuper en dernier lieu ne sont applicables qu'au cas où les tangentes et les points donnés sont intérieurs à la courbe proposée; s'ils lui étaient à la fois extérieurs, il faudrait avoir recours à d'autres procédés, faciles à découvrir au moyen de ce qui précède et de la théorie des pôles (423). Le problème ne cesse, suivant la remarque déjà faite plus haut (420), d'avoir des solutions réelles, qu'autant que certaines tangentes ou certains points donnés sont entièrement extérieurs à la section conique proposée, tandis que le contraire a lieu pour d'autres; et, comme nous n'avons constamment employé que des constructions purement linéaires pour le cas où la section donnée est supposée en même temps décrite, il en résulte que nous avons complétement résolu ce problème général :

Une section conique étant donnée et décrite sur un plan, mener, avec la règle seulement, une autre section conique qui ait un double contact avec elle, et, de plus, touche des droites ou passe par des points, les uns et les autres donnés de position sur le plan de la figure, et au nombre de trois seulement.

445. Enfin, les observations déjà plusieurs fois faites dans le cours de ces recherches, et notamment celles de l'article 407, étant directement applicables aux diverses propositions qui font le sujet de ce Chapitre, les constructions auxquelles nous sommes parvenus embrassent, dans leur généralité, la solution de toutes les questions particulières, analogues à celles qui précèdent, qu'on pourrait avoir à se proposer sur les sections coniques qui ont

un double contact ou qui sont osculatrices du troisième ordre : ainsi elles conviennent parfaitement au cas où les sections coniques cherchées doivent être des hyperboles ou des paraboles, dont on se donne soit des asymptotes, soit des parallèles aux diamètres, concourant avec eux en un point de la courbe situé à l'infini, etc.

Cependant ces mêmes constructions cessent d'être applicables aux cas particuliers de la question générale ci-dessus, pour lesquels deux des tangentes ou des points donnés doivent être à la fois imaginaires; et il resterait également à résoudre celui où, la courbe cherchée devant être osculatrice du troisième ordre de la proposée, on se donne seulement un point et une tangente pour la déterminer. Mais ces différents cas exigeraient de nouvelles recherches et des principes tout autres que ceux mis en usage jusqu'ici pour résoudre la question générale, ce qui allongerait singulièrement ce Chapitre, et ne présenterait pas d'ailleurs un assez grand intérêt.

SECTION IV.

DES ANGLES ET DES POLYGONES.

CHAPITRE PREMIER.

DES ANGLES CONSTANTS OU VARIABLES SUIVANT CERTAINES LOIS, DONT LE SOMMET S'APPUIE AU FOYER, AU PÉRIMÈTRE DES SECTIONS CONIQUES, OU EN UN POINT QUELCONQUE DE LEUR PLAN.

446. Quoique les propriétés des foyers, et celles des angles d'une ouverture donnée ou constante, semblent ne pas faire partie de celles que nous avons appelées *projectives*, et qu'elles soient, en quelque sorte, étrangères au but réel de cet ouvrage, elles découlent néanmoins d'une manière si simple des principes qui en font la base, et particulièrement de ceux qui ont été exposés dans le précédent Chapitre, que je ne crois pas qu'aucune autre théorie géométrique puisse y conduire d'une manière à la fois plus directe et plus facile.

On n'en sera nullement étonné, si l'on considère que les propriétés projectives des figures sont nécessairement les plus générales de celles qui peuvent leur appartenir; en sorte qu'elles doivent comprendre, comme simples corollaires, toutes les autres propriétés ou relations particulières de l'étendue : déjà on en a rencontré un grand nombre d'exemples dans le cours de cet ouvrage, et notamment à la fin du Ier Chapitre de la IIIe Section. En nous occupant spécialement, dans celui-ci, des relations d'angles qui peuvent appartenir aux figures, relations non moins importantes et non moins nombreuses que celles qui concernent la simple disposition des points et des lignes, nous en déduirons des méthodes souvent utiles dans les arts, pour la description des sections coniques, et nous serons ainsi amenés à exposer quelques-uns des beaux résultats auxquels sont parvenus d'anciens géomètres; résultats presque oubliés de nos jours, par suite de l'entraînement général des esprits vers les applications de l'Analyse algébrique.

Propriétés principales des foyers des sections coniques.

447. Nous établirons, en premier lieu, un théorème fort beau et fort général, énoncé d'abord par Mac-Laurin (*), et qui a été reproduit dernièrement par M. de Prony (**), dans un article d'Analyse qui a pour objet le tracé en grand des voûtes *elliptiques, paraboliques*, etc.

Sur le grand axe TT' (*fig.* 68) d'une section conique, comme diamètre, soit décrite une circonférence de cercle qui, par conséquent, touchera la courbe aux extrémités T et T' de cet axe; AB étant une tangente quelconque de la section conique, terminée à la circonférence du cercle, soit inscrit à ce cercle le triangle ABC, dont le côté AC passe par le centre O commun aux deux courbes, l'autre côté BC rencontrera le diamètre de contact TT' en un point F, qui demeurera invariable (434) quelle que soit la tangente AB; d'ailleurs l'angle en B, opposé au diamètre AC du cercle, est droit; donc :

Ayant déterminé, une fois pour toutes, le point F, *comme il vient d'être dit, si l'on fait mouvoir l'équerre ou angle droit* ABC, *de façon que l'un,* BC, *de ses côtés passe constamment par ce point, tandis que le sommet* B *parcourt la circonférence décrite sur le grand axe de la courbe, comme diamètre, l'autre côté* AB *de l'équerre demeurera perpétuellement tangent à la section conique.*

448. Cette description des sections coniques par l'enveloppe de leurs tangentes n'est, comme on voit, qu'une conséquence très-simple de celle exposée art. 431, et on pourrait aisément l'étendre au cas où l'on remplacerait l'équerre par un angle constant quelconque, au moyen du principe beaucoup plus général de l'article 439; tout consiste, en effet, à substituer au point O un cercle quelconque concentrique au premier, pour faire rouler sur lui le côté AC qui sous-tend l'angle B. On voit même que, dans ce cas, le point F et le cercle auquel est inscrit le triangle ABC pourraient être arbitraires, pourvu cependant que ce dernier eût un double contact, réel ou idéal, avec la courbe à décrire. Mais revenons à notre première description.

449. Comme, avec la même tangente AB de la courbe, on peut former deux triangles ABC, ABC' qui remplissent les conditions ci-dessus prescrites, il y a aussi deux points F, F', placés symétriquement de part et d'autre du centre O sur le diamètre principal TT', qui jouissent de la propriété énoncée;

(*) *Geometria organica, sive descriptio linearum curvarum universalis*, sect. III, p. 102.

(**) Xe Cahier du *Journal de l'École Polytechnique*.

or il n'est pas difficile de reconnaître que ce sont les *foyers* mêmes de la section conique.

En effet, pour obtenir le point de contact t de la tangente AB, il faudra (433) tracer les droites AF, BO, puis joindre le sommet C du triangle correspondant ABC au point R, intersection de ces droites, par une nouvelle droite CR qui ira concourir au point demandé. Si donc on tire le *rayon vecteur* Ft, il sera parallèle à la base AC du triangle ABC, car la droite BO, qui part du sommet opposé B, divise, par hypothèse, cette base en deux parties égales au point O. Mais on prouverait de même que le rayon vecteur F't, correspondant à l'autre point fixe F' et à t, est parallèle au diamètre BC' qui appartient à la seconde extrémité B de la corde AB du cercle; donc *les deux rayons vecteurs dont il s'agit sont également inclinés sur cette corde, et par conséquent sur la tangente de la courbe;* propriété connue des foyers, et d'où l'on déduit sans peine celle par laquelle on a coutume de les définir dans les Traités des sections coniques.

Que l'on prolonge, en effet, la distance FB d'une quantité BK égale à elle-même; d'après ce qui précède, la direction du rayon vecteur F't ira passer par le point K; donc Ft sera égal à tK, et par conséquent la somme des rayons vecteurs Ft, F't sera égale à F'K pour le cas actuel où la courbe est une ellipse; mais F'K = BC' = TT', puisque le quadrilatère BC'F'K est visiblement un parallélogramme; donc enfin :

Dans l'ellipse, la somme des rayons vecteurs, correspondants à un point quelconque de la courbe, est constante et égale au grand axe de cette courbe.

Il est visible que, dans le cas où F et F' seraient extérieurs à TT', c'est-à-dire pour l'hyperbole, ce ne serait plus la somme, mais la différence des rayons vecteurs, qui serait constante et égale au grand axe, ou à l'axe réel de la courbe.

Quelle que soit d'ailleurs l'espèce particulière de la courbe, on conclut sans peine, de ce qui précède, que les deux rayons vecteurs, la tangente et la normale, relatifs à un point quelconque de cette courbe, forment (199) un faisceau harmonique; ainsi donc, trois de ces droites étant données, la quatrième s'ensuit nécessairement par une construction purement linéaire (155).

450. Le point F ci-dessus étant donc un foyer de la section conique, on conclut, du théorème de l'article 447, cette réciproque qui a été connue des anciens :

Si, de l'un des foyers d'une section conique, on abaisse des perpendiculaires

sur toutes les tangentes, les pieds de ces perpendiculaires appartiendront à la circonférence décrite sur le grand axe de la courbe comme diamètre.

Au moyen de la remarque de l'article 448, il serait facile d'étendre ce théorème au cas où les droites abaissées du foyer, au lieu d'être perpendiculaires sur les tangentes, formeraient avec elles un même angle d'ailleurs quelconque; mais alors la circonférence, lieu des pieds de ces droites, toucherait la courbe en deux points autres que les extrémités de l'axe principal de cette courbe.

D'ailleurs ces propriétés du foyer des sections coniques se modifient, pour le cas de la parabole, d'une manière qu'il est aisé de reconnaître à l'aide de la loi de continuité : en effet, alors l'une des extrémités T ou T' du grand axe passe à l'infini, aussi bien que la tangente qui lui correspond et le centre O de la courbe; une portion tout entière du cercle décrit sur TT', comme diamètre, dégénère en une ligne droite, à l'infini, qui se confond (95) avec la tangente dont il s'agit, tandis que l'autre portion de ce cercle se confond, au contraire, avec la tangente qui appartient au sommet opposé du grand axe, et continue ainsi à jouir des mêmes propriétés qu'auparavant. Quant aux foyers de la courbe, on voit qu'un seul d'entre eux subsiste à distance donnée, et que l'autre s'éloigne à l'infini sur le grand axe; en sorte qu'il peut être censé confondu soit avec le centre, soit avec le sommet à l'infini de la courbe.

451. Supposons que, dans le cas général de la *fig.* 68, l'on prolonge la droite AF jusqu'à sa nouvelle intersection en B' avec le cercle décrit sur le grand axe de la courbe comme diamètre; l'angle AB'C, inscrit à la demi-circonférence, étant droit, B'C sera (447) une seconde tangente à cette courbe, en un point t' pour lequel le rayon vecteur Ft' sera encore parallèle au diamètre AC du cercle, de même que l'est déjà (449) celui Ft qui correspond à la première tangente AB; donc ces deux rayons vecteurs se confondront, quant à la direction, en une même droite tt', corde de contact ou polaire du point P où se coupent les tangentes AB et B'C. Mais, dans le triangle APC, les droites CB, AB' sont les perpendiculaires abaissées des sommets C et A sur les côtés opposés; donc la droite PF est aussi perpendiculaire sur le troisième côté AC du triangle (*), et par conséquent sur sa parallèle tt'. Or

(*) Ceci suppose, d'après un théorème connu, que les trois hauteurs d'un triangle quelconque se coupent en un même point : or la chose est facile à prouver directement; car, si sur chaque côté du triangle, comme diamètre, on décrit un cercle, il renfermera les pieds des perpendiculaires

de là suit cette autre propriété des foyers des sections coniques, qui est due, je crois, à de Lahire (*) :

Dans toute section conique, la ligne droite qui joint le foyer au pôle d'une sécante quelconque passant par ce foyer est perpendiculaire à cette sécante.

452. Il est aisé de s'assurer que, pour le cas de la parabole, l'angle APC des deux tangentes aux extrémités de la corde *tt'* est également droit ; en effet, alors le point A passe à l'infini (450), en même temps que F' et O, c'est-à-dire que B'F devient parallèle à la tangente AB ; donc on peut conclure ce corollaire également dû à de Lahire (**) :

Dans la parabole, les sommets de tous les angles droits, circonscrits à la courbe, sont sur une même droite (195), *polaire du foyer de cette courbe.*

Cette droite est ce qu'on appelle la *directrice* de la parabole, et il n'est pas difficile d'en découvrir les diverses propriétés, au moyen de ce qui précède. Dans le cas général d'une section conique quelconque, la polaire de l'un des foyers se nomme également la directrice de la courbe relative à ce foyer ; il parait plus convenable de la désigner en général par l'expression de *polaire focale*, qui en rappelle la nature d'une manière plus complète et plus absolue que le mot commun et générique de *directrice*, et c'est ainsi que nous en userons dans ce qui va suivre.

Du foyer commun des sections coniques, considéré comme centre de projection ou d'homologie.

453. Le théorème démontré ci-dessus (451) va nous conduire à une propriété bien caractéristique des foyers des sections coniques, et qui en rattache immédiatement la théorie à celle des *centres d'homologie* ou points de concours des tangentes communes.

Supposons, en effet, que deux sections coniques tracées sur un même plan, mais d'ailleurs quelconques, aient un foyer commun ; d'après le théorème cité, toute transversale, menée par ce foyer dans le plan des deux courbes, sera telle, que les pôles correspondants seront situés sur une autre droite perpendiculaire à la première et passant par le foyer dont il s'agit. Or cette propriété ne convient qu'aux seuls points de concours des tangentes communes aux sections coniques (258 et 367) ; donc, en effet :

abaissées sur les deux autres côtés ; en sorte que les trois perpendiculaires seront les cordes deux à deux communes aux trois cercles ainsi construits, lesquelles se couperont nécessairement en un même point (71).

(*) *Sectiones conicæ, etc.*, in-fol., lib. 8, Prop. XXIII.

(**) *Ibid.*, Prop. XXVI.

Le foyer commun au système de deux sections coniques, tracées sur un même plan, est pour elles un centre d'homologie ou de projection, c'est-à-dire un point de concours (ici nécessairement idéal) des tangentes communes aux deux courbes.

D'après l'article 293, on peut encore, si l'on veut, considérer les deux courbes comme la projection, sur un plan unique, de deux sections planes faites dans une même surface conique du second ordre, qui aurait pour sommet un point représenté, en projection, par le foyer commun des deux courbes dont il s'agit; c'est-à-dire, en un mot, que ce foyer jouit, à l'égard de ces courbes, de toutes les propriétés qui font le sujet du Chapitre Ier de la IIIe Section : or cette remarque conduit à un grand nombre d'applications utiles et curieuses.

454. Il en résulte, en premier lieu, que, quand deux sections coniques situées sur un même plan ont un foyer commun, on peut déterminer directement (292, 305, etc.) tout ce qui concerne leur intersection mutuelle et leurs tangentes communes, sans employer autre chose que la simple ligne droite dans le cas où, les sections coniques n'étant pas décrites, mais seulement données par certaines conditions, on connait un seul cercle (353) tracé sur le plan de la figure et le centre de ce cercle.

455. Lorsque trois cercles quelconques sont donnés sur un plan, le centre de l'un de ceux qui sont tangents à la fois à ces trois cercles doit, comme l'on sait, se trouver à l'intersection commune de trois sections coniques, dont les foyers sont précisément les centres des cercles donnés; on pourra donc, d'après ce qui précède, obtenir directement, au moyen de la théorie des figures homologiques, le centre de chacun des cercles tangents aux proposés.

Cela donnerait lieu, au besoin, à une nouvelle solution du problème du cercle tangent à trois autres, qui ne le céderait en rien, du côté de l'élégance, à celles qui ont été exposées au Chapitre III de la IIe Section, et cela peut en même temps servir à expliquer clairement pourquoi la solution du problème se réduit finalement au premier degré, et peut s'exécuter à l'aide de la simple ligne droite, quoiqu'il y ait huit cercles distincts tangents aux proposés. Du reste, les constructions qu'on obtiendrait ainsi demeureraient également applicables aux cas particuliers où les cercles proposés se réduiraient, en tout ou en partie, à des points, à des droites, etc.

456. Il résulte encore de ce qui précède que, si le centre d'homologie de deux sections coniques tracées sur un plan est le foyer de l'une, il sera en

même temps le foyer de l'autre; car, jouissant de la propriété ci-dessus (451) par rapport à la première de ces courbes, il en jouira de même (367) par rapport à la seconde. Pareillement, si un nombre quelconque de sections coniques ont un foyer commun sur un plan, ce foyer peut être considéré comme le point de concours de deux tangentes à la fois communes à tout leur système, et, sous ce rapport, elles jouissent de propriétés aussi intéressantes que multipliées (400 et 402).

Enfin, si deux ou plusieurs sections coniques, ayant déjà un foyer commun, ont en outre même polaire focale (ou même directrice), elles auront un double contact (322), réel ou idéal, suivant cette polaire, qui ainsi sera une sécante commune de contact pour toutes les courbes. Ce foyer, cette polaire et ces deux courbes jouiront donc alors de toutes les propriétés qui font le sujet du dernier Chapitre de la IIIe Section, propriétés sur lesquelles je crois d'ailleurs inutile de revenir.

Cas où l'une des courbes est un cercle; conséquences qui en résultent pour la description des sections coniques dont le foyer est donné, etc.

457. Pour la circonférence du cercle, le foyer n'est évidemment autre chose que le centre même de la courbe, et on peut le regarder comme la réunion en un seul des deux foyers qui appartiennent en général aux sections coniques. Si donc l'on suppose qu'autour de l'un des foyers d'une section conique donnée, comme centre, avec un rayon arbitraire, on décrive une circonférence de cercle, elle aura ce foyer pour centre d'homologie ou de projection avec la section conique; en d'autres termes, elle pourra être considérée comme la projection, sur le plan de la figure, d'une section plane faite dans un cône du second degré, qui aurait la section conique proposée pour base et pour sommet un point de l'espace représenté, en projection, par le foyer que l'on considère (*).

Tel est donc le caractère du foyer des sections coniques; et ce caractère se conserve, comme on voit, en vertu du principe de continuité, même quand

(*) Cette remarque peut servir à simplifier la construction ci-dessus (455) du problème du cercle tangent à trois autres sur un plan. Il serait facile, au reste, d'étendre ces diverses considérations au cas où l'on remplacerait les cercles par des sphères quelconques: alors les sections coniques, lieux des centres, se changeraient en des surfaces du second ordre de révolution, ayant deux à deux un foyer commun, et se coupant (387), comme telles, suivant deux sections planes dont l'une nécessairement idéale : on voit ce qu'il y aurait à faire si le rayon du cercle ou de la sphère tangente était donné, ou si, en général, on connaissait une ligne ou une surface qui dût renfermer son centre.

on suppose le cercle infiniment petit, auquel cas l'une des sécantes, qui lui est commune avec la section conique, se confond évidemment avec la polaire focale de cette section conique.

458. Il suit de ce qui précède, qu'ayant seulement soit trois points, soit trois tangentes, soit deux points et une tangente, soit enfin deux tangentes et un point avec l'un des foyers d'une section conique quelconque, on pourra (303 et suiv.) déterminer immédiatement tout ce qui la concerne, et résoudre linéairement tous les problèmes du second degré qu'on peut avoir à se proposer sur elle, pourvu qu'on suppose décrit le cercle, de rayon arbitraire, qui a ce foyer pour centre : ainsi l'on obtiendra directement (344) son centre, ses axes, ses asymptotes, son autre foyer, ses intersections avec des droites données, etc., etc.

Dans le cas de la parabole, deux conditions suffiront évidemment, attendu que la tangente à l'infini est naturellement donnée (331).

459. Pour montrer avec quelle facilité ces notions conduisent à la plupart des théorèmes connus sur les foyers des sections coniques, et à beaucoup d'autres qui ne le sont pas encore, supposons d'abord que, pour le foyer F (*fig.* 69) d'une section conique (O), on ait tracé, comme on vient de le dire, une circonférence de cercle arbitraire, ayant ce point pour centre, lequel est ainsi un centre d'homologie commun à la fois à ce cercle et à la section conique. Soient T, T' deux points quelconques, homologues directs, appartenant au rayon d'homologie FT'T ; les tangentes en ces points iront se rencontrer en un nouveau point P' appartenant à l'une, M'N', des sécantes communes aux deux courbes, sécante qui est évidemment perpendiculaire au grand axe AB de la section conique, puisque tout est symétrique de chaque côté de cet axe. D'un autre côté, si l'on prolonge la tangente TP' à la section conique jusqu'à sa rencontre en P avec la polaire focale MN, qui est évidemment parallèle à la sécante commune M'N', la droite PF sera (451) perpendiculaire au rayon d'homologie FT et, par suite, parallèle à la tangente T'P' du cercle.

Maintenant, si, du point T de la section conique, on mène la parallèle TM à l'axe AB, elle rencontrera, à angles droits, la sécante M'N' et la polaire focale MN aux points respectifs M', M ; donc on conclura, à cause des différentes parallèles, que le rapport de FT' à FT, qui est le même que celui de PP' à TP, est constamment égal au rapport de MM' à MT ; mais FT' est constant, aussi bien que MM' qui mesure la distance des parallèles MN, M'N' ;

donc le rapport de FT à MT est invariable pour tous les points de la section conique, c'est-à-dire, en d'autres termes, que :

Le rapport des distances d'un point quelconque d'une section conique au foyer et à la polaire focale correspondante demeure toujours le même, quel que soit ce point.

Cette propriété du foyer et de la directrice des sections coniques est très-anciennement connue, et le rapport qu'elle indique devient évidemment celui de l'égalité, pour le cas particulier de la parabole (450).

460. Supposons encore (*fig.* 70) que l'on inscrive à une section conique quelconque un quadrilatère ABCD, dont les diagonales AC et BD se croisent en l'un, F, de ses foyers, et qu'on lui en circonscrive un autre A'B'C'D', dont les côtés aient pour points de contact les sommets du premier; il existera entre ces deux quadrilatères les diverses relations signalées art. 186. Cela posé, si l'on considère le cercle, de rayon arbitraire, qui a F pour centre, et que l'on construise, pour ce cercle, les deux quadrilatères, inscrit et circonscrit, qui sont homologiques ou projections des premiers par rapport à F, et dont l'un est nécessairement un rectangle et l'autre un parallélogramme, on conclura sans discussion que :

« Les droites FP, FQ, qui joignent le foyer aux points de concours P et Q » des côtés respectivement opposés du quadrilatère incrit ABCD, et se con- » fondent, pour la direction, avec les diagonales du quadrilatère circonscrit » A'B'C'D', se coupent à angle droit et divisent en deux parties égales : » 1° l'angle et le supplément de l'angle formé par les diagonales AC, BD » du quadrilatère inscrit, c'est-à-dire les cordes de contact des côtés opposés » du quadrilatère circonscrit ; 2° l'angle et le supplément de l'angle formé » par les droites FP', FQ' qui partent du foyer et vont au point de concours P' » et Q' des côtés opposés du quadrilatère circonscrit A'B'C'D'. Enfin tous » les points de concours P, Q, P', Q' sont rangés sur la polaire focale MN, » laquelle a pour homologue ou projection dans le cercle la droite à l'infini » du plan. »

De là suit immédiatement ce corollaire déjà connu (*) :

Une corde quelconque AB *étant inscrite à une section conique, si, de l'un* F *des foyers, on mène des rayons vecteurs, tant aux extrémités de cette corde qu'au point* P, *où sa direction rencontre la polaire focale correspondante, et au pôle* A' *sommet de l'angle circonscrit qui lui appartient,* 1° *ces deux rayons vec-*

(*) De Lahire et le marquis de l'Hôpital ont donné, chacun à sa manière, ces propriétés dans leurs *Traités des Sections coniques*.

teurs se couperont sans cesse à angle droit; 2° ils diviseront respectivement en parties égales l'angle et le supplément de l'angle AFB *formé par les deux autres.*

Des angles dont le sommet s'appuie au foyer des sections coniques.

461. On voit, par cette application du principe de l'article 457, que toutes les relations, qui concernent les angles au centre dans le cercle, s'étendent, d'une manière analogue, aux angles dont le sommet s'appuie aux foyers des sections coniques; et il n'est pas besoin pour cela d'examiner, à chaque fois, les relations projectives qui lient le cercle, dont ce foyer est le centre, avec la section conique; il suffit de se rappeler, en général, que l'une des deux courbes peut être envisagée comme la projection de l'autre par rapport au point dont il s'agit : ainsi, par exemple, on aperçoit de suite, sans qu'il soit nécessaire de passer par tous les raisonnements qui précèdent, que :

Si un angle quelconque est circonscrit à une section conique, la droite qui joint le sommet de cet angle au foyer de la courbe, divise en deux parties égales l'angle formé par les deux rayons vecteurs qui aboutissent au point de contact des côtés du premier.

D'après cela, on pressentira sans peine l'étendue des conséquences qui peuvent découler du principe de l'article 457; car chaque théorème connu, sur les angles au centre du cercle, fournira un théorème analogue pour les angles au foyer des sections coniques.

462. Soit TCT' (*fig.* 71) un angle quelconque circonscrit au cercle qui a F pour centre; soit AB une troisième tangente de ce cercle, terminée en A et B aux deux premières; supposons d'abord que les points A et B soient sur les tangentes mêmes CT et CT', comprises entre le sommet C de l'angle que l'on considère et les points de contact T, T' des côtés de cet angle. Cela posé, joignons par des droites le centre F aux extrémités A et B de la tangente AB; il est clair que, dans le triangle ABF formé par ces droites et cette tangente, l'angle en F est supplément de la somme des angles en A et B; donc le double de cette somme est supplément, pour quatre droits, de la somme des angles TAB, T'BA extérieurs au triangle ABC, et par conséquent égal à la somme des angles intérieurs A et B de ce triangle; mais la somme des angles A et B, dont il s'agit, est supplément de l'angle en C du même triangle; donc enfin le double de l'angle au centre AFB, qui embrasse la tangente AB par ses extrémités, est égal au supplément de l'angle C compris entre les deux autres tangentes, et par conséquent *l'angle au centre dont il s'agit doit*

demeurer constant pour toutes les positions de la tangente AB *autour du cercle proposé.*

Cette conséquence nécessaire de la loi de continuité offre cependant une difficulté pour le cas où la tangente AB se trouve en A′B′, au delà des points de contact T, T′ par rapport au sommet C de l'angle fixe ; car, en répétant les raisonnements ci-dessus pour cette nouvelle hypothèse, on trouve que ce n'est plus le double de l'angle même A′FB′ qui est égal au supplément de l'angle C, mais bien le double du supplément de cet angle.

Mais si, en partant du premier cas, on fait varier successivement, toujours dans le même sens et par degrés insensibles, la position de la tangente AB autour du cercle qui appartient aux deux autres tangentes supposées fixes, qu'on ait soin en même temps d'observer attentivement les variations de sens et de grandeur des côtés FA et FB, qui comprennent l'angle au centre AFB, on reconnaîtra sans peine que le théorème, tel qu'il a d'abord été énoncé, s'applique à la fois à toutes les positions possibles de la tangente AB. Il est évident en effet que, chaque fois que l'un des côtés dont il s'agit devient infini, c'est-à-dire change de sens à l'égard du sommet F, l'angle correspondant se change aussi en celui qui est adjacent à l'angle même formé par la direction des nouveaux côtés : c'est au moins ainsi qu'on doit entendre la loi de continuité, qui veut qu'on ne perde pas de vue un même objet dans les diverses transformations du système primitif. Or, si l'on place des lettres G, H sur la direction des côtés de l'angle AFB, hors du champ de la figure, il sera facile de voir que, passé l'instant où le côté FB, par exemple, est devenu parallèle à CT′, et où AB se change par conséquent en A′B′, ce n'est plus l'angle même des côtés FA′, FB′ que l'on a à considérer, mais bien celui A′FG′ qui est le supplément de cet angle.

463. En partant de ces principes et de la propriété établie ci-dessus pour le cas du triangle circonscrit au cercle, il nous serait facile de nous élever successivement aux relations d'angles qui concernent les polygones circonscrits d'un nombre de côtés quelconque. Par exemple, nous pourrions démontrer ce théorème général, qui s'étend également aux polygones de rang impair, à l'aide du principe de continuité (160) :

Dans tout polygone, d'un nombre de côtés pair, circonscrit à un cercle, la somme des angles au centre, sous lesquels on voit les côtés, soit de rang pair, soit de rang impair, équivaut toujours à deux droits, et par conséquent ces deux sommes sont égales entre elles, pour les différentes positions du système.

Mais quoique, d'après l'article 457, ces diverses relations s'appliquent

immédiatement aux polygones circonscrits à une section conique quelconque, en substituant l'un des foyers de la courbe au centre du cercle ci-dessus, nous croyons devoir laisser au lecteur le soin de faire lui-même ces développements, qui nous entraîneraient nécessairement dans des longueurs, et nous feraient perdre de vue le cas simple du triangle, dont nous voulons spécialement nous occuper, à cause des conséquences qui en dérivent.

Quant à la remarque qui a été faite relativement à la manière de généraliser l'énoncé du théorème ci-dessus (462), elle pourra paraître pour le moins peu importante, eu égard à l'objet qui nous occupe; mais elle est indispensable pour répandre de la clarté sur ce qui suit, et elle est bien placée dans un ouvrage destiné, en grande partie, à faire connaître les applications dont est susceptible le principe de continuité.

464. Quoi qu'il en soit, il résulte de cette remarque qu'en supposant que l'un quelconque AB (*fig.* 71) des côtés d'un triangle ABC circonscrit au cercle (F) devienne mobile, en demeurant constamment tangent à ce cercle, les deux autres côtés AC et BC restant fixes, l'angle au centre AFB, correspondant à ce côté, pourra être regardé comme invariable de grandeur dans toutes les positions qu'il est susceptible de prendre autour du point F. Ainsi on aura ce théorème très-beau et très-général, en se reportant (461) à la section conique quelconque qui a pour foyer le centre F du cercle :

L'angle sous lequel on voit, de l'un des foyers d'une section conique, la partie d'une tangente mobile, interceptée entre deux tangentes fixes, est toujours constant pour toutes les positions de cette première tangente.

Cas particulier de la parabole.

465. Dans le cas particulier de la parabole, la tangente mobile peut passer tout entière à l'infini, et, pour cette position, les côtés de l'angle mobile deviennent parallèles à ceux de l'angle fixe; donc le premier de ces angles est égal à l'autre ou au supplément de cet autre, selon le sens dans lequel a pu s'opérer le mouvement de la première à la seconde position. Or, il sera facile de voir, en suivant avec attention ce mouvement, que l'angle au foyer, correspondant à une position quelconque de la tangente mobile, est effectivement égal au supplément de l'angle formé par les deux tangentes fixes du côté de la courbe.

Désormais nous appellerons *angle vecteur* d'une droite, terminée par deux points quelconques, l'angle sous lequel on voit cette droite du foyer de la

section conique; nous pourrons donc énoncer ainsi le théorème relatif à la parabole :

Dans la parabole, l'angle vecteur, correspondant à une tangente mobile terminée à deux tangentes fixes quelconques, est toujours constant, et supplément de l'angle formé, par ces dernières tangentes, du côté de la courbe.

466. On peut déduire de là plusieurs corollaires remarquables, dont la plupart ont été donnés par Lambert, dans un ouvrage qui a pour titre : *Insigniores orbitæ cometarum proprietates*, Section I.

Soient CM et CN (*fig.* 72) deux tangentes fixes quelconques d'une parabole ayant F pour foyer, AB une troisième tangente, mobile autour de cette courbe, et terminée en A et B aux points de sa rencontre avec les premières : d'après le théorème qui précède, l'angle vecteur AFB est supplément de l'angle MCN des tangentes fixes, qui embrasse la courbe par ses côtés; c'est-à-dire qu'il est égal à l'angle ACB qui lui est adjacent dans le triangle formé par les trois tangentes; donc, si l'on trace la nouvelle droite FC, le quadrilatère ABCF sera inscriptible au cercle; d'où suit ce théorème :

Un triangle quelconque étant circonscrit à une parabole, si on lui circonscrit, à son tour, une circonférence de cercle, cette circonférence passera nécessairement par le foyer même de la courbe.

Il suit de là réciproquement que :

Toutes les paraboles, tangentes aux côtés d'un même triangle quelconque, ont leurs foyers sur la circonférence du cercle circonscrit à ce triangle.

Si donc l'on se donnait, à volonté, une quatrième tangente A'B' à la parabole, on obtiendrait de suite le foyer de la courbe, en circonscrivant des circonférences de cercle à deux quelconques des quatre triangles formés par la rencontre mutuelle de cette nouvelle tangente et des trois autres. Le point ainsi obtenu serait évidemment unique, et appartiendrait à la fois aux quatre circonférences de cercle décrites comme celles qui précèdent : ce serait, sur le plan de quatre droites arbitraires, *le point duquel on verrait la partie interceptée par deux quelconques d'entre elles sur la troisième, sous un angle égal au supplément de celui que forment ces deux mêmes droites du côté du point dont il s'agit :*

467. Puisque le quadrilatère ABCF est toujours inscriptible au cercle, quelle que soit la tangente mobile AB, l'angle FCA sera toujours égal à l'angle FBA qui s'appuie sur la même corde AF; mais l'angle FCA est invariable, puisque par hypothèse CM et CN sont fixes; donc :

Si l'un des côtés d'un angle quelconque, de grandeur invariable, passe con-

stamment par le foyer d'une parabole, et que son sommet parcoure une tangente quelconque à la courbe, l'autre côté de l'angle mobile sera aussi constamment tangent à la courbe (*).

On peut encore énoncer ce théorème ainsi qu'il suit :

Si du foyer d'une parabole on abaisse, sous un même angle donné, et toujours dans le même sens, des obliques sur toutes les tangentes, les pieds de ces diverses obliques se trouveront appartenir à une même droite, tangente elle-même à la courbe.

Ces deux théorèmes sont évidemment des cas particuliers de ceux dont la démonstration a été indiquée aux articles 448 et 450.

468. En rapprochant entre eux le dernier de ces théorèmes et celui qui a été établi un peu plus haut (466), on est conduit à ce corollaire remarquable :

Si, d'un point quelconque d'une circonférence de cercle circonscrite à un triangle donné, on abaisse sous un même angle, d'ailleurs arbitraire, des obliques sur les directions des trois côtés de ce triangle, leurs pieds seront situés sur une seule et même ligne droite.

C'est l'extension du théorème connu relatif au cas particulier où l'on remplace les obliques par des perpendiculaires, théorème que M. Servois attribue à R. Simson (**).

Conséquences relatives au cas général d'une section conique quelconque; description organique des sections coniques par le mouvement des angles d'ouverture donnée.

469. Revenons au cas général d'une section conique quelconque, et soit F (*fig.* 73) son foyer, CM, CN deux tangentes fixes et AB une tangente mo-

(*) Ces corollaires faciles de notre théorie se trouvent consignés, ainsi que quelques-uns de ceux qui précèdent et de ceux qui suivent, dans un article inséré à la page première du tome VIII des *Annales de Mathématiques*; en les publiant, nous ignorions que ceux relatifs à la parabole eussent été le sujet des recherches de Lambert, et c'est à l'érudit bibliothécaire du Musée central d'Artillerie, M. Terquem, que nous devons cette remarque, dont nous nous empressons, comme on voit, de profiter, en lui témoignant ici toute notre reconnaissance. Au reste, on a pu s'apercevoir que, partout dans cet ouvrage, nous n'avons rien négligé pour rendre aux anciens comme aux nouveaux auteurs de Traités de Géométrie tout ce qui peut leur appartenir.

(**) M. Servois s'est servi du théorème de Simson pour résoudre cet intéressant problème de Géométrie pratique: *Prolonger une droite accessible au delà d'un obstacle qui borne la vue, en n'employant que l'équerre d'arpenteur, et sans faire aucun chaînage* (tome IV des *Annales de Mathématiques*, p. 250); ce qui précède fait voir qu'on pourrait se servir également de la fausse équerre (357).



bile de la courbe, terminée en A et B aux deux autres; d'après le théorème (464), l'angle vecteur AFB, mobile en même temps que la tangente AB, conservera toujours la même grandeur; si donc on admet que, dans une de ses positions, AB vienne s'appliquer sur l'une des deux tangentes fixes, sur CM par exemple, ses extrémités A et B se confondront alors, la première avec le point de contact T de cette tangente, la seconde avec le sommet C de l'angle fixe. Pareille chose ayant lieu quand la tangente mobile se confond avec l'autre CN des tangentes fixes, on en conclut de suite ce corollaire, dont la première partie a déjà été établie directement art. 461 :

Lorsque deux tangentes d'une section conique se terminent, d'une part à la courbe, de l'autre au point de leur intersection mutuelle, les angles vecteurs, qui leur correspondent par rapport à l'un des foyers, sont égaux entre eux et à l'angle vecteur qui correspondrait à une troisième tangente quelconque terminée à celles-là.

470. Le théorème devant avoir lieu quelle que soit la position des parties de la figure, il sera vrai encore dans le cas où certains points et certaine droite qu'on y considère se trouveront situés à l'infini. Supposons, par exemple (*fig.* 74), que les deux tangentes en question soient précisément celles aux extrémités T et T' du grand axe de la courbe; dans ce cas, le point C est à l'infini, et les angles TFC, T'FC sont droits; donc l'angle vecteur AFB, qui correspond à une troisième tangente quelconque AB terminée aux deux premières, est aussi droit. Cette circonstance devant avoir lieu également pour l'angle vecteur AF'B de cette même tangente, relativement à l'autre foyer F' de la courbe, il en résulte un moyen très-simple d'obtenir simultanément ces foyers par le cercle décrit sur la portion AB de la tangente, comme diamètre.

Si l'on exécutait les mêmes constructions relativement à l'autre axe de la courbe, lorsqu'il existe, et il n'y a pas de raison pour ne point le faire, la circonférence cesserait de rencontrer cet axe; mais il est évident qu'un simple allongement ou rétrécissement de la courbe pouvant rendre les points d'intersection tour à tour possibles et impossibles pour un même axe, il n'y a pas de distinction nécessaire à établir entre les deux cas, si ce n'est sous le point de vue purement physique; en sorte que l'on peut dire, d'une manière figurée et en admettant, comme nous l'avons fait jusqu'ici, la considération des points imaginaires, que :

« Les sections coniques ont, généralement parlant, quatre foyers situés » deux à deux sur chaque axe de la courbe, et appartenant respectivement à

» deux séries de cercles ayant ces axes pour sécantes communes réelles ou » idéales; de plus, il est aisé de prouver que ces deux séries sont orthogo- » nales réciproques l'une de l'autre (73). »

471. Le théorème et la construction d'où nous croyons pouvoir déduire cette conséquence ont été connus des anciens et font partie des *Coniques* d'Apollonius : nous aurons occasion d'en faire usage par la suite. Ce même théorème n'est, au surplus, qu'un cas particulier de celui où la corde de contact TT' (*fig.* 73) de l'angle des deux tangentes CM, CN que l'on considère, passe par le foyer correspondant F; car, d'après ce qui a été prouvé art. 451, les angles vecteurs TFC, T'FC étant encore droits, il en doit être de même (469) de tous ceux AFB qui s'appuient sur une troisième tangente quelconque AB terminée aux deux autres (*).

472. Si l'on se donnait le foyer F (*fig.* 73) d'une section conique et trois tangentes quelconques AB, AC, BC, formant, par leurs intersections mutuelles, le triangle circonscrit ABC, l'angle vecteur AFB du côté AB serait donné de grandeur, et par conséquent, en le faisant mouvoir autour du foyer F, la droite AB, qui le sous-tend ainsi que l'angle fixe ACB formé par les deux autres côtés du triangle, deviendrait mobile et roulerait (464) sur la section conique elle-même, dont on aurait ainsi une infinité de tangentes. Le théorème de l'article 469 donnerait ensuite, pour chacune des tangentes mobiles et des tangentes fixes, le point où cette tangente vient toucher la courbe.

Au lieu de se donner une position de la tangente mobile, on peut ne se donner que la grandeur de l'angle vecteur AFB, et alors, en faisant mouvoir cet angle autour de son sommet F, sans en changer la grandeur, les conséquences seront encore les mêmes; donc :

Si, sur le plan d'un angle donné de position, on fait mouvoir autour d'un point arbitraire et fixe pris pour sommet, un angle quelconque de grandeur invariable, qu'on trace ensuite, pour chacune de ses positions, les deux droites qui sous-tendent à la fois l'angle fixe et l'angle mobile, chacune de ces deux séries de droites enveloppera, en particulier, une seule et même section conique, ayant précisément pour foyer le sommet fixe de l'angle mobile, et les deux côtés de l'angle fixe pour tangentes.

473. Il suit de là que, si l'on abaisse du sommet fixe ou foyer des per-

(*) Cette extension se trouve consignée dans l'ouvrage de Guido Grandus, qui a pour titre: *Sectionum conicorum synopsis*, imprimé à Naples en 1737.

pendiculaires, tant sur les côtés de l'angle donné que sur les droites mobiles appartenant à une même série, les pieds de ces perpendiculaires seront (450) sur un même cercle, ayant pour diamètre le premier axe de la section conique qu'enveloppent ces droites, etc.

Il est évident encore que, dans le cas particulier où l'angle mobile est égal à l'angle fixe ou en est le supplément, l'une des deux courbes devient une parabole (465); en sorte que le cercle qui lui correspond dégénère en une tangente au sommet de cette parabole.

474. Revenons au cas où le côté AB (*fig.* 73) du triangle mobile AFB roule sur une section conique quelconque, ayant le point F pour foyer; il est clair que, si l'on assujettit l'angle vecteur AFB à demeurer constant, comme ci-dessus, et le sommet A à parcourir les divers points d'une tangente quelconque MC de la courbe, le dernier sommet B du triangle décrira lui-même une seconde tangente NC de cette courbe; or, en menant, à chaque instant, de l'autre foyer F′ de la courbe, des droites AF′, BF′ vers A et B, elles formeront un angle AF′B qui demeurera invariable de grandeur, aussi bien que le premier AFB (464); donc, la grandeur de ce nouvel angle étant une fois déterminée, le mouvement de la tangente AB autour de la courbe pourra être remplacé par le mouvement simultané des angles vecteurs en F et F′, dont deux côtés se couperaient, à chaque instant, en des points A de la tangente donnée MC; de plus, selon ce qui précède, l'autre extrémité B de cette tangente, commune à la fois aux seconds côtés FB, F′B des angles mobiles, parcourra la tangente CN dans ses diverses positions.

On voit que, pour déterminer la relation de grandeur des angles en F et F′ pour laquelle ce théorème aura lieu, il faudra avoir l'une des positions de la tangente mobile AB, autour de la courbe; car, en se donnant arbitrairement l'angle en F, la position du point correspondant B en résultera au moyen de la tangente fixe MC, et, par suite, la grandeur même de l'angle en F′. Mais on arrivera évidemment au même but, sans recourir directement à la tangente AB, en remarquant qu'il doit exister une position de cette tangente, pour laquelle le point B soit en N sur la direction de F′F; en effet, il en résulte que, les côtés FB, F′B des angles mobiles en F et F′ étant appliqués à la fois sur cette droite, les deux autres côtés de ces mêmes angles devront concourir en un point de la tangente donnée MC. Donc enfin nous pouvons conclure ce théorème dû à Mac-Laurin (*) :

(*) *Voyez* la *Géométrie organique* de cet auteur, 1re partie, p. 7, Prop. III.

Si deux angles, de grandeur invariable, tournent sur deux points fixes ou pôles quelconques pris pour sommets, tandis que deux de leurs côtés se coupent continuellement sur une droite de position donnée, le point d'intersection des deux autres côtés se mouvra constamment sur une autre ligne droite, quand les angles générateurs seront tels, que, dans une certaine position, leurs côtés puissent s'appliquer à la fois sur celle qui renferme les deux points fixes ou pôles.

Il résulte, en outre, de ce qui précède que la droite, qui joint à chaque instant les points d'intersection des côtés des angles, enveloppe alors dans toutes ses positions une même section conique, ayant la directrice ainsi que la droite parcourue pour tangentes, et les deux points fixes pour foyers.

475. Dans le cas général où les deux angles sont entièrement arbitraires, la ligne des points B cesse d'être une droite, et devient alors une section conique.

Soient, en effet, F et F′ (*fig.* 75) deux angles constants quelconques dont les côtés FA, F′A se coupent sans cesse sur la droite MC, tandis que les deux autres FX, F′X se coupent en des points X de la courbe qu'il s'agit d'examiner. En concevant, comme ci-dessus, la section conique qui a F et F′ pour foyers et MC pour tangente, il résultera de ce qui précède que, si l'on mène de chaque point A une tangente AB à la courbe, elle ira rencontrer les côtés FX, F′X en des points B, B′, qui demeureront invariablement sur deux autres tangentes CN, C′N′ de la courbe; ainsi le mouvement du point X sera remplacé par celui de l'un des sommets du triangle BB′X, dont les deux autres sommets B, B′ parcourent les tangentes en question, tandis que les côtés BX, B′X, adjacents à X, passent constamment par les points fixes F et F′, et que le troisième côté BB′ roule sur la section conique proposée.

Or si, pour savoir le degré de la courbe que parcourt le sommet X, on trace à volonté une droite KL sur le plan de la figure, ce degré sera évidemment marqué par le nombre des positions distinctes du point X sur cette droite. Mais, si l'on oblige le sommet X du triangle BB′X à parcourir la droite KL dont il s'agit, en rendant libre le côté BB′, et assujettissant, du reste, le mouvement du triangle aux mêmes conditions qu'auparavant, ce côté libre enveloppera évidemment (210) une nouvelle section conique, tangente aussi aux directrices CN, C′N′, et qui n'aura plus ainsi que deux autres tangentes communes avec la proposée, lesquelles étant prises successivement pour la direction du côté BB′ ne donneront, en tout, que deux triangles BB′X et, par suite, deux sommets distincts X remplissant les conditions du problème; donc aussi la droite arbitraire KL ne peut rencontrer qu'en deux

points seulement la courbe que décrit en général le point X; donc, enfin, cette courbe est du second degré, et l'on peut énoncer, par conséquent, ce théorème :

Si l'on fait mouvoir sur un plan deux angles, de grandeur invariable mais quelconque, autour de deux points fixes comme sommets, de telle sorte que deux de leurs côtés se coupent sans cesse sur une droite donnée de position, l'intersection de deux autres côtés de ces angles décrira une section conique passant évidemment par les points fixes dont il s'agit (*).

476. Telle est la description organique des lignes du second ordre, donnée par Newton dans ses *Principes mathématiques de la Philosophie naturelle;* description qui sert de base à la *Géométrie organique* de Mac-Laurin. Il ne serait pas difficile de faire voir, d'après ces illustres géomètres, comment on peut s'en servir, de même qu'on a fait depuis de l'*hexagramme mystique* de Pascal, soit pour mener des tangentes aux sections coniques, soit pour faire passer une telle courbe par cinq points donnés sur un plan, etc. Notre but n'étant ici que de montrer avec quelle simplicité nos principes peuvent conduire directement aux principaux théorèmes connus sur les angles, nous n'entrerons pas dans de plus grands développements à ce sujet et nous terminerons tout ce que nous avions à dire sur la description organique des lignes du second ordre, en faisant remarquer, avec Mac-Laurin, que, dans les raisonnements ci-dessus (475), le mouvement de la tangente ou du côté BB' peut être remplacé (464) par celui de l'angle BFB', invariable de grandeur, qui a son sommet appuyé au foyer F, ce qui donne lieu à ce corollaire :

« Si l'un, F, des angles d'un triangle B'FX est constant de grandeur, en
» tournant sur un point fixe F, comme sommet, tandis que le côté B'X
» opposé à cet angle pivote, dans toutes ses positions, sur un autre point
» fixe F', et que l'un, B', des sommets adjacents à ce même côté est assujetti
» à parcourir une droite donnée C'N', le troisième sommet X du triangle
» décrira, par le même mouvement, une section conique passant par les
» points fixes F et F'. »

Relations d'angles qui appartiennent simultanément au système des deux foyers d'une section conique; des angles constants et des polygones équiangles circonscrits à une telle courbe.

477. Considérons maintenant les relations d'angles qui peuvent appar-

(*) Nous donnerons, dans le IIIe Chapitre de cette Section (530) une démonstration beaucoup plus directe de ce théorème, et qui s'étend au cas général où l'on considère un nombre quelconque d'angles et de directrices.

tenir simultanément au système des deux foyers F et F' (*fig.* 73) d'une section conique ; joignons, par des droites, chacun de ces foyers avec les points de contact T, T' et le point d'intersection C de deux tangentes quelconques CM et CN de la courbe, que nous supposerons être ici une ellipse. D'après la propriété connue des foyers (449), les angles FTC, F'TC sont suppléments l'un de l'autre, et leur somme vaut deux droits ; par la même raison, la somme des angles FT'C, F'T'C vaut aussi deux droits ; donc la somme de tous ces angles réunis, qu'on peut appeler *angles de contact*, vaut quatre angles droits.

D'après ce corollaire, on peut déjà prévoir que le système des foyers F et F' doit jouir, par rapport aux angles, de propriétés exactement semblables à celles qui ont lieu pour le centre du cercle, supposé double ; et, en effet, si nous considérons les deux quadrilatères CTFT', CTF'T' formés par les deux tangentes ci-dessus et par les rayons vecteurs qui partent de chaque foyer et vont aux points de contact de ces tangentes, la somme de tous leurs angles réunis vaudra huit droits ; retranchant donc les angles en T et T', qui sont ceux du contact et valent ensemble quatre droits d'après ce qui précède, il restera quatre angles droits pour la somme des angles en F et F' joints au double de l'angle en C des deux tangentes ; en sorte que :

La demi-somme des angles vecteurs TFT', TF'T', *qui répondent aux deux foyers et à la corde de contact de deux tangentes quelconques, est toujours supplément de l'angle même formé par ces tangentes, du côté de la courbe.*

Autre propriété tout à fait analogue à celle qui a lieu pour le cas particulier du cercle.

Pour l'hyperbole, ce n'est plus la demi-somme, mais la demi-différence des angles vecteurs qui est supplément de l'angle formé par les tangentes, du côté de la courbe (*) : quel que soit, au reste, celui de ces cas que l'on considère, il faut avoir égard (462) à la diversité de position des lignes et des angles pour appliquer le théorème, c'est-à-dire à la variation de signe des angles auxquels il est relatif.

Maintenant, si l'on remarque que l'angle TFT' est double (461) de l'angle TFC ou T'FC, et qu'il en est de même de l'angle TF'T' à l'égard de TF'C ou de T'F'C, on conclura de ce qui précède que la somme des angles TF'C, TFC, pour l'ellipse, et leur différence, pour l'hyperbole, est exactement le supplément de l'angle MCN des tangentes que l'on considère ; mais les angles

(*) Guido Grandus a donné, pour l'hyperbole, un théoreme qui revient à celui-ci. *Voyez* l'ouvrage déjà cité plus haut (471).

dont il s'agit sont respectivement égaux (469) aux angles AF'B, AFB, sous lesquels on voit, des foyers F' et F, la partie AB d'une troisième tangente terminée aux deux autres; donc nous pouvons énoncer ce théorème général, dont l'analogie avec celui qui a lieu (449) entre les rayons vecteurs partant d'un même point de la courbe est digne de remarque :

Lorsqu'une tangente d'une section conique se termine à deux autres tangentes de la même courbe, la somme des angles vecteurs de cette tangente, dans l'ellipse, et leur différence, dans l'hyperbole, est constante et égale au supplément de l'angle formé par les deux tangentes fixes, du côté de la courbe.

Dans le cas de la parabole, l'un des angles vecteurs est nul, et dans celui du cercle il se confond avec l'autre; en sorte qu'on retombe directement sur les propositions déjà établies plus haut (462 et 465). Le cas où les deux tangentes fixes sont parallèles ou perpendiculaires offre aussi des circonstances remarquables, sur lesquelles il est assez inutile d'insister.

478. Pour compléter ce parallèle entre les propriétés des sections coniques et celles du cercle, relatives aux angles et aux foyers, nous remarquerons que, dans les triangles CFT, CF'T, les sommes d'angles adjacents aux bases CF et CF' sont respectivement égales aux angles de contact MTF, MTF' extérieurs à ces triangles : or ces angles sont suppléments l'un de l'autre; donc ces deux sommes, prises ensemble, valent deux droits; donc aussi la somme des angles vecteurs TFC, TF'C, est supplément de celle des angles TCF, TCF'. On prouverait de la même manière, pour la tangente CT', que la somme des angles vecteurs T'FC, T'F'C est supplément de celle des angles T'CF, T'CF'; d'ailleurs ces deux sommes d'angles vecteurs sont égales entre elles (461); donc enfin l'angle $T'CF + T'CF' = TCF + TCF'$, et par conséquent, en ôtant de part et d'autre la partie FCF' commune à ces sommes, il restera l'angle $2 . FCT' = 2 . F'CT$, théorème qu'on peut énoncer de la manière suivante :

Si l'on joint par des droites le sommet d'un angle quelconque circonscrit à une section conique avec les deux foyers de la courbe, ces deux droites formeront respectivement des angles égaux avec les tangentes, et par conséquent avec la droite qui divise, soit l'angle, soit le supplément de l'angle de ces tangentes, en deux parties égales.

Ce théorème est évidemment analogue à celui qui a lieu dans le cercle : seulement, alors, les droites CF, CF' se confondent. Dans le cas de la parabole, l'un des foyers passe à l'infini, et la droite qui le joint au sommet de l'angle des deux tangentes devient parallèle à l'axe de la courbe, ce qui offre quel-

ques conséquences qu'il est inutile d'examiner, attendu la facilité avec laquelle on peut les déduire de ce qui précède.

479. Des théorèmes qui viennent d'être exposés, on passerait de suite aux relations d'angles qui peuvent appartenir aux polygones inscrits et circonscrits aux sections coniques : ainsi, par exemple, il en résulte que :

« Si l'on considère un polygone circonscrit à une section conique, dont tous les angles soient égaux, et qu'on inscrive à la courbe un autre polygone qui ait pour sommets les points de tangence des côtés du premier :

« 1° Les sommes ou différences d'angles vecteurs (selon que la courbe est une ellipse ou une hyperbole), qui répondent aux deux foyers et aux différents côtés du polygone circonscrit, sont toutes égales entre elles et au double de l'angle extérieur du polygone. »

« 2° La même chose a lieu à l'égard des côtés du polygone inscrit, pour lequel d'ailleurs les sommes ou différences d'angles vecteurs sont exactement égales à celles qui répondent au polygone circonscrit. »

« 3° Les sommes ou différences d'angles vecteurs appartenant aux différents segments formés sur chaque côté du polygone circonscrit, à partir du point de contact, sont aussi égales entre elles et moitié des premières, de sorte qu'elles ont pour mesure l'angle extérieur du polygone circonscrit. »

« 4° Etc. »

Dans le cas de la parabole, l'un des foyers passe à l'infini, et les angles vecteurs qui lui correspondent sont tous nuls, en sorte que si, de l'autre foyer, l'on mène des rayons vecteurs tant aux sommets qu'aux points de contact des côtés du polygone circonscrit, tous les angles formés par deux rayons consécutifs seront égaux entre eux : propriété parfaitement analogue à celle qui a lieu pour les polygones équiangles circonscrits au cercle.

Nouvelles propriétés des angles constants dont le sommet s'appuie au foyer des sections coniques, ou qui sont circonscrits à ces courbes.

480. Ce rapprochement entre les propriétés des foyers des sections coniques et celles du centre de la circonférence du cercle peut se pousser beaucoup plus loin encore, à l'aide des considérations de l'article 457.

Supposons, en effet, qu'ayant décrit un cercle, du foyer F (*fig.* 76) d'une section conique quelconque, comme centre, avec un rayon arbitraire, on fasse mouvoir, autour du point F comme sommet, un angle TFT' de grandeur quelconque, mais constante, et qu'on trace, à chaque instant, la corde *tt'* qui sous-tend cet angle dans le cercle, et celle TT' qui le sous-tend dans la

courbe; supposons enfin qu'on circonscrive à ce cercle et à la courbe les angles *tat'*, TAT' qui ont leurs points de contact aux extrémités respectives des deux cordes, on conclura immédiatement, du principe de l'article 457 et de la doctrine des figures homologiques, que :

« 1° Le sommet A de l'angle circonscrit à la section conique parcourra une autre section conique, jouissant absolument des mêmes propriétés projectives que la première, par rapport au foyer F, et ayant par conséquent (456) ce foyer et la polaire focale correspondante MN en commun avec elle, puisque d'ailleurs cette polaire est une sécante de contact commune aux deux courbes. »

« 2° La corde TT', qui sous-tend l'angle de grandeur invariable F, roule, de son côté, sur une troisième section conique, ayant avec chacune des deux autres absolument les mêmes relations que celles-ci ont entre elles; de plus, le point de contact de la corde mobile, avec la section conique qu'elle enveloppe, se trouve précisément sur la droite FA qui joint le foyer au sommet A de l'angle circonscrit correspondant, et divise par conséquent l'angle vecteur TFT' en deux parties égales, etc. »

481. Dans le cas particulier de la parabole, les angles vecteurs égaux TFT' correspondent aussi (465) à des angles circonscrits TAT' égaux entre eux, et réciproquement; donc on a ce théorème fort remarquable :

Si l'on fait mouvoir autour d'une parabole un angle circonscrit quelconque, de grandeur invariable, le sommet de cet angle parcourra, dans toutes ses positions, une section conique ayant même foyer et même polaire focale que la parabole. Par suite du même mouvement, la corde de contact de l'angle roulera sur une troisième section conique, ayant encore ce foyer et cette polaire en commun avec la parabole.

De Lahire a, le premier, démontré par le calcul (*) que les sommets des angles égaux circonscrits à la parabole sont sur une autre section conique, et il ne paraît pas que personne ait encore établi ce théorème d'une manière purement géométrique, comme on vient de le faire. Au surplus, quand l'angle circonscrit est droit, on retombe directement sur la propriété de la polaire focale de la parabole (452); car alors la section conique, décrite par le sommet de cet angle, devient une ligne droite.

(*) *Voyez* le *Traité* in-fol. *des Sections coniques* par cet auteur, liv. VIII, Prop. 29.

Des angles constants, ou variables suivant certaines lois, dont le sommet s'appuie en un point quelconque du périmètre d'une section conique.

482. Les propriétés qui viennent de nous occuper en dernier lieu, relativement aux angles constants qui se meuvent autour du foyer d'une section conique, subsistent, d'une manière analogue, pour le cas où le sommet de l'angle est en un point quelconque du périmètre de la courbe ; si l'on décrit, en effet, un cercle, de rayon arbitraire, touchant cette courbe au point dont il s'agit, il aura avec elle (319) ce même point pour centre d'homologie ou de projection ; donc il sera, à son égard, dans une situation analogue à celle où se trouve, par rapport à la courbe, le cercle de rayon quelconque, décrit du foyer de cette courbe comme centre.

Or, en faisant mouvoir autour du point de contact du cercle et de la conique, comme sommet, un angle de grandeur invariable, la corde qui sous-tend cet angle dans le cercle roulera encore, dans toutes ses positions, sur un nouveau cercle concentrique au premier, et il en sera de même du sommet de l'angle circonscrit, ou du pôle qui correspond à la corde génératrice. De plus, quand l'angle invariable est droit, le cercle qu'enveloppe cette même corde se réduit à un point, placé sur la normale de la section conique qui répond au sommet commun des angles ; donc on peut énoncer ces théorèmes analogues à ceux de l'article 480 :

« Si, autour d'un point quelconque du périmètre d'une section conique, pris pour sommet, on fait mouvoir un angle constant, de grandeur arbitraire, et qu'on détermine successivement les cordes qui sous-tendent cet angle et les pôles qui leur appartiennent :

« 1° Le système de ces cordes enveloppera une seule et même section conique qui, dans le cas où l'angle générateur sera droit, se réduira à un point, placé sur la normale relative à la courbe proposée et au sommet commun des angles, et qui, dans le cas général où l'angle générateur sera quelconque, aura avec cette proposée un double contact suivant la polaire du point dont il s'agit. »

« 2° Le système des pôles appartenant à ces mêmes cordes sera situé sur une troisième section conique, ayant un double contact avec la proposée suivant la polaire qui sert déjà de sécante de contact commune aux premières, et qui se réduira à cette polaire elle-même, quand l'angle générateur sera un angle droit. »

483. Il est essentiel de remarquer que, dans le cas actuel, chacune des

courbes engendrées par suite du mouvement de l'angle constant, appartient à la fois à cet angle lui-même et à celui qui en est le supplément, ce qui n'a pas lieu pour le cas où le sommet fixe des angles est placé au foyer même de la courbe; car alors l'un de ces angles donne lieu à des courbes tout à fait différentes de celles qui répondent à l'autre.

D'ailleurs, puisque les cordes passent toutes par un même point placé sur la normale qui répond au sommet commun des angles, quand ces angles sont droits et que leur sommet est sur la courbe, il en résulte un moyen fort élégant, proposé par M. Frégier, à la page 231 du tome VI des *Annales de Mathématiques*, pour *mener, avec l'équerre seule, une tangente et une normale en un point donné quelconque d'une section conique déjà décrite sur un plan* (*).

D'après ce qui précède, on voit qu'on arriverait au même but, quoique d'une manière un peu plus pénible, en se servant de la fausse équerre ou d'un angle quelconque; car ayant tracé à volonté trois cordes au moyen de cet angle, et de la manière dont il a été expliqué ci-dessus, on déterminera sans peine (424) le pôle de la sécante de contact commune à la section conique proposée et à celle qu'enveloppent ces cordes dans toutes leurs positions; joignant ensuite ce pôle par une droite avec le sommet commun à tous les angles, ce sera, d'après ce qui précède, la normale qui correspond à ce point.

484. Quand, au lieu d'être constant, l'angle générateur est variable suivant certaines lois, la corde mobile qui sous-tend cet angle dans la section conique donnée peut encore tourner autour de points fixes dans plusieurs circonstances remarquables, dont quelques-unes ont été également signalées par M. Frégier, dans le volume déjà cité des *Annales de Mathématiques*.

Supposons, par exemple, qu'on remplace l'angle générateur par un angle variable, de façon qu'une droite fixe quelconque, menée par son sommet, le divise toujours en deux parties égales; il est visible que, pour le cercle auxiliaire tangent en ce sommet à la section conique, les cordes qui sous-tendent

(*) M. Frégier a fait voir, à l'endroit cité, que la construction s'étendait, d'une manière analogue, aux surfaces du second ordre, en remplaçant l'angle droit par un angle trièdre trirectangle; la même remarque peut s'appliquer aux théorèmes qui précèdent et à ceux qui suivent. Voici, au sujet de cette construction, une propriété qui peut être utile : *Si l'on inscrit, à une surface du second ordre quelconque, un angle trièdre trirectangle, ayant son sommet en un point de cette surface, la normale en ce point sera la droite de concours unique des trois plans menés respectivement par chaque arête et par la normale à la section que détermine la face opposée à cette arête.*

cet angle demeureront toutes parallèles à elles-mêmes et à la tangente au point où la droite fixe rencontre de nouveau le cercle ; c'est-à-dire que toutes ces droites concourront en un même point à l'infini ; donc « les cordes et » la tangente analogues, dans la section conique proposée, concourront » également en un point unique, et par conséquent les pôles de ces mêmes » cordes seront distribués sur une ligne droite passant par le point de con- » tact de cette tangente. » On voit d'ailleurs ce qui arriverait dans les cas particuliers, examinés par M. Frégier, où la droite fixe se confondrait, soit avec la normale, soit avec la tangente qui correspond au sommet commun des angles.

En général, d'après ce qui a été dit ci-dessus relativement au cercle qui toucherait une section conique en un point, il est évident que toutes les relations projectives qui pourront appartenir à ce point, pour le cercle, subsisteront, d'une manière analogue, pour le même point et la section conique.

485. Il existe une circonstance générale pour laquelle la corde de l'angle variable pivote, dans toutes ses positions, autour d'un point fixe ; c'est celle où cet angle peut être considéré comme la projection, sur un autre plan, d'un angle constamment droit ; il est évident en effet, d'après ce qui précède, que, sur ce plan, la proposition aura lieu ; donc elle aura lieu aussi pour la figure proposée. Or, cette circonstance particulière peut se reconnaître très-simplement et se reproduire dans un grand nombre de cas.

Supposons, par exemple, qu'on trace, quelque part sur le plan de la figure, une autre section conique quelconque ; en menant à volonté une droite par le point de la proposée qui doit servir de sommet commun aux angles qu'on veut lui inscrire, puis joignant, par une nouvelle droite, ce point avec le pôle de la droite arbitraire dont il s'agit, pris par rapport à la section conique auxiliaire, elle formera, avec cette même droite, un angle qui, quoique variable dans ses diverses positions, pourra cependant être considéré comme la projection d'un angle droit.

En effet, si l'on met la figure en projection sur un nouveau plan, de façon que la section conique auxiliaire devienne un cercle ayant pour centre (120) le sommet commun des angles, chaque droite arbitraire étant alors un diamètre du cercle, celle qui joint son pôle au centre sera un diamètre perpendiculaire au premier. Ainsi, en prenant dans la figure primitive l'angle de ces droites pour angle générateur, la corde qui le sous-tend dans la section conique proposée pivotera constamment autour d'un point fixe, placé évi-

demment sur la droite qui, passant par le sommet commun des angles, contient aussi le pôle de la tangente correspondante à ce sommet et à la courbe proposée, par rapport à la courbe auxiliaire.

Quand la section conique auxiliaire est tracée de façon qu'elle ait précisément pour centre le point pris pour sommet des angles variables, ces angles deviennent précisément ceux que forment les différents systèmes de diamètres conjugués de cette courbe, et ainsi se trouve démontré, en passant, le théorème que M. Frégier a donné à la page 322 du tome VI des *Annales de Mathématiques*.

Supposons encore que, par le point pris sur la section conique proposée, on conduise une nouvelle section conique quelconque, puis qu'on lui inscrive une suite d'angles dont le sommet soit en ce point, et dont les cordes correspondantes passent toutes par un autre point fixe d'ailleurs arbitraire, il arrivera, de même, qu'en mettant la figure en projection de façon que la section conique auxiliaire devienne un cercle qui ait ce dernier point pour centre, tous les angles en question seront droits; donc les cordes qui sous-tendent les angles de la figure primitive, dans la section conique proposée, pivoteront encore toutes sur un même point.

Des angles droits dont le sommet s'appuie en un point quelconque du plan d'une section conique, ou qui sont circonscrits à une telle courbe, etc.

486. Il deviendrait fastidieux de multiplier davantage les exemples relatifs au cas qui précède, lesquels n'offrent, comme on le voit, aucune sorte de difficultés. Et, puisque d'ailleurs une section conique quelconque peut toujours être censée (339) l'homologique d'un certain cercle par rapport à un point arbitraire de son plan, pris pour centre d'homologie (ou point de concours des tangentes communes), on conçoit que toutes les propriétés qui peuvent appartenir à un système d'angles constants ou variables, ayant leur sommet en un point quelconque du plan d'un cercle, doivent s'étendre, d'une manière analogue, au cas où le cercle est remplacé, en général, par une section conique.

Pour offrir au moins un exemple, nous considérerons les conséquences qui peuvent résulter du mouvement d'un angle droit AFB (*fig.* 77) autour d'un point quelconque F du plan d'un cercle pris pour sommet : à cet effet, prolongeons les côtés de cet angle, de part et d'autre du point F, jusqu'à leurs intersections respectives en A et C, B et D avec le cercle, et formons avec ces nouveaux points le quadrilatère inscrit ABCD; circonscrivons enfin au

cercle le quadrilatère A′B′C′D′ qui a ses points de contact aux sommets du premier, et qui a par conséquent (186) même point de concours F de diagonales; je dis que, quel que soit l'angle droit AFB que l'on considère en particulier, le quadrilatère A′B′C′D′, obtenu en dernier lieu, sera toujours inscriptible à un autre cercle, invariable de grandeur et de position en même temps que le premier.

En effet, les quatre angles formés autour du point F, par les diagonales AC et BD, étant droits, la demi-somme des arcs opposés AD et BC, qui mesure l'un de ces angles, sera égale au quart de la circonférence entière du cercle ABCD; mais les angles opposés A′ et C′ du quadrilatère circonscrit, pris ensemble, ont évidemment pour mesure la somme entière des arcs dont il s'agit, c'est-à-dire deux angles droits; donc ces angles sont suppléments l'un de l'autre, et partant le quadrilatère circonscrit A′B′C′D′ est en même temps inscriptible à un autre cercle.

Il est clair qu'on prouverait de même réciproquement que :

Si un quadrilatère est à la fois inscrit à un cercle et circonscrit à un autre, les droites qui joignent les points de contact des côtés opposés de ce quadrilatère se coupent à angles droits.

Enfin, si le quadrilatère était seulement circonscrit à un cercle et d'ailleurs quelconque, le raisonnement qui précède servirait encore à établir ce théorème, qui nous paraît digne de remarque :

Dans tout quadrilatère circonscrit à un cercle, la somme de deux angles opposés quelconques est égale à celle des angles, opposés au sommet, formés par l'intersection mutuelle des deux cordes qui joignent les points de contact des côtés opposés du quadrilatère : pourvu toutefois qu'on ne veuille pas parler de ceux de ces angles qui regardent les angles mêmes du quadrilatère qu'on leur compare.

487. Supposons maintenant qu'on prolonge les côtés opposés du quadrilatère inscrit ABCD jusqu'à leurs intersections respectives en L et M, et ceux du quadrilatère A′B′C′D′ jusqu'à leurs intersections en N et P; les quatre points ainsi obtenus seront (186) situés sur une même ligne droite, polaire du point F par rapport à l'un et à l'autre des deux cercles que l'on considère. En outre, si, par le point F, on mène une parallèle FG et une perpendiculaire FK à cette droite, cette dernière se confondra évidemment avec la ligne des centres des deux cercles, et aura par conséquent pour pôle commun, dans ces cercles, le point situé à l'infini sur la droite LM ou sur sa parallèle FG; donc (363) les trois droites dont il s'agit sont celles qui ren-

ferment, deux à deux, les trois points de concours des sécantes conjuguées communes aux deux cercles; c'est-à-dire (80 et 370) que les points K et F, en particulier, seront les points *limites* de ces cercles.

Mais il sera démontré, dans le Chapitre III de cette Section (566), que, « quand un quadrilatère A'B'C'D' se trouve en même temps inscrit à une » section conique et circonscrit à une autre, il en existe une infinité de sem- » blables qui jouissent tous de cette propriété à l'égard des deux courbes; » et, d'un autre côté, il résulte de ce qui précède que si, dans le cas actuel de nos deux cercles, on trace, pour chaque quadrilatère ainsi obtenu, le quadrilatère qui a pour sommets les points de contact du premier, le point de concours unique des diagonales de ces quadrilatères sera encore un point limite du système des deux cercles; donc il devra se confondre, ainsi que tous ses semblables, avec le point F qui appartient aux deux premiers quadrilatères AFCD et A'B'C'D'.

Mais, d'après le théorème déjà établi ci-dessus (486), chacun des quadrilatères à la fois inscrits et circonscrits à nos deux cercles est tel, que les droites AC et BD, qui joignent les points de contact des côtés opposés, se coupent à angles droits au point F; et, par suite de ce qui précède, il n'y a pas de point de l'un ou de l'autre des cercles auquel ne corresponde un quadrilatère jouissant de cette propriété; donc enfin :

Si, autour d'un point pris à volonté dans le plan d'un cercle, on fait mouvoir un angle droit dont le sommet soit en ce point, et qu'on trace ensuite, pour chaque position de cet angle, la corde qui le sous-tend dans le cercle, et les tangentes aux extrémités de cette corde, 1° le point de concours de ces tangentes ou le pôle de la corde mobile ne cessera pas de rester sur une autre circonférence de cercle; 2° le système des différentes cordes enveloppera (231) *une seule et même conique.*

488. Le raisonnement, par lequel nous venons de prouver que tous les quadrilatères A'B'C'D' sont à la fois inscrits à un même cercle, peut être employé dans beaucoup d'autres circonstances : supposons, par exemple, que l'on circonscrive à une section conique quelconque un quadrilatère rectangle, et il en existe évidemment une infinité de pareils autour d'une même conique, on conclura sur-le-champ, à cause de la symétrie de la courbe par rapport à son centre, que le rectangle dont il s'agit est inscriptible à un cercle concentrique à cette courbe; en sorte que les axes principaux de celle-ci et la droite à l'infini du plan sont précisément (363) les droites qui renferment, deux à deux, les trois points de concours des sécantes conjuguées communes à la section conique et au cercle.

Or, tout quadrilatère qu'on essayerait de circonscrire à celle-là, de façon à être inscrit en même temps à celui-ci, se fermerait naturellement, selon le théorème (566) déjà cité, et serait tel, par conséquent, que le point de rencontre de ses diagonales aurait (186) la droite de concours des côtés opposés pour polaire commune dans les deux courbes; donc (363) ce point serait nécessairement un des trois points de concours des sécantes conjuguées communes dont il s'agit. Mais il ne saurait évidemment être à l'infini; donc enfin il se confondrait avec le centre commun des deux courbes, et partant le quadrilatère auquel il appartient, et tous ses semblables, seraient rectangles comme le premier.

Ainsi nous pouvons conclure ce théorème très-connu et qui appartient, je crois, à de Lahire (*) :

Tous les angles droits, circonscrits à une même section conique, ont leur sommet sur une circonférence de cercle concentrique à cette section conique.

Il serait facile de multiplier les exemples; mais retournons à nos premières considérations.

489. Il existe, entre le point F qui sert de sommet commun à tous les angles droits de la propriété énoncée ci-dessus (487), et la section conique qu'enveloppent toutes les cordes AB qui lui correspondent, une relation extrêmement remarquable, et que nous allons maintenant examiner.

Il est d'abord facile de voir que la droite indéfinie FF′, qui joint le point F et le centre F′ du cercle ABCD, divise cette section conique en deux parties égales et symétriques; en sorte que cette droite est un des axes principaux qui lui appartiennent.

En second lieu, si l'on considère la position particulière de l'angle droit AFB (*fig.* 78) pour laquelle ses côtés sont également inclinés sur la droite FF′, puis qu'on forme, au moyen de cet angle et de son opposé au sommet, le quadrilatère ABCD circonscrit à la courbe et inscrit au cercle, les côtés AD, BC de ce quadrilatère, étant perpendiculaires à l'axe FF′ de cette courbe, seront évidemment les tangentes aux extrémités T et T′ de cet axe. Mais AB est une autre tangente quelconque de la courbe, terminée aux points de son intersection avec les premières; de plus, l'angle AFB est droit par hypothèse; donc (470) le sommet commun F des angles est un des foyers de la courbe

(*) *Traité* in-folio *des Sections coniques*, Prop. XXVI, liv. VIII. Ce théorème a été étendu depuis, par Monge, aux surfaces du second ordre : *voyez* la fin du *Traité des surfaces du second degré*, par M. Hachette (1813); il est clair qu'on en pourrait faire autant de la plupart de ceux qui précèdent et de ceux qui suivent

que l'on considère, et par conséquent la droite de concours LM (*fig.* 77) est la polaire focale ou directrice qui lui correspond (487).

Maintenant si, du centre F' (*fig.* 78) du cercle, on mène des rayons aux extrémités de la corde AB, l'angle AF'B qu'ils formeront entre eux aura pour mesure l'arc AB du cercle, qui est évidemment aussi la mesure de l'angle AFB pour la position actuelle de cet angle; donc l'angle AF'B est droit aussi bien que l'angle AFB, et par conséquent son sommet F', qui est le centre du cercle proposé, est un second foyer de la courbe qu'enveloppent toutes les cordes.

490. On peut déduire de là, et des propriétés qui appartiennent aux foyers des sections coniques, quelques conséquences remarquables, pour le cas général de la *fig.* 77, et qui sont autant de propriétés du cercle.

Par exemple, si, du sommet commun F des angles droits, on abaisse des perpendiculaires sur les différentes cordes AB, BC,..., qui leur correspondent, ou seulement des obliques qui forment avec elles un même angle quelconque, tous leurs pieds seront placés (450) sur une nouvelle circonférence de cercle dont le centre, dans le premier des deux cas, sera précisément le point milieu de la distance du point F au centre F' du cercle proposé.

Si ensuite on en fait autant pour ce dernier centre, on obtiendra encore le même cercle, pourvu que l'angle sous lequel on abaisse les obliques soit aussi le même de part et d'autre.

Enfin il est visible que, pour le cas où l'on abaisse des perpendiculaires, les pieds de ces perpendiculaires, relativement au centre F', sont précisément les milieux des cordes correspondantes; de sorte que ces points milieux sont tous distribués sur une circonférence unique (*).

De tout ceci on déduirait encore un nouveau moyen de démontrer le théorème de l'article 488; mais c'est assez nous arrêter sur ces corollaires qui ne présentent aucune difficulté.

491. Substituons maintenant une section conique quelconque au cercle que nous avons considéré dans ce qui précède; on conclura encore (486) que les cordes qui sous-tendent l'angle droit mobile autour du point fixe enveloppent une même section conique : or je dis que cette section conique a également pour foyer le sommet commun des angles dont il s'agit.

En effet, si l'on considère, suivant la remarque de l'article 486, l'un des cercles qui ont, avec la section conique proposée, le point dont il s'agit pour

(*) *Voyez*, pour les autres propriétés des cordes orthogonales du cercle, la *Géométrie de position*, art. 132 et suiv.

centre d'homologie, et qu'on trace, dans ce cercle, les cordes qui correspondent aux diverses positions de l'angle droit, elles envelopperont, d'après ce qui précède, une section conique qui sera l'homologique de celle qui appartient aux cordes correspondantes de la proposée, et aura le centre d'homologie pour un de ses foyers; donc (456) ce centre d'homologie sera aussi le foyer de la section conique enveloppe des cordes de la proposée, et par conséquent nous pourrons énoncer ce théorème général :

Si, autour d'un point pris à volonté sur le plan d'une section conique, on fait mouvoir un angle droit dont le sommet soit en ce point, et qu'on trace ensuite successivement toutes les cordes qui sous-tendent cet angle dans la section conique, le système de ces cordes enveloppera une autre section conique, ayant pour un de ses foyers le sommet commun des angles dont il s'agit (*).

492. Je terminerai ce Chapitre, qu'on pourra peut-être me reprocher d'avoir trop étendu eu égard à l'objet de l'ouvrage, en montrant, par un dernier exemple, comment on peut rattacher directement à nos principes certaines questions d'angles qui leur paraissent tout à fait étrangères au premier aperçu.

Supposons qu'il s'agisse de résoudre ce problème :

Déterminer les pieds des normales abaissées d'un point quelconque P (*fig.* 79) *sur le contour d'une section conique donnée* (O), *ou, en d'autres termes, déterminer les points de la courbe qui sont les plus ou les moins éloignés de* P.

Ayant mené, à volonté, une tangente TM en un point quelconque T de la courbe, puis le diamètre indéfini OT qui passe par le point de contact; ayant de plus abaissé, du point donné P, une perpendiculaire indéfinie PK sur cette tangente, elle rencontrera le diamètre OT en un point X, qui variera avec la position de la tangente TM, en parcourant une certaine courbe dont les points d'intersection avec la proposée seront évidemment les points demandés; car, pour ces points, le pied K de la perpendiculaire sera confondu avec le point de contact T. Tout consiste donc à rechercher quelle est la nature de la courbe parcourue par le point X.

Pour cela, supposons qu'on décrive une circonférence de cercle, d'un rayon quelconque, autour du point P comme centre; elle rencontrera chaque perpendiculaire PK en un point T', pour lequel la tangente correspondante T'M sera parallèle à celle TM de la section conique; or, il résulte de là que la courbe des points X n'est autre chose (370) que le lieu des réci-

(*) Nous avons énoncé, sans démonstration, ce théorème et quelques-uns de ceux qui précèdent à la page 70 du tome VIII des *Annales de Mathématiques*.

proques des points M de la droite à l'infini du plan, par rapport au cercle et à la section conique proposée; donc cette courbe est elle-même une section conique passant par les centres O et P des deux premières.

La section conique des points X est évidemment une hyperbole équilatère dont les asymptotes sont parallèles aux axes principaux de la proposée; car, pour les tangentes aux extrémités de l'un de ces axes, le point générateur X passe à l'infini sur cet axe. Ainsi le problème proposé est susceptible, en général, de quatre solutions distinctes, qu'on obtiendra en recherchant les intersections de la courbe proposée et de l'hyperbole dont il s'agit (*).

Il est évident encore qu'à l'hyperbole équilatère on pourrait substituer également la courbe que décrit le pied K des perpendiculaires abaissées du point P sur chaque tangente de la proposée; mais cette courbe, au lieu d'être une section conique, serait du quatrième degré, ce qui montre comment le choix des auxiliaires qu'on emploie pour arriver à la solution d'un problème géométrique peut influer sur la simplicité des constructions auxquelles on doit parvenir.

On trouvera, au surplus, dans la *Géométrie organique* de Mac-Laurin, déjà plusieurs fois citée dans le cours de ce Chapitre, des recherches très-curieuses sur cette courbe, et en général sur celles décrites par les pieds des perpendiculaires abaissées, d'un point donné, sur les diverses tangentes d'une courbe géométrique quelconque.

CHAPITRE II.

DES POLYGONES INSCRITS ET CIRCONSCRITS A D'AUTRES POLYGONES OU A DES SECTIONS CONIQUES.

493. Au moyen des principes posés dans le III[e] Chapitre de la I[re] Section, on obtient sur-le-champ, comme on en a vu nombre d'exemples dans les

(*) Dans le cas particulier où le point donné P se trouve sur l'un des axes principaux de la courbe proposée, l'une des branches de l'hyperbole équilatère se confondra évidemment tout entière avec cet axe; donc l'autre branche se réduira à une simple ligne droite perpendiculaire à ce même axe, et le problème sera par conséquent du second degré seulement.

Au sujet de ces constructions, nous ferons observer que la *fig.* 74 indique, d'après la remarque faite à la fin de l'article 449, un moyen simple de trouver la normale au moyen de la tangente et des deux foyers.

sections suivantes, tout ce qui concerne les propriétés des angles et des triangles assujettis à se mouvoir suivant certaines lois; il nous reste maintenant à montrer comment on peut aisément étendre ces diverses propositions, qui sont en quelque sorte élémentaires, à des polygones d'un nombre quelconque de côtés, assujettis à des conditions analogues : or c'est à cet objet que nous voulons consacrer ce Chapitre, en ne nous arrêtant, toutefois, qu'aux théorèmes qui peuvent paraître les plus dignes d'intérêt.

Du lieu du sommet libre et des points de rencontre des côtés d'un polygone variable, dont les autres sommets parcourent des droites données, tandis que ses côtés pivotent sur des points fixes.

Considérons, en premier lieu, un quadrilatère quelconque *abcd* (*fig.* 80), et supposons que ses différents côtés *da*, *ab*, *bc*, *cd* soient assujettis à pivoter respectivement autour des points fixes p, p', p'', p''' de son plan, pris pour *pôles* (196, note), tandis que tous ses sommets, le dernier *d* excepté, soient astreints à glisser sur les trois droites fixes AB, BC, CD dont les directions leur appartiennent respectivement; je dis que le sommet libre *d* parcourra, dans toutes ses positions, une seule et même section conique, comme cela a lieu (204) pour le cas particulier du simple triangle.

Traçons, en effet, les droites pp', $p''p'''$ qui renferment les deux premiers et les deux derniers points fixes du quadrilatère *abcd*; joignons, par une nouvelle droite, le point P de leur intersection mutuelle avec le sommet *b* opposé au sommet libre du quadrilatère; elle ira déterminer, sur les côtés *ad*, *cd* adjacents à ce dernier sommet, deux points x et y, variables de position en même temps que le point *d*. Or le sommet x du triangle abx décrira évidemment (205), dans le mouvement général du quadrilatère, une ligne droite Bx dirigée vers le sommet B de l'angle des deux directrices AB et BC; car les deux autres sommets *a*, *b* de ce triangle s'appuient constamment sur les directrices dont il s'agit, tandis que ses côtés pivotent sur les trois points fixes p, p', P situés en ligne droite.

Par la même raison, le sommet y du triangle variable bcy, qui se trouve dans le même cas que le premier relativement aux directrices BC, CD et aux points fixes P, p'', p''', décrira aussi une ligne droite Cy, passant par le sommet C de l'angle formé par ces directrices. Donc le point mobile *d* peut être considéré comme le troisième sommet d'un triangle dxy, dont les deux premiers x et y glisseraient respectivement sur les droites connues Bx et Cy, tandis que ses trois côtés pivoteraient sur les points fixes p, p''', P; donc enfin (204)

le dernier sommet *d* du quadrilatère décrit une section conique, comme il s'agissait de le démontrer.

494. Cette marche de raisonnement, que nous avons empruntée à M. Brianchon (*Correspondance Polytechnique*, t. I, p. 309), sert aussi à prouver que, dans un quadrilatère variable *abcd* soumis aux conditions ci-dessus, le mouvement des côtés de l'angle *adc*, qui répond au sommet libre *d*, peut être remplacé par celui des côtés *dx*, *dy* du triangle *dxy*, qui pivotent sur les mêmes points fixes *p*, p''; c'est-à-dire que ce mouvement peut s'effectuer, au moyen des trois pôles *p*, p'', P et des deux directrices B*x* et C*y*, absolument de la même manière que si l'on employait les quatre pôles et les trois directrices qui répondent au quadrilatère *abcd*.

Supposons donc qu'au lieu d'un quadrilatère on considère un polygone quelconque, dont les côtés soient encore assujettis à pivoter respectivement sur des points fixes, tandis que tous ses sommets, un seul excepté, décrivent, chacun en particulier, des lignes droites données prises pour directrices; en appliquant à quatre côtés consécutifs de ce polygone, non adjacents au sommet libre, les constructions qui viennent d'être indiquées pour le cas particulier du quadrilatère, on aura remplacé le mouvement des côtés extrêmes par celui de deux côtés pareils, faisant partie d'un triangle qui exige un pôle et une directrice de moins que les quatre côtés correspondants du polygone : donc, en remplaçant ces quatre côtés par les trois côtés du triangle, on aura diminué d'une unité le nombre des côtés et, par suite, celui des points fixes et des directrices du polygone proposé.

D'ailleurs, dans le nouveau polygone ainsi obtenu, le mouvement du sommet libre étant le même que dans le polygone qu'il remplace, tout ce que l'on pourra démontrer sur l'un de ces polygones, relativement à la courbe décrite par ce sommet, sera immédiatement applicable à l'autre. Traitant donc, à son tour, le nouveau polygone comme le premier, et ainsi de suite, on voit que, par des constructions purement linéaires, on parviendra à assigner les trois pôles d'un dernier triangle, dont l'angle libre sera encore le même et pivotera, par ses deux côtés, sur les mêmes points fixes que dans le polygone primitif; d'où résulte ce théorème très-beau et très-général, dont Braikenridge et Mac-Laurin se sont disputé l'invention dans les *Transactions philosophiques* de la Société Royale de Londres pour l'année 1735 :

Si tous les côtés d'un polygone quelconque, tracé dans un plan, sont assujettis à pivoter sur autant de points fixes, pris pour pôles, tandis que ses divers sommets, un seul excepté, parcourent respectivement des droites données, prises

pour directrices, le sommet libre décrira, en vertu du même mouvement, une section conique passant par les deux points fixes ou pôles qui appartiennent à ses côtés.

495. En joignant, deux à deux, consécutivement les pôles ou points fixes $p, p', p'', \ldots$ (*fig.* 80), il est clair qu'on formera un nouveau polygone $pp'p''p''' \ldots$, auquel sera constamment *circonscrit* le polygone variable *abcd*..... Pareillement les directrices AB, BC, CD,...., forment, par leurs intersections consécutives, une portion de polygone ABCD..., à laquelle est *inscrite* la portion correspondante du polygone variable *abcd*...; donc on peut encore énoncer ainsi, d'une manière abrégée, le théorème qui précède :

Si un polygone plan quelconque se meut de façon qu'il demeure perpétuellement circonscrit à un autre polygone donné, de même espèce, et qu'il ait tous ses sommets, un seul excepté, sur les différents côtés d'un autre polygone de cette espèce, le sommet libre décrira dans son mouvement une ligne unique qui sera du second ordre seulement.

Supposons qu'on prolonge, jusqu'à leur intersection respective, deux côtés quelconques du polygone variable dont il s'agit; en faisant abstraction de tous les autres côtés compris entre ceux-là et ceux qui sont adjacents au sommet libre, on aura formé évidemment un nouveau polygone assujetti, en tout, aux mêmes conditions que le premier, et dont le sommet libre sera précisément le point d'intersection des deux côtés que l'on a prolongés en particulier ; donc, d'après ce qui précède, ce point d'intersection parcourra encore une section conique, et il en sera de même par conséquent de tous les autres points d'intersection appartenant aux différents côtés du polygone proposé ; ce qui permet d'énoncer ainsi, d'une manière beaucoup plus générale, le théorème qui précède :

Si m *lignes droites, situées arbitrairement sur un plan, sont assujetties à pivoter sur autant de points fixes, pris pour pôles, tandis que* $m-1$ *points d'intersection de ces droites, qui n'appartiennent, en tout ou en partie, ni aux trois sommets d'un même triangle, ni aux quatre sommets d'un même quadrilatère, etc., sont astreints à demeurer sur un égal nombre de droites fixes, prises pour directrices, tous les autres points d'intersection, au nombre de* $\frac{(m-1)(m-2)}{1.2}$, *décriront séparément des sections coniques, passant par les deux points fixes sur lesquels pivotent les deux droites qui appartiennent respectivement à ces différents points.*

496. Selon la remarque de Braikenridge, à qui l'on doit cet énoncé gé-

néral (*), énoncé qui lui aura sans doute été suggéré par celui d'une proposition analogue due à Pappus, et dont il sera fait mention un peu plus loin (498), le théorème subsiste, même quand les $m-1$ points d'intersection dont il s'agit sont choisis sur l'une des m lignes droites mobiles : or c'est ce qui est évident *à priori*, d'après le cas particulier (204) où l'on ne considère que trois lignes droites ou un triangle mobile. On voit d'ailleurs pourquoi nous exigeons, de plus que Braikenridge, et conformément à l'énoncé de Pappus, que les $m-1$ points qui doivent s'appuyer sur les directrices n'appartiennent ni aux sommets d'un même triangle, ni à ceux d'un même quadrilatère, etc.; car alors ils ne pourraient plus être censés appartenir (494) à un polygone variable de m côtés dont le dernier sommet serait libre.

Au surplus, rien n'est plus facile que de déterminer la tangente en un point quelconque de la section conique que décrit le sommet libre du polygone variable dont il s'agit; car, en recherchant deux autres points quelconques de la courbe, outre celui qui est donné, et les deux pôles par lesquels elle passe (494), la question se trouvera ramenée de suite, et par des constructions purement linéaires, à une autre que l'on sait déjà résoudre (206), en n'employant également que de simples intersections de lignes droites.

Cas pour lesquels le lieu des sommets libres et des points de rencontre des côtés s'abaisse au premier degré.

497. La courbe que parcourt le sommet libre du polygone se réduira évidemment à une simple ligne droite, toutes les fois que les deux conditions de l'article 205 se trouveront remplies par les pôles et les directrices du dernier triangle ; or c'est ce qui aura lieu nécessairement quand, pour une certaine position de ce triangle ou du polygone variable qu'il remplace, les deux côtés de l'angle libre se confondront à la fois avec la droite qui renferme les pôles correspondants à ces côtés.

D'après cela et quel que soit le polygone que l'on considère, on pourra toujours s'assurer *à priori*, d'une manière très-facile, si la courbe que parcourt son sommet libre se réduit en effet à une simple ligne droite : tout consistera à construire un polygone dont l'un des côtés, adjacents à ce sommet, passe par le pôle qui appartient à l'autre; car il devra arriver réciproquement que cet autre côté, obtenu au moyen du premier, se confonde également avec la droite qui renferme le premier et le dernier pôle.

(*) *Exercitatio geometrica de descriptione linearum curvarum*, p. 68.

Cette remarque, qui n'a point échappé à Mac-Laurin (*), résulte d'ailleurs directement de la loi de continuité et de l'observation de ce qui se passe alors dans la section conique que décrit en général le sommet libre ; car les deux côtés adjacents à ce sommet venant à se confondre, quant à la direction, en une seule et même droite avec celle qui renferme les deux pôles correspondants, ne donnent plus aucun point d'intersection distinct, ou plutôt ces côtés donnent à la fois tous les points qui appartiennent à la droite des pôles dont il s'agit ; en sorte que l'une des branches de la section conique, parcourue en général par le sommet libre du polygone, dégénère nécessairement en cette même droite : or il suit de là évidemment que l'autre branche de la courbe doit aussi se réduire à une ligne droite essentiellement distincte de la première.

Cette circonstance aura lieu, en particulier, quand les directrices concourront en un point unique de la droite qui renferme les pôles des côtés adjacents au sommet libre du polygone.

498. Supposons encore que tous les pôles ou points fixes des côtés du polygone soient situés sur une même ligne droite ; il est clair que la circonstance qui précède aura lieu, non-seulement pour ce polygone en particulier, mais encore pour tous ceux qu'on pourrait former par le prolongement de deux quelconques de ses côtés. Donc tous les sommets et tous les points d'intersection des côtés de ce polygone parcourront à la fois des lignes droites dans le mouvement général du système, en sorte qu'on aura ce beau théorème dû aux anciens :

Si m + 1 *lignes droites, tracées arbitrairement sur un plan, s'entrecoupent d'une manière quelconque, et qu'ayant rendu fixes les* m *points d'intersection qui appartiennent à l'une d'elles, choisie à volonté, on fasse mouvoir toutes les autres autour de ces points respectifs pris pour pôles, tandis que* m — 1 *points de leurs intersections mutuelles, qui n'appartiennent, en tout ou en partie, ni aux trois sommets d'un même triangle, ni aux quatre sommets d'un même quadrilatère, etc., sont astreints à demeurer sur un égal nombre de droites données, prises pour directrices, toutes les intersections restantes des droites mobiles, en nombre* triangulaire, *décriront séparément d'autres lignes droites, qui seront ainsi données de position en même temps que les directrices.*

499. Ce théorème général, dont l'énoncé se trouve rapporté, pour ainsi dire textuellement, dans la Préface du VII[e] Livre des *Collections mathéma-*

(*) *Voyez* l'endroit déjà cité (494) des *Transactions philosophiques.*

tiques de Pappus, au sujet du *Traité d'Euclide sur les Porismes*, paraît être une extension de diverses propositions contenues dans ce Traité. Cependant Pappus ajoute : « Il n'est pas vraisemblable qu'Euclide ait ignoré cette » extension, mais il n'aura voulu qu'en poser le principe; et, en effet, dans » tous les porismes, on n'aperçoit que les principes et les germes de la » multitude de propositions qu'il a découvertes; en sorte qu'il ne faut pas » considérer chacun de ces porismes sous le rapport de la différence de » position de lignes, mais bien sous celui de la différence qui peut exister » dans les conditions et dans les inconnues. »

Robert Simson, dans les *Transactions philosophiques* (année 1723), donna le premier, pour le cas du triangle et du quadrilatère, une démonstration du théorème de Pappus, qui fut ensuite reproduite, pour le cas général d'un polygone quelconque, dans ses œuvres posthumes (*Opera quædam reliqua*), et fait partie de son *Traité sur les Porismes*. Simon L'huilier reprocha depuis à Simson, dans ses *Éléments d'Analyse géométrique et d'Analyse algébrique*, de n'avoir pas fait mention du lieu des points de rencontre des diagonales du polygone, qu'il prétend également décrire des lignes droites aussi bien que les points d'intersection des côtés; mais, outre que l'estimable géomètre de Genève paraît ne pas avoir bien saisi le sens de l'énoncé de Pappus, les démonstrations qu'il prétend établir manquent encore de justesse et ne peuvent s'appliquer en toute rigueur qu'au cas particulier où toutes les directrices concourent en un même point, ainsi que nous le ferons voir tout à l'heure (509), au sujet d'une proposition analogue à celle qui vient de nous occuper.

Je pense, du reste, que cette digression ne pourra que faire plaisir au lecteur, attendu le haut degré d'intérêt qui s'attache à tout ce qui nous vient des anciens, et qu'il n'est pas inutile, pour les progrès même de la Géométrie pure, de faire connaître le point où ils étaient parvenus et celui où ils en sont restés.

500. Nous venons de déduire le théorème de Pappus du cas général où les points fixes ou pôles des côtés du polygone sont quelconques; mais on peut aussi le démontrer directement d'une manière très-simple, et qui va nous conduire à de nouvelles conséquences.

Prenons pour exemple le cas particulier d'un quadrilatère *abcd* (*fig.* 81), dont les trois premiers sommets *a*, *b*, *c* soient astreints à parcourir les droites ou directrices AB, BC, CD, tandis que ses quatre côtés pivotent respectivement sur les points fixes p, p', p'', p''' placés sur une même droite; la dé-

monstration s'étendra facilement à un polygone plan, d'un nombre de côtés quelconque, assujetti aux mêmes conditions.

Cela posé, prolongeons le premier côté ad de ce quadrilatère jusqu'à sa rencontre en m avec le troisième côté bc; les trois points fixes p, p', p'' étant en ligne droite, le sommet m du triangle mab s'appuiera constamment, dans le mouvement du quadrilatère, sur la droite fixe mB (205) passant par le sommet de l'angle ABC des directrices que parcourent les deux autres sommets a et b du triangle. Ainsi le quadrilatère mobile $abcd$ se trouve déjà remplacé par le triangle mcd, dont les côtés pivotent respectivement sur les trois points fixes p, p'', p''', et dont les sommets m et c s'appuient constamment sur les directrices données mB et CD; donc le troisième sommet d de ce triangle, ou le sommet libre du quadrilatère, parcourt lui-même une ligne droite AD donnée de position, et qui passe évidemment par le sommet D de l'angle des deux premières mB et CD.

Ce raisonnement s'étendrait aisément à un polygone d'un nombre de sommets quelconque, en répétant convenablement (494) les opérations sur ses côtés; donc le sommet libre de ce polygone, et, par suite (495), les divers points d'intersection des côtés décrivent tous des lignes droites, comme il s'agissait de le démontrer.

501. Puisque, d'après ce qui précède, les divers sommets du polygone $abcd$ décrivent à la fois des lignes droites, et que, d'un autre côté, les points fixes ou pôles p, p', p'', p''' sont eux-mêmes sur une ligne droite, il existera une certaine position de ce polygone pour laquelle les sommets se seront à la fois confondus avec les différents points a', b', c', d', où les directrices qui leur appartiennent respectivement rencontrent la droite pp''' des points fixes. Mais on a en général (145), quelle que soit la position du polygone par rapport à la transversale pp''', $pa.p'b.p''c.p'''d = pd.p'a.p''b.p'''c$; donc on a aussi, d'après la loi de continuité,

$$pa'.p'b'.p''c'.p'''d' = pd'.p'a'.p''b'.p'''c',$$

relation au moyen de laquelle on pourra déterminer directement, par le calcul, l'un quelconque des points qu'on vient de considérer sur la droite pp''', quand tous les autres seront connus.

Supposons qu'un polygone quelconque ait ses divers sommets appuyés sur autant de droites données dans son plan, ou, ce qui revient au même (495), supposons qu'il soit inscrit à un autre polygone d'un même nombre de côtés; supposons, de plus, qu'il existe sur le plan de ce polygone une droite qui rencontre ses côtés et ceux du polygone circonscrit en des points tels, que

la relation ci-dessus ait lieu; il résultera de ce qui précède qu'on pourra former une infinité de polygones inscrits analogues au premier, et dont les côtés passeront respectivement par les mêmes points de la transversale.

En supposant d'ailleurs que cette transversale passe à l'infini, il sera aisé de reconnaître ce que deviennent ces diverses propriétés, et on pourra même partir de là (105) pour arriver à la démonstration du cas général.

Des courbes enveloppes des côtés libres et des diverses diagonales du polygone.

502. Il serait facile de démontrer que les diverses diagonales du polygone *abcd*, qu'on vient de considérer dans le précédent article, roulent toutes sur des sections coniques, dans le mouvement commun du système; mais, pour plus de généralité, nous considérerons un polygone plan quelconque, dont tous les sommets soient astreints à parcourir autant de droites données comme directrices, tandis que tous ses côtés, à l'exception d'un seul, pivotent sur des points fixes entièrement arbitraires. Il est clair que le théorème en question revient à prouver que le côté libre de ce dernier polygone enveloppera, dans ses diverses positions, une seule et même section conique : or c'est ce qui résulte immédiatement du principe de l'article 494, combiné avec la *théorie des pôles et polaires réciproques* des sections coniques (229 et suivants).

Supposons, en effet, qu'ayant tracé à volonté un cercle ou une section conique sur le plan de la figure, on détermine le polygone qui est le réciproque polaire du proposé, ses différents côtés auront pour *pôles* (*) les sommets de ce dernier, et *vice versâ;* mais, par hypothèse, ces sommets demeurent sur des droites données de position; donc (195) les différents côtés du polygone réciproque pivoteront sur des points fixes, pôles de ces droites.

D'une autre part, tous les côtés du polygone proposé, un seul excepté, pivotent sur des points fixes; donc les sommets du polygone réciproque, dont ils sont les polaires, parcourront, un seul excepté, autant de droites fixes, polaires des points fixes du premier polygone : c'est-à-dire que le polygone réciproque sera tout à fait dans les circonstances de celui de l'article 494, en sorte que le sommet libre de ce polygone et les divers points d'intersection des côtés décriront séparément autant de sections coniques, passant par les points fixes qui servent de pivots aux côtés correspondants.

Mais le sommet libre dont il s'agit est le pôle du côté libre du polygone proposé, et les points de rencontre des différents côtés du polygone réci-

(*) *Voyez* la note de l'article 196.

proque sont (229) les pôles des diagonales de ce même polygone; donc ce côté et ces diagonales roulent, dans les positions qu'elles peuvent prendre, sur autant de sections coniques tangentes aux directrices respectives qui appartiennent aux extrémités de ce côté et de ces diagonales, c'est-à-dire qu'on a ce nouveau théorème :

Si tous les sommets d'un polygone plan quelconque sont astreints à se mouvoir sur autant de droites fixes, données dans ce plan, tandis que tous ses côtés, un seul excepté, pivotent respectivement sur des points fixes, le côté libre et les diverses diagonales de ce polygone rouleront, par suite du mouvement général de la figure, sur des sections coniques distinctes, tangentes aux deux droites fixes qui dirigent le mouvement de ce côté ou de ces diagonales respectives.

503. Ce théorème, que nous aurions pu énoncer d'une manière plus générale comme celui de l'article 495, est visiblement une extension de la propriété (210) due à M. Brianchon, et peut s'en déduire directement au moyen du raisonnement qui suit.

Considérons d'abord, comme ci-dessus (493), le cas particulier d'un quadrilatère *abcd* (*fig.* 82), dont les côtés *ab*, *bc*, *cd* pivotent autour des points fixes *p*, *p'*, *p''* respectivement, tandis que ses quatre sommets *a*, *b*, *c*, *d* sont astreints à parcourir les droites AD, AB, BC, CD données comme directrices; ce quadrilatère sera ainsi inscrit au quadrilatère simple ABCD formé par la rencontre mutuelle des quatre directrices. Or, il est d'abord évident que les deux diagonales *ac* et *bd* roulent sur des sections coniques (210), car elles sont les troisièmes côtés de deux triangles *abc*, *bcd* dont les deux autres côtés pivotent sur des points fixes, tandis que les sommets parcourent des droites données : reste donc à examiner la nature de la courbe qu'enveloppe, dans son mouvement, le côté libre *ad* du quadrilatère.

Soient tracées les droites indéfinies *pp'*, *p'p''* qui renferment les points fixes *p* et *p'*, *p'* et *p''*; par le point *x*, où le côté *bc*, opposé à *ad* et passant par *p'*, rencontre la diagonale AC du quadrilatère ABCD des directrices, et par chacune des extrémités *a* et *d* du côté libre *ad*, menons les droites indéfinies *ax*, *dx*; leurs directions iront rencontrer celles des droites *pp'*, *p'p''* aux points respectifs P et P', qui resteront invariables dans le mouvement du quadrilatère *abcd*.

En effet, le triangle *abx* étant assujetti à avoir ses sommets sur les droites respectives AB, AC, AD qui sont fixes et partent du même point A, tandis que ses deux côtés *ab* et *bx* pivotent sur les points fixes *p*, *p'*, le troisième côté *ax* de ce triangle devra (211) pivoter également sur un point fixe P

placé sur la droite pp' qui renferme les deux autres. En considérant le triangle mobile cdx, on prouverait de même que le côté dx passe constamment par un point fixe P′ placé sur la droite $p'p''$. Donc le côté libre ad du quadrilatère $abcd$ peut être considéré, dans toutes ses positions, comme le troisième côté d'un triangle adx, dont les deux autres passent constamment par les points fixes P, P′, tandis que ses sommets s'appuient constamment sur les directions des côtés du triangle invariable ACD; donc enfin (210) ce troisième côté enveloppe, dans son mouvement, une section conique tangente aux directrices AD et DC qui en dirigent les extrémités.

Nous venons de remplacer le mouvement du quadrilatère par celui d'un triangle, avec deux points fixes; la même construction, appliquée à trois côtés consécutifs quelconques d'un polygone de n côtés, et à la diagonale qui en joint les sommets extrêmes, servira évidemment à remplacer ce polygone par un autre de $n - 1$ sommets, avec un point fixe et une directrice de moins; celui-ci pourra, à son tour, être remplacé par un polygone de $n - 2$ côtés avec deux directrices et deux points fixes de moins, et ainsi de suite; donc, par des constructions successives, on parviendra à assigner les deux points fixes d'un dernier triangle, dont le côté libre sera le même, pour toutes les positions du système, que celui du polygone proposé, et dont les trois sommets s'appuieront sur trois droites fixes, du nombre desquelles se trouveront les deux directrices qui appartiennent au côté libre du polygone. Or de là résulte toute la proposition qu'il s'agissait de démontrer, et, de plus, un moyen pour déterminer linéairement (213) le point de contact du côté libre avec la section conique qu'il enveloppe dans ses diverses positions.

On voit aussi que, dans le théorème de l'article 494, toutes les diagonales du polygone enveloppent également des sections coniques dans le mouvement du système, excepté pourtant celles du sommet libre, qui décrivent, en général, des lignes du troisième ordre, comme il serait aisé de l'établir d'une manière directe. Des remarques analogues sont d'ailleurs applicables au théorème de l'article 502, relativement aux lieux des points de rencontre des côtés en général, et de ceux qui appartiennent au côté libre en particulier.

Cas où les courbes, enveloppes des côtés libres et des diagonales, se réduisent à des points; du lieu des points de rencontre des diagonales.

504. En partant de ce qui précède, on démontre sans peine, par les considérations déjà mises en usage ci-dessus (497), que la section conique

qu'enveloppe dans son mouvement le côté libre du polygone, se réduira à un point et ne pourra se réduire à un point que quand (211), dans une certaine position du polygone, ce côté libre deviendra nul, ou que sa direction indéfinie, d'ailleurs indéterminée, passera par le sommet de l'angle des directrices qui comprennent ses extrémités : or cette circonstance aura lieu, en particulier, lorsque, tous les points fixes étant situés sur une même droite, cette droite viendra à passer elle-même par le sommet de l'angle des directrices.

Cette circonstance ayant encore lieu évidemment lorsque les directrices des sommets du polygone vont toutes concourir en un même point, on en déduit ce nouveau théorème, non moins digne de remarque que celui de Pappus (498), dont il peut d'ailleurs être regardé comme une conséquence très-simple (502), au moyen de la théorie des polaires réciproques des sections coniques :

Si tous les sommets d'un polygone, mobile sur un plan, sont assujettis à parcourir autant de droites fixes concourant en un seul et même point; que, de plus, tous ses côtés, à l'exception d'un seul, se meuvent constamment autour de points fixes, le côté libre et les diverses diagonales du polygone pivoteront également sur d'autres points fixes.

505. Mais on peut aussi démontrer ce théorème directement par une marche déjà souvent employée dans ce qui précède, et qui offre sur la première l'avantage de faire connaître l'espèce de dépendance qui lie le point fixe du côté libre, ou de chaque diagonale, à ceux qui appartiennent aux divers autres côtés.

Considérons, en premier lieu, le quadrilatère *abcd* (*fig.* 83), dont les sommets s'appuient respectivement sur les droites fixes SA, SB, SC, SD partant du même point S, et soient p, p', p'' les points donnés autour desquels doivent tourner les trois premiers côtés *ab*, *bc*, *cd* de ce quadrilatère; tirons la diagonale *ac*, son prolongement ira rencontrer, quelque part en un point P, la droite qui renferme les deux pôles p, p' appartenant aux côtés adjacents à cette diagonale. Or il est visible que le point P demeurera constamment le même pour les diverses positions du quadrilatère, car le triangle *abc* a ses sommets appuyés sur trois droites dirigées vers un même point S (211); donc aussi le côté *ad* du triangle *adc*, dont les sommets s'appuient sur trois droites dirigées vers S, pivote constamment sur un point fixe p''', placé sur la droite qui renferme P et p''.

D'ailleurs on démontrerait, de la même manière, que la seconde diagonale

bd du quadrilatère pivote sur un point fixe P′ placé sur la droite $p'p''$; donc enfin le côté libre *ad* et les diagonales de ce quadrilatère pivotent sur des points fixes, comme il s'agissait de le démontrer.

Supposons maintenant que les trois premiers côtés *ab*, *bc*, *cd* du quadrilatère *abcd* fassent partie de ceux d'un polygone quelconque assujetti aux mêmes conditions, il résultera de ce qui précède qu'on pourra d'abord remplacer le mouvement des deux côtés *ab*, *bc* par celui de la diagonale *ac* pivotant sur le point P, puis remplacer le mouvement des trois côtés *ab*, *bc*, *cd* par celui de la seconde diagonale *ad* pivotant sur le point fixe p'', et ainsi de suite; on arrivera donc à un dernier triangle renfermant le côté libre du polygone, lequel pivotera encore sur un point fixe.

Ainsi toutes les diagonales et le côté libre du polygone pivoteront sur des points fixes : or il existe entre ces points fixes une relation fort simple, et qu'il ne sera pas inutile d'examiner.

506. Considérons en effet le premier triangle *abc*; à cause de la transversale fixe pp'P, on aura (145), pour toutes les positions de ce triangle,

$$pa.p'b.\mathrm{P}c = pb.p'c.\mathrm{P}a;$$

le triangle suivant *acd* donnerait de même

$$p'''d.p''c.\mathrm{P}a = p'''a.p''d.\mathrm{P}c,$$

et ainsi de suite, pour les autres triangles formés par les diverses diagonales partant du même sommet *a* du polygone.

Multipliant donc entre elles toutes ces relations, après les avoir disposées d'une manière convenable, telles que celles qui précèdent, tous les segments appartenant aux diverses diagonales disparaîtront du résultat, et il ne restera plus qu'une relation entre les segments relatifs aux côtés du polygone et aux points fixes situés sur ces côtés, laquelle exprimera évidemment que *le produit de tous ceux de ces segments qui n'ont point d'extrémités communes est égal au produit de tous les autres, pour les diverses positions du polygone.*

Il est clair que la même relation devra avoir lieu entre les segments relatifs aux points fixes ou pôles des différents côtés d'un polygone partiel quelconque formé, dans le proposé, par une ou plusieurs diagonales.

Enfin la relation analogue a lieu évidemment (17) entre les sinus des angles projetants formés, autour du point S, et par les directrices, et par les droites S*p*, S*p*′,..., qui appartiennent aux divers points fixes; ce qui fait voir que quand toutes ces droites sont données, à l'exception d'une seule, la relation dont il s'agit suffira pour déterminer la grandeur des angles que celle-

ci fait avec chacune de celles SA, SB,..., qui lui sont adjacentes, d'après l'ordre de succession des côtés du polygone.

507. Réciproquement, si l'on prend sur les différents côtés d'un polygone plan quelconque des points fixes tels, que la relation ci-dessus ait lieu entre les segments correspondants formés sur ces côtés, il pourra arriver qu'en faisant mouvoir ce polygone de façon que tous ses sommets, un seul excepté, parcourent des droites données dirigées vers un même point du plan, le sommet qui reste libre décrive, dans le mouvement général du système, une dernière ligne droite passant également par le point dont il s'agit. Tout dépendra de la situation respective des points fixes à l'égard des directrices.

En effet, il est facile de prouver, d'après ce qui précède, que cela aura lieu nécessairement : 1° toutes les fois que, le nombre des côtés du polygone étant pair, il y aura un nombre pair de points fixes placés sur le prolongement des côtés, ou qu'il n'y en aura aucun ; 2° toutes les fois que, le nombre de ces côtés étant impair, il y aura aussi un nombre impair de points placés sur les prolongements de ces côtés, c'est-à-dire au moins un.

Dans tout autre cas, le sommet libre parcourra nécessairement une section conique en général, et non plus une simple ligne droite ; car alors, en opérant comme ci-dessus (505 et 506), on trouvera un dernier triangle *acd* dont les pôles P, p'', p''' satisferont bien à la relation proposée, mais ne seront pas, pour cela, sur une même droite (160). Quant aux autres points de rencontre des côtés du polygone, ils décriront toujours des sections coniques, et il en sera de même des points de concours des diagonales.

Par exemple, dans le quadrilatère *abcd* (*fig.* 83), le point x de rencontre des deux côtés *ab* et *cd* décrira une section conique ; car le triangle mobile *bcx* a deux de ses sommets appuyés sur les directrices SB, SC, tandis que ses côtés pivotent sur des points fixes quelconques p, p', p'' (204).

Pareillement, le point d'intersection y des diagonales *ac*, *bd* de ce quadrilatère étant le troisième sommet du triangle mobile *bcy*, dont les côtés pivotent sur les trois points fixes quelconques p', P, P', tandis que ses sommets b, c s'appuient sur les directrices SB, SC, ce point y, dis-je, décrit nécessairement aussi une section conique.

Enfin, on remarquera que, dans les cas généraux des articles 494 et 502, les points d'intersection des diagonales cessent de décrire des sections coniques.

508. Tous ces raisonnements étant indépendants de l'hypothèse que la figure soit entièrement située sur un plan, on voit que les propriétés et les

remarques qui précèdent subsistent également pour un polygone gauche quelconque dans l'espace, assujetti aux mêmes conditions ; de sorte que, dans ce cas par exemple, *toutes les diagonales et tous les côtés pivoteront encore sur des points fixes* (505).

Quant à ce qui concerne les points d'intersection de deux côtés et de deux diagonales quelconques, comme alors ils cessent en général d'être possibles, les courbes qui leur correspondent n'ont plus lieu ; mais, si l'on conçoit la droite qui, passant par un point fixe pris arbitrairement dans l'espace, s'appuierait à la fois, et à chaque instant, sur les deux côtés ou sur les deux diagonales que l'on considère, il sera aisé de prouver qu'elle décrit alors une *surface conique du second degré*.

Il existe une circonstance générale pour laquelle les différents points fixes, pris sur la direction des côtés du polygone mobile dans l'espace, satisfont à la condition ci-dessus prescrite (507) : c'est lorsque tous ces points se trouvent appartenir à un même plan (146). Alors on peut tracer une infinité de polygones fermés, quoique gauches, dont les sommets s'appuient sur autant de directrices fixes, concourant en un même point quelconque de l'espace, et dont les diverses diagonales pivotent par conséquent sur des points fixes placés dans le plan de ceux qui appartiennent aux différents côtés. Mais revenons au cas particulier où la figure est tout entière dans un seul et même plan.

509. Il existe alors une circonstance, non moins remarquable que celle qui précède, pour laquelle les conditions de l'article 507 sont encore satisfaites : c'est lorsque tous les points fixes des côtés du polygone sont situés sur une même droite. Dans ce cas, les points sur lesquels pivotent les diagonales sont évidemment situés (505) sur cette droite, et par conséquent les intersections des diagonales et des côtés du polygone, au lieu de décrire des sections coniques (507), décrivent (501) d'autres lignes droites passant par le point de concours commun des directrices.

En terminant ce sujet, nous ferons remarquer que toutes les propositions qui précèdent doivent subsister également, quand deux ou plusieurs des lignes droites qui dirigent les sommets du polygone, et quand deux ou plusieurs des points fixes sur lesquels pivotent les côtés, viennent à se confondre en une seule et même droite, ou en un seul et même point fixe ; ce qui donne lieu à un grand nombre de relations et de propriétés fort remarquables, sur lesquelles nous regrettons de ne pouvoir insister.

Supposons, par exemple, que toutes les directrices se réduisent à deux,

et qu'on leur inscrive une infinité de polygones, dont les sommets s'appuient alternativement sur l'une et sur l'autre de ces droites, et dont tous les côtés, un seul excepté, passent respectivement par des points donnés ; le côté qui reste libre passera lui-même (505) par un dernier point invariable de position comme tous les autres, et qui, dans le cas particulier où ces points seront en ligne droite, se trouvera lui-même placé sur cette droite, etc.

Des courbes enveloppes du côté libre et des diverses diagonales d'un polygone variable inscrit à une conique et dont les autres côtés pivotent sur des points fixes quelconques.

510. Les propriétés qui viennent de nous occuper en dernier lieu (509) peuvent s'étendre, de la manière suivante, au cas où l'on remplace le système de deux directrices uniques par une section conique quelconque :

Soit abcde...f (*fig.* 84), *un polygone quelconque inscrit à une section conique ; prenons, sur ses différents côtés* ab, bc, cd,..., *des points fixes arbitraires* p, p', p'',..., *excepté sur le dernier côté* af *qui restera libre; supposons enfin que le polygone vienne à se mouvoir d'après ces conditions, le côté libre* af *et les diverses diagonales* ac, bd, ae,..., *envelopperont, dans le mouvement général du système, certaines courbes, que je dis être autant de sections coniques ayant un double contact, réel ou idéal, avec la proposée.*

La chose est évidente (431) pour les diagonales *ac*, *bd*, *ce*,..., qui joignent les extrémités de deux côtés consécutifs quelconques qui ne sont pas libres, ou qui sont astreints à pivoter sur des points fixes. Voyons comment elle peut le devenir aussi pour une diagonale quelconque *ae*, et, par suite, pour le côté libre *af* lui-même.

Pour cela, considérons d'abord le pentagone *abcde* formé par les quatre premiers côtés du polygone en question et la diagonale *ae* qui joint son premier et son cinquième sommet. Par les points fixes p et p' des deux premiers côtés *ab*, *bc*, faisons passer la droite indéfinie pp' ; traçons pareillement celle qui passe par les points fixes, p'', p''', des deux côtés suivants, elle coupera la première en un point P. Par ce point et le sommet c du pentagone, opposé à *ae*, menons, pour chaque position du système, la droite Pc, qui ira rencontrer la courbe proposée au nouveau point x; traçons enfin les cordes ax et ex, dont la première rencontrera pp', prolongée, en P', et l'autre $p''p'''$ en P'', nous aurons ainsi formé les quadrilatères inscrits *abcx*, *cdex*, dont les trois premiers côtés pivotent constamment sur des points fixes situés en ligne droite ; donc (180 et 432) les quatrièmes côtés ax, ex de ces quadrilatères

pivoteront aussi constamment sur des points invariables P′ et P″ placés sur ces mêmes droites.

Il suit de là encore que le mouvement de la diagonale *ae* du polygone proposé *abcd...f*, c'est-à-dire celui du cinquième côté du pentagone *abcde*, est le même que celui du côté libre du triangle inscrit *axe* dont les deux autres côtés *ax*, *ex*, pivotent sur les points fixes P′ et P″; donc (431) cette diagonale roule sur une section conique. Donc aussi le mouvement de la portion *abcde* du polygone proposé peut être remplacé par celui de l'angle inscrit *axe* dont les côtés pivotent sur les points fixes P′ et P″; en sorte que le polygone proposé *abcd...f* se trouvera lui-même remplacé par un polygone *axe...f*, qui a deux côtés et deux points fixes de moins que le premier, et dont la partie commune avec celui-ci se mouvra absolument d'après les mêmes conditions et suivant les mêmes lois.

En traitant, à son tour, le nouveau polygone comme le premier, on aura diminué de quatre le nombre des côtés et des points fixes; et par conséquent, si le polygone proposé est d'un nombre de côtés impair, on arrivera, en continuant d'opérer ainsi, à remplacer ce polygone par un triangle inscrit avec deux points fixes, dont le côté libre sera constamment le même; donc alors ce côté roulera sur une section conique, comme nous l'avions annoncé.

Au contraire, le nombre des côtés du polygone proposé étant pair, on finira par arriver à une figure de quatre côtés *afex*, avec trois points fixes, à laquelle il sera impossible d'appliquer la construction qui précède, puisqu'elle exige au moins quatre points fixes et cinq côtés. En conséquence, il faudra, de toute nécessité, recourir alors à un autre procédé, qui n'ait pas le même inconvénient que le premier.

511. Soient donc *abcd* (*fig.* 85) le quadrilatère inscrit dont il s'agit, *p*, *p′*, *p″* les points fixes sur lesquels doivent pivoter constamment ses trois premiers côtés *ab*, *bc*, *cd*; soit, en outre, PP″ la *polaire* du point fixe *p″* du troisième côté, rencontrant en P la droite *pp′* qui passe par les points fixes des deux premiers. Ayant mené, par le point P et par le troisième sommet *c* du quadrilatère, la droite indéfinie P*c* rencontrant de nouveau la courbe proposée en *x*, et ayant tracé les cordes *ax* et *dx*, la première ira couper *pp′* prolongé au point P′, et la seconde PP″ au point P″, qui demeureront, l'un et l'autre, invariables dans les diverses positions que pourra prendre le quadrilatère inscrit *abcd*.

La chose est d'abord évidente pour le point P′, car les trois premiers côtés

du quadrilatère *abcx* pivotent respectivement sur les points fixes p, p', P situés en ligne droite, en sorte que le côté libre *ax* doit de même (432) pivoter sur un dernier point fixe placé sur cette droite. Or, elle ne l'est pas moins pour le point P''; car les deux points P et p'', sur lesquels pivotent les côtés *cx* et *cd* du triangle inscrit *cdx*, étant tels, d'après ce qui précède, que la polaire de l'un quelconque d'entre eux passe réciproquement par l'autre, le troisième côté *dx* du triangle doit aussi passer constamment (192) par un dernier point fixe placé sur la polaire PP'' de p''. Donc enfin le quadrilatère mobile *abcd* peut être remplacé par le triangle inscrit *axd*, dont les côtés *ax*, *dx* pivotent constamment sur les points fixes P' et P'', et dont le côté libre *ad* est précisément le même que celui du quadrilatère.

Concluons de là et de tout ce qui précède que, quel que soit le polygone inscrit que l'on considère, on parviendra toujours, par des constructions successives, à assigner les deux points fixes d'un dernier triangle, dont le côté libre prendra successivement toutes les positions du côté libre du polygone en question; en sorte que ce même côté roulera, dans tous les cas, sur une section conique (431) ayant un double contact avec la proposée, suivant la droite qui renferme les deux derniers points fixes; et, comme chaque diagonale du polygone proposé divise ce polygone en deux autres, dont l'un est en tout assujetti aux mêmes conditions que le premier, et a la diagonale en question pour côté libre, on voit que cette diagonale et toutes ses semblables doivent rouler aussi sur des sections coniques, ainsi qu'il s'agissait de le démontrer.

Enfin les procédés qu'on vient de mettre en usage pourront également servir, dans tous les cas, à faire trouver la sécante de contact de la section conique proposée et de celle qu'enveloppe, dans son mouvement, le côté libre du polygone que l'on considère.

512. Quant aux courbes parcourues par les divers points d'intersection des côtés, il est possible de prouver qu'elles sont en général du quatrième degré; mais cette discussion nous jetterait dans des longueurs que nous voulons éviter, et n'offrirait pas en elle-même assez d'intérêt. Nous ferons d'ailleurs connaître, un peu plus loin, quelques-unes des circonstances où la courbe s'abaisse à un degré inférieur de deux unités.

On remarquera, sans doute, qu'il existe une singulière analogie entre la marche de raisonnement que nous venons de mettre en usage, et celle par laquelle nous sommes parvenus précédemment à établir les diverses propriétés des polygones variables inscrits ou circonscrits à d'autres polygones.

Avant d'arriver à ce mode particulier de démonstration pour les sections coniques, nous nous étions servi du principe de l'article 439, dont l'application à la proposition qui vient de nous occuper est assez évidente pour qu'il suffise de la signaler.

Cas où les courbes enveloppes se réduisent à des points, et où les pôles des côtés sont en ligne droite.

513. La section conique, qu'enveloppe dans son mouvement le côté libre *af* du polygone inscrit à la proposée, se réduira évidemment à un point (437) quand les points fixes du dernier triangle, obtenu au moyen des constructions ci-dessus (510), seront tels que « l'un quelconque d'entre eux » sera le pôle d'une droite passant par l'autre, » ou lorsque les trois points fixes du dernier quadrilatère (511) seront situés sur une même droite (432). Ainsi, en recherchant ces trois ou ces deux derniers points fixes, il sera toujours facile de s'assurer directement, et à l'aide de constructions purement linéaires, si la courbe enveloppée par le côté libre du polygone se réduit effectivement à un point unique.

Il existe une circonstance générale, très-remarquable et très-facile à reconnaitre *à priori*, où cette réduction a lieu, c'est lorsque, le polygone étant d'un nombre pair de côtés, les points fixes sur lesquels ces côtés pivotent, à l'exception du dernier, se trouvent tous distribués sur une même ligne droite.

Considérons, par exemple, l'hexagone inscrit *abcdef* (*fig.* 86), dont les côtés successifs *ab*, *bc*, ..., *ef* pivotent respectivement sur les points fixes $p, p', \ldots, p^{\text{iv}}$ situés en ligne droite, à l'exception du dernier côté *af* qui reste libre; traçons la diagonale *ad*, formant avec les trois premiers côtés le quadrilatère inscrit *abcd*. Puisque les trois points fixes p, p', p'' sont en ligne droite, le côté *ad* de ce quadrilatère passera lui-même (432), dans toutes ses positions, par un quatrième point fixe P, placé sur la droite pp'' des premiers. Par la même raison, si l'on considère le quadrilatère suivant *adef*, son côté libre *af*, qui est le même que celui de l'hexagone proposé, pivotera constamment sur un point fixe p^{v} placé également sur la droite qui renferme tous les autres, comme il s'agissait de le démontrer.

Or il est visible que la même démonstration s'appliquera à un polygone quelconque, d'un nombre pair de côtés, avec un point fixe de moins qu'il y a de côtés; car on pourra toujours le partager en une suite de quadrilatères, par des diagonales partant toutes du premier sommet *a* du polygone

et qui pivoteront respectivement sur autant de points fixes placés sur la droite pp''; donc la proposition qui nous occupe a lieu dans toute sa généralité, c'est-à-dire que :

Un polygone quelconque, d'un nombre pair de sommets, étant inscrit à une section conique, si on vient à le faire varier de façon que, demeurant constamment inscrit à la courbe, tous ses côtés, un seul excepté, pivotent sur autant de points fixes placés sur une même droite, le dernier côté pivotera également sur un point fixe placé sur cette droite.

514. Considérons maintenant un polygone inscrit *abcde*, d'un nombre impair de côtés, assujetti aux mêmes conditions, et soit *ae* son côté libre : en traçant la diagonale *ad*, qui en retranche le triangle *ade* dans lequel se trouve compris le côté *ae*, il restera un polygone *abcd*, d'un nombre pair de sommets et dont tous les côtés, excepté *ae*, pivoteront sur des points fixes placés sur la droite pp''. Donc, d'après le théorème qui précède, le côté libre *ad* de ce polygone pivotera lui-même sur un dernier point fixe P, placé sur la droite dont il s'agit; et partant le triangle inscrit *ade* sera tel, que deux de ses côtés, *ad* et *de*, pivoteront sur les points fixes P, p'', d'ailleurs indépendants entre eux. Donc enfin le troisième côté *ae* ou le côté libre du polygone *abcde*, au lieu de pivoter comme ci-dessus sur un point fixe, roulera (431) sur une section conique ayant un double contact avec la proposée, suivant la droite pp'' des points fixes.

Cela posé, prenons qu'ayant inscrit à une section conique, selon les conditions qui précèdent, un polygone quelconque d'un nombre de côtés pair ou impair, on numérote ses différents sommets suivant la série des nombres naturels, de façon que les sommets adjacents au côté libre soient, l'un le premier, et l'autre le dernier de cette série; il est évident que, en joignant par un ligne droite deux sommets quelconques portant des numéros dont l'un soit pair et l'autre impair, cette droite partagera le polygone en deux autres, dont l'un au moins aura un nombre pair de sommets et sera assujetti aux mêmes conditions que le proposé; donc la droite dont il s'agit pivotera sur un point fixe. Au contraire, toute diagonale qui joint deux sommets de numéros à la fois pairs ou impairs, appartenant nécessairement à des polygones partiels assujettis aux mêmes conditions que le proposé et dont le nombre des sommets est impair, roulera dans toutes ses positions, selon ce qui précède, sur une section conique ayant un double contact avec la proposée.

Si donc nous nommons sommets *de même espèce* ceux qui portent des

numéros à la fois pairs ou à la fois impairs, et au contraire sommets *d'espèces différentes* ceux qui portent des numéros non à la fois pairs ou impairs, nous pourrons énoncer le théorème général qui suit :

Un polygone quelconque étant inscrit à une section conique, si l'on vient à faire glisser ses sommets sur la courbe, de façon que tous ses côtés, un seul excepté, pivotent sur autant de points fixes placés sur une même droite, il arrivera que, 1° toute droite qui réunira deux sommets d'espèces différentes pivotera sur un point fixe placé sur la droite qui renferme déjà ceux qui appartiennent aux différents côtés; 2° toute droite qui réunira, au contraire, deux sommets de même espèce roulera sur une section conique ayant un double contact avec la proposée, suivant la droite des points fixes dont il s'agit.

Propriétés des polygones inscrits aux sections coniques, d'un nombre pair de sommets.

515. Puisque, dans le cas où le polygone inscrit *abcdef* a un nombre pair de sommets, tous les côtés sont susceptibles de pivoter à la fois sur des points fixes, placés sur une même droite pp'', et que l'un quelconque d'entre eux se trouve déterminé dès l'instant où l'on connait tous les autres, il doit exister une relation, analogue à celle de l'article 501, entre les diverses distances qui lient ces points, soit entre eux, soit à la courbe.

Nommons, en effet, t et t' les points où la droite pp'' rencontre, en général, la section conique; on aura d'abord, en tant que cette droite est une transversale dans le polygone *abcdef* (145),

$$pa.p'b\ p''c.p'''d.p^{\text{iv}}e.p^{\text{v}}f = pb.p'c.p''d.p'''e.p^{\text{iv}}f.p^{\text{v}}a,$$

relation qui, en vertu de la loi de continuité, doit avoir lieu, quelle que soit la position particulière du polygone à l'égard des points fixes et de la courbe.

Or, quand l'un des sommets vient à être pris sur la droite pp'', tous les autres s'y trouvent nécessairement aussi, et se confondent alternativement avec les points t et t' : par exemple, le sommet a étant appliqué en t, le suivant b le sera en t', le sommet c le sera à son tour en t, et ainsi de suite alternativement. Donc on aura, d'après l'observation qui précède,

$$pt.p't'.p''t.p'''t'.p^{\text{iv}}t.p^{\text{v}}t' = pt'.p't.p''t'.p'''t.p^{\text{iv}}t'.p^{\text{v}}t,$$

relation qu'on peut écrire ainsi :

$$\frac{tp\ tp''.tp^{\text{iv}}}{tp'.tp'''.tp^{\text{v}}} = \frac{t'p.t'p''.t'p^{\text{iv}}}{t'p'.t'p'''.t'p^{\text{v}}},$$

et d'où résulte ce théorème, qui est une extension de l'un de ceux exposés, art. 177, sur le quadrilatère inscrit :

Si, ayant inscrit à une section conique un polygone quelconque d'un nombre pair de côtés, on trace à volonté une transversale indéfinie rencontrant la courbe en deux points, le produit de tous les segments interceptés sur cette transversale entre l'un de ces points et chacun des côtés de rang pair du polygone, sera, au produit semblable des segments formés, à partir de ce point, par les côtés de rang impair, dans un rapport qui restera le même pour le second de ces points.

516. Supposons que l'un des côtés du polygone devienne infiniment petit, sa direction sera tangente à la courbe, et le polygone se trouvera réduit, en faisant abstraction de ce côté, à un polygone d'un nombre impair de sommets, ce qui fait voir que la proposition peut aussi s'étendre à un polygone de rang impair, pourvu qu'on en modifie convenablement l'énoncé.

La proposition subsistant de même toutes les fois qu'on remplace les différents côtés du polygone inscrit par des tangentes à la courbe, il sera facile d'en déduire un grand nombre de corollaires.

Par exemple : ayant inscrit un polygone quelconque à une section conique, si on lui en circonscrit un autre qui ait pour points de contact les sommets du premier, on pourra considérer l'ensemble de ces polygones comme un nouveau polygone d'un nombre de côtés double, et par conséquent d'un ordre pair, pour lequel la relation ci-dessus aura lieu entre les différents segments appartenant aux côtés de rang impair, qui seront, si l'on veut, tous ceux du polygone inscrit, et les segments analogues des côtés de rang pair qui seront, par là même, ceux du polygone circonscrit. Si, en outre, les deux polygones sont de rang pair, on pourra faire disparaître de la relation ci-dessus, et au moyen de celle qui appartient au polygone inscrit, tous les segments relatifs aux côtés, soit de rang pair, soit de rang impair, de ce dernier polygone, etc.

517. Ces propositions pourraient d'ailleurs s'établir directement, au moyen de celle qui leur correspond pour le cas particulier du quadrilatère (177). En effet, le polygone *abcdef* ayant un nombre pair de côtés, on pourra le partager exactement en plusieurs quadrilatères *abcd*, *adef*,..., par des diagonales *ad*,..., partant d'un même sommet *a*; or, en écrivant pour chaque quadrilatère la relation qui lui appartient, puis multipliant entre elles toutes ces relations dans un ordre convenable, les divers segments qui correspondent aux intersections des diagonales et de la transversale pp'' disparaîtront, et il ne restera plus qu'une relation entre ceux qui sont relatifs

aux côtés mêmes du polygone inscrit, laquelle sera précisément la relation ci-dessus énoncée (515).

On voit, d'après cela, que nous aurions pu partir du principe de l'article 177 pour établir celui de l'article 513. Car, la relation qui vient d'être démontrée apprenant que l'un quelconque des points p, p', p'',..., est connu quand les autres le sont, il en résulte immédiatement qu'en inscrivant à la courbe une suite de polygones de rang pair, dont les côtés passent respectivement par les points dont il s'agit, à l'exception d'un seul, ce dernier côté devra passer de lui-même par le point restant.

Il est évident encore que de ces diverses propriétés on déduirait sur-le-champ celles des quadrilatères, des pentagones et des hexagones inscrits ou circonscrits aux sections coniques qui nous ont déjà occupés dans le II[e] Chapitre de la Section II.

518. Les polygones inscrits d'un nombre pair de côtés, coupés par une transversale quelconque, jouissent de plusieurs autres propriétés dignes de remarque.

Supposons que la transversale pp'' se meuve parallèlement à elle-même sur le plan de la section conique, on aura évidemment (35), K, K', K'',..., étant des constantes,

$$
\begin{aligned}
pt.pt' &= \mathrm{K}.pa.pb, & p't.p't' &= \mathrm{K}'.p'b.p'c,\\
p''t.p''t' &= \mathrm{K}''.p''c.p''d, & p'''t.p'''t' &= \mathrm{K}'''.p'''d.p'''e,\\
p^{\text{iv}}t.p^{\text{iv}}t' &= \mathrm{K}^{\text{iv}}.p^{\text{iv}}e.p^{\text{iv}}f, & p^{\text{v}}t.p^{\text{v}}t' &= \mathrm{K}^{\text{v}}.p^{\text{v}}a.p^{\text{v}}f.
\end{aligned}
$$

Multipliant séparément entre elles toutes les équations de la première colonne et toutes celles de la seconde; divisant ensuite, l'une par l'autre, les deux nouvelles équations ainsi obtenues, il viendra :

$$\frac{pt.pt'.p''t.p''t'.p^{\text{iv}}t.p^{\text{iv}}.t'}{p't.p't'.p'''t.p'''t'.p^{\text{v}}t.p^{\text{v}}t'} = \frac{\mathrm{K}.\mathrm{K}''.\mathrm{K}^{\text{iv}}.pa.pb.p''c.p''d.p^{\text{iv}}e.p^{\text{iv}}f}{\mathrm{K}'.\mathrm{K}'''.\mathrm{K}^{\text{v}}.p'b.p'c.p'''d.p'''e.p^{\text{v}}a.p^{\text{v}}f}.$$

Mais la transversale pp'' se mouvant parallèlement à elle-même, les rapports pa à $p^{\text{v}}a$, pb à $p'b$, $p''c$ à $p'c$,..., $p^{\text{iv}}f$ à $p^{\text{v}}f$, qui se trouvent multipliés entre eux dans le second membre de cette équation, demeurent évidemment constants; donc ce second membre est lui-même constant, et par conséquent, en le représentant par C^2, on pourra écrire ainsi notre première relation :

$$\frac{tp.tp''.tp^{\text{iv}}}{tp'.tp'''.tp^{\text{v}}} \times \frac{t'p.t'p''.t'p^{\text{iv}}}{t'p'.t'p'''.t'p^{\text{v}}} = \mathrm{C}^2;$$

d'où l'on tire, à cause de la relation déjà établie ci-dessus (515),

$$\frac{tp \cdot tp'' \cdot tp^{\text{iv}}}{tp' \cdot tp''' \cdot tp^{\text{v}}} = \text{C}, \qquad \frac{t'p \cdot t'p'' \cdot t'p^{\text{iv}}}{t'p' \cdot t'p''' \cdot t'p^{\text{v}}} = \text{C},$$

c'est-à-dire que :

Si l'on inscrit à une section conique un polygone quelconque d'un nombre pair de côtés, et qu'on mène une transversale parallèle à un axe fixe, laquelle coupe cette courbe et chacun des côtés prolongés au besoin, le produit de tous les segments comme facteurs, entre un des points où la courbe est coupée par la transversale, et chacun des côtés pairs du polygone, est en raison donnée avec le produit de tous les segments comme facteurs, interceptés entre le même point de la courbe et chacun des côtés impairs.

519. Ce théorème a été démontré par M. Carnot, aux pages 449 et suivantes de la *Géométrie de position*, en partant de l'un de ses cas particuliers établi directement au moyen du calcul algébrique. En y appliquant la remarque de l'article 516, ainsi que l'a fait lui-même M. Carnot, on voit qu'il s'étend au cas où l'on suppose qu'un ou plusieurs des côtés du polygone deviennent infiniment petits ou tangents à la courbe, ce qui conduit immédiatement, comme corollaires, aux théorèmes analogues de l'endroit déjà cité.

Au surplus, toutes les propositions qui ont été démontrées dans ce qui précède, sur les polygones d'un nombre pair de côtés inscrits aux sections coniques, demeurent également applicables au cas particulier où l'on remplace la section conique par le système de deux droites quelconques tracées dans un plan ; ce qui conduit à quelques-unes des conséquences déjà établies directement (509), d'après le cas beaucoup plus général où les sommets du polygone, d'ailleurs en nombre pair ou impair, s'appuient sur autant de droites fixes dirigées vers un même point du plan.

Du lieu des points de rencontre des côtés et des diagonales d'un polygone variable inscrit à une section conique sous les conditions déjà prescrites dans ce qui précède.

520. Revenons maintenant à notre polygone mobile inscrit à une section conique quelconque, et dont tous les côtés, un seul excepté, sont assujettis à pivoter sur des points fixes placés en ligne droite; et, après avoir examiné la nature des lignes qu'enveloppent le côté libre et les diagonales de ce polygone, occupons-nous de celles que parcourent les divers points d'intersection de ses côtés.

Considérons, par exemple, la courbe parcourue par le point d'intersection $a_{,}$ (*fig.* 86) des côtés *ab* et *ef* assujettis à pivoter, dans toutes leurs positions, sur les points fixes p et p''; joignons, par une ligne droite *ae*, deux des sommets qui appartiennent à ces côtés: ce sera évidemment ou un côté ou une diagonale du polygone proposé; donc, comme telle (513 et 514), elle pivotera sur un point fixe placé sur la droite pp'', ou roulera sur une section conique ayant un double contact avec la proposée suivant cette même droite. En conséquence, si nous supposons qu'on mette la figure en projection sur un nouveau plan, de façon (109) que la droite dont il s'agit passe à l'infini, et que la section conique proposée devienne un cercle, il arrivera, dans le premier cas, que la droite *ae*, en se mouvant, demeurera constamment parallèle à elle-même (105), et, dans le second, que cette droite enveloppera constamment un même cercle concentrique au premier (131). La question qui nous occupe se trouvera ainsi ramenée aux deux suivantes :

« Quelle est la courbe que parcourt le troisième sommet $a_{,}$ (*fig.* 87) d'un » triangle $aea_{,}$, dont les deux autres sont assujettis à se mouvoir sur un » cercle donné (C), tandis que ses trois côtés demeurent constamment parallèles à eux-mêmes? »

« Quelle est la courbe que parcourt le troisième sommet $a_{,}$ d'un triangle » $ae'a_{,}$, dont les deux autres sont assujettis à se mouvoir sur un cercle » donné (C), tandis que les côtés $aa_{,}$ et $e'a_{,}$, adjacents à ces sommets, demeurent constamment parallèles à eux-mêmes, et que le troisième côté » ae' roule sans cesse sur une circonférence de cercle concentrique à la » première? »

521. On voit d'abord que l'une de ces questions se ramène directement à l'autre; car, si nous considérons le triangle $ae'a_{,}$ et que nous prolongions le côté $e'a_{,}$ jusqu'à sa nouvelle intersection en e avec le cercle qui dirige les sommets a et e'; que nous tracions, de plus, la corde *ae*, elle devra demeurer constamment parallèle à elle-même dans le mouvement du triangle $ae'a_{,}$. En effet, d'après la condition à laquelle est assujetti le côté ae' de ce triangle, l'angle aee' est constant, mais ee' reste parallèle à lui-même; donc *ae* reste aussi parallèle à lui-même, et partant le sommet $a_{,}$ du triangle $ae'a_{,}$, dont le côté ae' roule sur un cercle concentrique au proposé, est aussi celui d'un autre triangle $aea_{,}$ dont les côtés restent constamment parallèles à eux-mêmes.

Maintenant, soit tracé le diamètre fixe *bc*, qui divise à la fois en parties égales, aux points i, tous les côtés parallèles *ae*; soit menée ensuite, pour

chaque triangle $aea_{,}$, la droite $ia_{,}$; tous ces triangles demeurant semblables et semblablement placés entre eux, il en sera évidemment de même des triangles partiels $eia_{,}$, $aia_{,}$. Donc les carrés des droites parallèles $ia_{,}$ seront entre eux comme les carrés des demi-cordes ai, ou comme les rectangles des segments bi et ic formés sur le diamètre fixe bc; d'où il suit évidemment (39) que la courbe parcourue par le point $a_{,}$ est une ellipse ayant bc pour diamètre commun avec le cercle (C), et qui est concentrique à ce cercle.

On peut remarquer, de plus, que cette ellipse et ce cercle ont un autre diamètre commun, dont les extrémités appartiennent à la position du point $a_{,}$, pour laquelle le triangle $aa_{,}e$ est réellement inscrit au cercle : on voit d'ailleurs ce qu'il y aurait à faire pour déterminer directement, soit sur la figure primitive, soit sur sa projection circulaire, les quatre points de l'intersection mutuelle des deux courbes dont il s'agit.

Si l'on se reporte maintenant à la *fig.* 86, d'où nous sommes partis, on conclura de ce qui précède que le point d'intersection $a_{,}$ des deux côtés ab et ef décrit généralement une section conique dans le mouvement du polygone $abcdef$, dont le pôle relatif à la droite pp'' est le même que pour la section conique proposée, et appartient à la mutuelle intersection de deux sécantes conjuguées communes de ces courbes, etc.

Cette démonstration étant d'ailleurs applicable au point de rencontre de deux autres côtés quelconques du polygone ou de deux de ses diagonales, pourvu que ces côtés ou ces diagonales pivotent constamment sur des points fixes, et ne roulent point sur des sections coniques, comme il arrive (514) quand leurs extrémités respectives appartiennent à des sommets de même espèce, on en conclura que :

Dans tout polygone variable assujetti aux mêmes conditions que celui du théorème de l'article 514, *les points de rencontre des droites qui appartiennent à des sommets d'espèces différentes décrivent des sections coniques passant évidemment par les points fixes qui servent de pivots à ces droites.*

522. En prolongeant deux côtés quelconques ab, ef du polygone inscrit $abcdef$ jusqu'à leur rencontre mutuelle en $a_{,}$, on a formé naturellement un nouveau polygone $a_{,}bcdea$, dont tous les côtés pivotent à la fois sur des points fixes p, p',.... placés en ligne droite, mais qui, au lieu d'être entièrement inscrit à la section conique comme celui d'où il provient, a un de ses sommets libre et placé hors de la courbe; donc on a ce nouvel énoncé dû à M. Brianchon, qui l'a démontré dans un Mémoire inséré au Xe Cahier *du Journal de l'École Polytechnique*, par des considérations fort simples d'Algèbre, combinées avec le principe de l'article 105 :

Si tous les sommets d'un polygone, un seul excepté, sont assujettis à demeurer sur une section conique donnée, d'ailleurs quelconque, tandis que tous ses côtés pivotent sur autant de points fixes placés sur une même droite, le sommet libre parcourra, dans toutes ses positions, une autre section conique passant par les points fixes adjacents à ce sommet.

523. D'après ce qui précède, il est évident qu'il en sera encore ainsi de tous les autres points de rencontre des côtés, pris deux à deux, et de ceux des diagonales qui tournent (514), dans le mouvement général du polygone, autour de points fixes. Quant aux courbes que parcourent les divers points de rencontre des autres espèces de diagonales, il y a des raisons de croire qu'elles sont, en général, du quatrième degré, comme cela a lieu, ainsi que nous l'avons déjà fait observer (512), pour les points de rencontre mêmes des côtés, lorsque les points fixes, au lieu d'appartenir à une même droite, sont quelconques.

Néanmoins, pour le cas général dont il s'agit, il sera encore facile de reconnaître, *à priori*, quand la courbe des points de rencontre des côtés s'abaisse au second degré. En effet, au moyen des constructions indiquées (510 et 511), on pourra remplacer le mouvement de toute la portion de polygone *abcde* (*fig.* 84), terminée aux deux côtés $ba_{,}$, $aa_{,}$ que l'on considère, par celui de l'angle inscrit *axe* ou *axd* (*fig.* 85), dont les côtés pivotent sur les points fixes P′ et P″; si donc il arrive que ces points soient placés sur la même droite que les points fixes p, p^{iv} (*fig.* 84) des deux côtés $ba_{,}$, $ea_{,}$, il en résultera évidemment que le point de rencontre $a_{,}$ de ces côtés parcourra une section conique, car le quadrilatère $a_{,}axea_{,}$ sera alors dans les circonstances du théorème de l'article 522.

Des polygones variables circonscrits à une conique, dont les sommets parcourent des droites données comme directrices.

524. Ayant établi, dans ce qui précède, les propriétés des polygones variables inscrits aux sections coniques, il ne nous sera pas difficile de passer à celles des polygones variables dont les côtés sont assujettis à demeurer tangents à de telles courbes; tout consiste, en effet, à se rappeler la théorie des pôles, exposée à la fin du Chapitre II de la IIe Section.

Supposons, par exemple, qu'un polygone quelconque *abcde* (*fig.* 88) étant inscrit à une section conique, on en circonscrive un autre ABCDE à cette courbe, dont les côtés aient pour points de contact les sommets du premier: ces polygones seront polaires réciproques l'un de l'autre. Si donc on oblige

le polygone *abcde* à se mouvoir suivant les conditions du théorème de l'article 510, il en résultera évidemment (195 et 231), pour le polygone circonscrit ABCDE, cette nouvelle proposition, qui est une extension de celle déjà exposée (435), et d'où on pourrait la déduire directement par des considérations analogues à celles employées ci-dessus pour le théorème 510, mais relatives aux polygones circonscrits :

Si tous les sommets d'un polygone quelconque ABCDE, *perpétuellement circonscrit à une section conique, sont, à l'exception d'un seul* E, *assujettis à parcourir autant de droites* MN, NP,..., *données comme directrices, le sommet libre et les différents points de rencontre des côtés parcourront, dans les positions successives du polygone, autant de sections coniques ayant un double contact avec la proposée.*

525. Pour avoir la sécante de contact, on pourrait rechercher, au moyen des procédés décrits art. 510 et 511, qui n'exigent tous que l'emploi d'une simple règle, celle qui appartient à la section conique qu'enveloppe, dans son mouvement, le côté libre ou la diagonale du polygone inscrit ayant pour pôle (229) le sommet ou point de rencontre que l'on considère; car, d'après ce qui précède et d'après la remarque de l'article 423, la droite ainsi obtenue sera la sécante de contact demandée.

Au surplus, quand tous les points fixes p, p',..., p^{iv} (*fig.* 89) des côtés du polygone inscrit *abcdef* sont sur une même droite, les directrices MA, NB,..., RE, sur lesquelles s'appuient les sommets respectifs du polygone circonscrit ABCDEF, se croisent toutes (196) en un même point O, pôle de la droite pp'' dont il s'agit; mais alors, en supposant le polygone inscrit de rang pair, le côté libre *af* de ce polygone pivote sur un dernier point fixe p^{v} (513) placé sur cette même droite; donc aussi le sommet libre F du polygone circonscrit, du même ordre que le premier, décrit une dernière ligne droite OS, passant par le point O commun à la fois à toutes les directrices, c'est-à-dire que :

Si tous les sommets d'un polygone de rang pair, perpétuellement circonscrit à une section conique, sont assujettis, un seul excepté, à parcourir autant de droites données comme directrices et passant toutes par un même point, le sommet libre décrira lui-même une dernière droite dirigée vers le point dont il s'agit.

526. Ce théorème pourrait s'établir directement et d'une manière très-simple, comme on l'a fait (513) pour celui d'où on vient de le déduire au

moyen de la théorie des pôles, en partant du cas particulier (435) du quadrilatère circonscrit.

On pourrait également le démontrer en se servant du théorème de l'article 504, pour lequel la section conique, qui dirige le mouvement des côtés du polygone, se trouve remplacée par des points fixes; car, si l'on suppose que le polygone circonscrit ABCDEF se déplace infiniment peu sur la courbe, de manière à satisfaire aux conditions ci-dessus prescrites, ses divers côtés tendront évidemment à pivoter sur les points de contact *a*, *b*,..., qui leur correspondent; donc, en vertu du principe cité, le sommet libre F tendra aussi à parcourir une droite FS dirigée vers le point de rencontre O des directrices, et en parcourra, en effet, un élément infiniment petit. Mais une seule position du polygone suffit pour déterminer celle de la droite FS; donc cette droite sera constamment parcourue par le sommet F dans toutes les positions successives qu'il peut prendre autour de la courbe.

Enfin on pourrait encore démontrer simultanément le théorème qui nous occupe et celui (513) d'où nous l'avons déduit, en s'appuyant sur les principes établis au Chapitre III de la Ire Section : il suffit, pour cela, de supposer la figure mise en projection sur un nouveau plan, de façon (109) que, la section conique proposée devenant un cercle, la droite *pp″*, qui renferme les points fixes des côtés du polygone inscrit, passe à l'infini; car alors le point O de croisement des directrices du polygone circonscrit deviendra le centre même du cercle de projection (115), et les différents côtés du polygone inscrit, le côté libre excepté, seront assujettis à se mouvoir parallèlement à eux-mêmes dans les diverses positions du système.

Ce n'est pas sans dessein que nous varions ainsi la démonstration de chaque théorème qui se présente; car s'il est surtout essentiel, dans un ouvrage de science, d'augmenter le nombre des vérités déjà connues, il ne l'est guère moins, sans doute, de montrer l'espèce de dépendance et d'analogie qu'elles ont entre elles. Or rien n'est certes plus propre, pour y parvenir, que de s'attacher à faire voir comment on peut les déduire les unes des autres; et l'on aura remarqué, par tout ce qui précède, que le principe de continuité, employé comme il convient, offre, sous ce rapport, des ressources que les principes du raisonnement ordinaire ne sauraient à coup sûr suppléer.

Outre que cette marche présente l'avantage d'éclairer les vérités les unes par les autres, et d'en faire voir la fécondité, elle a encore celui d'agrandir les ressources de la Géométrie. Il est rare, en effet, qu'un tour particulier de démonstration ou de raisonnement ne soit applicable qu'à un seul objet; et s'il le devient à plusieurs, s'il embrasse tout un corps de doctrine, comme le

principe d'exhaustion des anciens, celui des *infiniment petits* et des *infiniment grands*, etc., principes qui dérivent tous directement de la loi de continuité, alors son introduction dans la science aura considérablement augmenté les moyens de découvrir et de démontrer.

527. Revenons maintenant à notre polygone circonscrit, d'un nombre pair de côtés.

Puisqu'il arrive, quand tous les sommets, moins un, sont assujettis à parcourir des droites données dirigées vers un même point, que le dernier parcourt lui-même une droite passant par ce point, et déterminée de position en même temps que toutes les autres, on conçoit qu'il doit exister, entre les angles qui fixent la position de ces droites, soit entre elles, soit à l'égard de la courbe, une relation analogue à celle qui a lieu (515) pour les points fixes sur lesquels pivotent les côtés du polygone inscrit *abcdef*.

Supposons, en effet, que l'on nomme P, P', P'',..., les différents points d'intersection des directrices OA, OB, OC,..., avec la droite pp'', directrices qui sont (524) les polaires des points fixes p, p', p'',..., qui leur correspondent respectivement dans le polygone inscrit : supposons, de plus, que l'on continue, comme dans l'article 515, à appeler t, t' les points, soit réels, soit imaginaires, où la transversale pp'' rencontre la courbe, on aura évidemment (194) :

$$\frac{pt}{pt'} = \frac{\text{P}t}{\text{P}t'}, \quad \frac{p't}{p't'} = \frac{\text{P}'t}{\text{P}'t'}, \quad \frac{p''t}{p''t'} = \frac{\text{P}''t}{\text{P}''t'}, \ldots .$$

Combinant ces relations avec celle de l'article 515, il viendra, entre autres,

$$\frac{t\text{P}\,.\,t\text{P}''\,.\,t\text{P}^{\text{iv}}}{t\text{P}'\,.\,t\text{P}'''\,.\,t\text{P}^{\text{v}}} = \frac{t'\text{P}\,.\,t'\text{P}''\,.\,t'\text{P}^{\text{iv}}}{t'\text{P}'\,.\,t'\text{P}'''\,.\,t'\text{P}^{\text{v}}}.$$

C'est-à-dire que les points P, P', P'',..., ont entre eux, par rapport aux points t et t' de la courbe, la même corrélation que les points p, p', p'',..., qui leur répondent respectivement et sont les pôles des droites d'où ils proviennent.

Supposons, d'après cela, qu'aux points t et t' on mène deux tangentes à la courbe, elles iront évidemment concourir en O avec les autres directrices, car le point O est le pôle (525) de la droite pp''; or, la relation ci-dessus, étant projective (20), aura lieu entre les segments formés sur une transversale quelconque, coupant le faisceau des directrices et des tangentes qui se réunissent au point O, aussi bien (18) qu'entre les sinus des angles projetants formés par ces mêmes droites ; donc on peut énoncer ce théorème général :

Si, ayant circonscrit à une section conique quelconque un polygone d'un nombre pair de côtés, on mène, d'un point pris à volonté sur le plan de la courbe, des droites aux différents sommets du polygone et des tangentes à cette courbe, le produit des sinus de tous les angles projetants, compris entre l'une quelconque de ces tangentes et chacune des autres droites qui appartiennent à des sommets de rang pair du polygone, sera au produit semblable, relativement à la même tangente et aux droites qui appartiennent aux sommets de rang impair, dans un rapport qui ne changera pas, quand on substituera la seconde tangente à la première. Enfin si l'on mène, à travers le faisceau de toutes ces droites, une transversale arbitraire, la même relation aura encore lieu entre les segments qui correspondent aux différents angles projetants.

528. Au surplus, ces propriétés s'étendent à des polygones circonscrits, d'un nombre pair ou impair de côtés, en supposant (516) que les points de contact de deux côtés contigus quelconques viennent à se réunir en un seul. Dans ce cas, ces deux côtés se sont confondus avec les deux segments formés, sur le côté unique qui les remplace, à partir du point de contact, et la directrice de l'angle de ces mêmes côtés passe évidemment par le point de contact commun dont il s'agit.

En ayant égard à cette remarque, on voit que la proposition subsistera toujours, d'après la loi de continuité, quel que soit le nombre des côtés du polygone inscrit qu'on suppose devenir infiniment petits, ou tangents à la courbe; ce qui donne lieu à plusieurs propriétés particulières analogues à celles déjà signalées art. 516, et qui peuvent en être considérées comme les réciproques.

529. La proposition de l'article 525 ne saurait plus avoir lieu quand le polygone circonscrit ABCDEF est d'un nombre impair de côtés; la courbe que décrit le sommet libre F est évidemment alors une section conique quelconque (514), touchant la proposée aux deux points où elle est rencontrée par la polaire du point O commun à toutes les directrices.

Quant à ce qui concerne les lignes que décrivent les divers points de rencontre des autres côtés du polygone et celles qu'enveloppent dans leur mouvement ses diverses diagonales, qu'il soit d'ailleurs de rang pair ou impair, on pourra aisément en déterminer l'espèce particulière au moyen de la théorie des pôles et des propositions analogues relatives aux polygones inscrits.

Il paraît donc fort inutile d'entrer dans plus de développements à ce sujet, et nous nous contenterons, pour terminer, de faire remarquer, en général,

que toutes les propriétés qui viennent de nous occuper conduisent à beaucoup d'autres particulières, quand on suppose que deux ou plusieurs points fixes, deux ou plusieurs directrices se confondent, soit en un seul point fixe, soit en une seule directrice, à distance donnée ou infinie. Ainsi, par exemple :

« Si un polygone ABCDEFA (*fig.* 90), variable de forme et perpétuellement circonscrit à une section conique quelconque, est assujetti à avoir ses sommets alternatifs sur deux droites fixes OM et ON, à l'exception du dernier sommet F qui reste libre, il arrivera que la ligne, décrite par ce sommet, sera du premier ou du second ordre, selon que le polygone sera lui-même de rang pair ou impair. De plus la droite décrite dans le premier cas passera par le sommet O de l'angle des directrices, et la section conique décrite dans l'autre aura une sécante de contact commune avec la proposée, polaire du point O dont il s'agit. »

Ce corollaire, qui a son analogue pour les polygones inscrits, pourrait, au surplus, se démontrer directement, en mettant la figure en projection sur un nouveau plan, de façon (109) que la polaire du point O passe à l'infini, et que la section conique proposée devienne un cercle, ayant par conséquent (116) le point dont il s'agit pour centre.

Des polygones variables, à la fois inscrits à des sections coniques et circonscrits à d'autres.

530. Pour compléter entièrement l'objet de ce Chapitre, il nous reste à considérer les polygones à la fois inscrits à une section conique et circonscrits à une autre ; car nous avons successivement envisagé les cas où, soit les directrices des sommets, soit les points fixes des côtés du polygone variable sont remplacés par une seule et même section conique. Or cet examen est on ne peut plus facile quand on suppose que les deux sections coniques ont entre elles un double contact.

En effet, alors (131) on peut, en général, mettre la figure en projection sur un nouveau plan, de façon qu'elles deviennent des circonférences de cercle concentriques. Supposons donc qu'on inscrive à volonté, à celle qui est extérieure, un polygone dont tous les côtés, un seul excepté, touchent l'autre, il arrivera évidemment que, faisant mouvoir ce polygone en l'assujettissant toujours aux mêmes conditions, le côté libre enveloppera, dans toutes ses positions, une troisième circonférence de cercle concentrique aux premières ; et par conséquent, en exécutant les mêmes opérations pour nos

deux sections coniques, « le côté libre du polygone inscrit à l'une, et dont » tous les autres côtés touchent la seconde, roulera, dans ses diverses positions, autour d'une troisième section conique, ayant même sécante de contact commune avec chacune des premières. »

Mais cette propriété et toutes ses analogues peuvent être étendues, comme on va le voir, à des sections coniques quelconques, toujours à l'aide des principes de projection qui font la base de ce travail.

Cas particuliers où les sections coniques directrices sont des cercles, et où le polygone est un simple triangle.

531. Pour remplir avec simplicité le but qui vient d'être indiqué, nous considérerons d'abord le cas particulier du triangle et du cercle ; il nous sera facile ensuite de passer de là aux polygones et aux sections coniques en général, par la marche déjà si souvent employée dans ce qui précède.

Établissons en premier lieu ce théorème :

Trois cercles (c), (c'), (c''), *fig.* 92, *situés sur un même plan, ayant une sécante commune* mn, *réelle ou idéale, si l'on inscrit à l'un d'eux* (c'') *une suite de triangles* ABC *dont les côtés* AB, AC *touchent respectivement les deux autres* (c') *et* (c), *le troisième côté* BC *de ce triangle ne cessera pas d'être tangent à un quatrième cercle, ayant la sécante* mn *en commun avec les proposés.*

Pour le démontrer, commençons par rechercher le point de contact A' du côté BC avec la courbe qu'il enveloppe dans ses diverses positions. J'observe d'abord que, si l'on imprime au triangle ABC un mouvement infiniment petit, ou qu'on le dérange infiniment peu de sa position actuelle, il arrivera que les côtés de ce triangle tourneront, ou tendront à tourner autour des points de contact A', B', C' qui leur appartiennent respectivement. Mais, en faisant abstraction, pour un moment, de la courbe qu'enveloppe en général le côté BC, il est visible que ce côté tendra aussi à rouler (431) autour d'une section conique ayant un double contact avec le cercle ABC; donc le point de contact de cette section conique et du côté BC est aussi celui de ce même côté avec la courbe inconnue; et par conséquent, si l'on trace les droites BB', CC', et qu'on joigne le point D de leur croisement avec le sommet A, par la droite AD, sa direction indéfinie ira rencontrer celle de BC au point de contact A' dont il s'agit (433).

Cette construction très-simple du point de contact de la courbe inconnue et de BC conduit sur-le-champ à une propriété caractéristique de cette courbe; car, M, N étant les points communs à la fois à nos trois cercles, sur

la direction de mn, et F, G, H étant les points où cette même direction rencontre les côtés respectifs AC, AB et BC du triangle ABC, on aura, d'après la propriété connue du cercle,

$$\overline{FB'}^2 = FM.FN = FA.FC,$$

$$\overline{GC'}^2 = GM.GN = GA.GB;$$

donc on a aussi (162 et 163), puisque d'ailleurs les trois points F, G, H sont en ligne droite, et que les trois droites AA', BB', CC' se croisent en un même point D,

$$\overline{HA'}^2 = HB.HC = HM.HN:$$

propriété qui ne saurait appartenir qu'à un cercle, ayant la corde MN en commun avec les proposés.

Supposons, en effet, qu'on trace le cercle passant par A', M, N ; d'après ce qui vient d'être démontré, ce cercle touchera le côté générateur BC au point A', et par conséquent il aura un élément commun avec la courbe cherchée. Si donc cette courbe ne se confondait pas en entier avec le cercle dont il s'agit, elle serait au moins l'enveloppe de tous ceux qui, tels que celui-là, ont la corde MN en commun avec les proposés, ce qui est absurde, car ces cercles ne sauraient avoir d'enveloppe commune ; et comme toutefois la courbe enveloppe existe, on en doit conclure forcément qu'elle se confond avec le cercle A'MN, ou, plus généralement, que c'est un cercle unique ayant même corde commune avec les proposés, comme il s'agissait de le démontrer.

Ce raisonnement suppose, il est vrai, que les cercles (c), (c'), (c'') aient deux points communs réels ; mais, en vertu du principe de continuité, on peut l'étendre directement à celui où ces points deviennent imaginaires, et où par conséquent la droite mn est une sécante idéale commune aux cercles proposés. Ainsi notre théorème est général et comprend tous les cas, soit que d'ailleurs le cercle ABC ou (c'') embrasse à la fois les deux autres (*fig.* 93), ou n'en embrasse qu'un seul (*fig.* 94), ou n'en embrasse aucun (*fig.* 95), soit qu'enfin il ne renferme seulement qu'une portion de chacun de ces cercles, comme il arrive (*fig.* 92) lorsque la sécante commune mn est réelle.

532. Puisque le cercle, qu'enveloppe dans son mouvement le côté BC, fait partie de la suite que déterminent les proposés, il s'ensuit que, dans certains cas, il pourra dégénérer en deux lignes droites (95) se confondant, l'une avec la sécante mn, à distance finie, commune à ces cercles, l'autre avec la

sécante commune qui leur appartient à l'infini. Cette circonstance aura lieu en particulier quand, dans une de ses positions, le côté générateur BC sera susceptible de se confondre avec la corde commune MN, et que cette corde sera par conséquent réelle : alors ce côté générateur, pour toucher constamment la courbe enveloppe, devra passer (194, note), dans toutes ses autres positions, par le point d'intersection des deux sécantes communes dont il s'agit, c'est-à-dire qu'il se mouvra parallèlement à celle, *mn*, qui est à distance donnée.

Quand, au contraire, la sécante commune *mn* est idéale, le côté générateur BC ne peut plus se confondre avec cette sécante dans aucune de ses positions, et par conséquent le cercle qu'il enveloppe ne saurait dégénérer en deux lignes droites ; mais alors il peut fort bien se confondre avec l'un des cercles limites de la suite dont il fait partie (76), et se réduire par conséquent à un point, circonstance qui aura lieu évidemment quand le côté générateur BC se confondra avec lui-même dans deux positions distinctes du triangle ABC.

Comme les deux points limites du système des cercles proposés et le point à l'infini où se coupent leurs sécantes communes doivent jouer (80 et 370) absolument le même rôle à l'égard de ces cercles, on voit que la condition qui précède peut fort bien convenir aussi à ce dernier point ; en sorte que le côté générateur BC, au lieu de pivoter sur l'un des points limites, demeurera parallèle à la sécante commune ordinaire, ainsi que cela avait lieu dans le cas ci-dessus où cette sécante était supposée réelle ; mais alors il arrive nécessairement que, dans les deux positions distinctes du triangle ABC pour lesquelles le côté BC est le même, ce triangle change de forme, l'un des côtés AB, AC devenant infiniment petit, et sa direction devenant par conséquent tangente à la fois aux deux cercles qui lui appartiennent.

Il serait d'ailleurs aisé de s'assurer, par la discussion directe, que cette dernière circonstance revient exactement à celle dont il a été question ci-dessus, relativement au cas où la corde commune MN est réelle ; et l'on voit, de plus, que, pour que le côté BC du triangle demeure constamment parallèle à la corde commune MN, il n'est pas même nécessaire que cette corde soit réelle ; il suffit que la circonstance du parallélisme subsiste pour la position du triangle qui vient d'être indiquée en dernier lieu.

Nous n'entrerons pas dans de plus longs détails sur ces circonstances particulières dont l'examen est on ne peut plus facile d'après ce qui précède. Au reste, ces circonstances se reproduisent, d'une manière analogue, dans toutes les propositions qui suivent ; et, comme les remarques générales que

nous venons de faire leur sont immédiatement applicables, nous nous dispenserons désormais de les répéter.

533. Puisque, d'un même point A du cercle (c''), *fig.* 93, on peut mener deux tangentes à chacun des autres cercles (c) et (c'), et que par conséquent il en résulte quatre triangles distincts analogues au triangle ABC et, par suite, quatre cordes génératrices BC, il semblerait qu'on est en droit de conclure qu'il existe aussi quatre cercles correspondants, enveloppes de ces cordes; mais il est évident qu'à chaque triangle ABC il en correspond toujours un autre, placé symétriquement par rapport à la ligne des centres cc'', et dont le côté générateur touche le même cercle que celui du premier; donc ce cercle appartient à la fois à deux modes de génération distincts et par conséquent aussi à deux des quatre triangles dont le sommet est en A. Or il est aisé de reconnaître, d'après cela, qu'un même cercle est décrit, savoir : par les deux triangles dont les côtés AB, AC touchent, de la même manière, les cercles (c) et (c'), et par les deux triangles dont les côtés AB et AC touchent ces cercles de différentes manières; donc enfin les quatre triangles, formés autour d'un même point A de (c''), ne donnent lieu qu'à deux cercles distincts.

Maintenant, si l'on suppose que le cercle (c') vienne à se confondre avec le cercle (c), le côté générateur BC des deux premiers triangles deviendra nul dans toutes ses positions, et son enveloppe ne sera par conséquent autre chose que le cercle (c'') lui-même. Quant au côté générateur des deux autres triangles, comme il ne devient pas nul, et que ces triangles ne font simplement que se confondre, il enveloppera encore, dans ses diverses positions, un cercle distinct des cercles proposés, et qui aura même sécante commune avec eux, c'est-à-dire que :

Un angle BAC (*fig.* 96) *étant à la fois inscrit à un cercle* (c'') *et circonscrit à un autre* (c), *si on vient à le faire mouvoir en l'assujettissant toujours aux mêmes conditions, la corde* BC, *qui le sous-tend dans le premier de ces cercles, en enveloppera un troisième passant par les points d'intersection de ceux-là, ou ayant mêmes sécantes, soit réelles, soit idéales, communes avec eux.*

Cas général où l'on considère des sections coniques directrices et des polygones quelconques.

534. D'après les principes posés dans la Ire Section (121 et 122), il est clair que la propriété établie en dernier lieu et celle (531) d'où nous l'avons déduite subsistent, d'une manière analogue, pour deux sections co-

40.

niques quelconques tracées dans un même plan, et pour trois sections coniques également quelconques, quand elles ont mêmes points d'intersection ou mêmes sécantes communes.

Cela posé, considérons un nombre arbitraire de sections coniques ou de circonférences de cercle situées dans un même plan, et ayant mêmes sécantes communes, réelles ou idéales; supposons qu'on inscrive à l'une d'elles un polygone dont les différents côtés, un seul excepté, touchent respectivement les autres; je dis que si l'on vient à faire varier ce polygone sous les mêmes conditions, le dernier côté, ou le côté libre, enveloppera lui-même, dans toutes ses positions, une section conique ou une circonférence de cercle ayant mêmes sécantes communes avec les premières.

En effet, si l'on mène de l'une des extrémités du côté libre considéré comme dernier côté du polygone, des diagonales aux divers autres sommets de ce même polygone, elles le partageront en plusieurs triangles dont les extrêmes renfermeront, l'un les deux derniers, l'autre les deux premiers côtés. Or, il suit de ce qui précède (531) que la diagonale qui appartient à celui-ci roulera, dans toutes ses positions, sur une section conique ou une circonférence de cercle, ayant mêmes sécantes communes avec les proposées; donc le second triangle sera absolument dans les mêmes circonstances que le premier, et par conséquent la seconde diagonale jouira de la même propriété que la première, et ainsi de suite jusqu'au dernier côté ou au côté libre du polygone, qui roulera, ainsi que toutes les diagonales, sur une section conique ou une circonférence de cercle ayant mêmes sécantes communes que les proposées.

Cette démonstration ne suppose aucune disposition particulière des courbes données à l'égard du polygone; elle serait vraie, même quand l'une d'entre elles serait touchée à la fois par plusieurs côtés ou par tous les côtés excepté celui qui reste libre; enfin elle s'appliquerait également à des diagonales quelconques du polygone; donc on peut énoncer généralement la proposition suivante :

Ayant inscrit, à une section conique quelconque, un polygone dont les différents côtés, un seul excepté, touchent d'autres sections coniques ayant mêmes sécantes communes entre elles et avec la première, soit que d'ailleurs une même section conique touche plusieurs côtés, soit que ces sections coniques se confondent toutes en une seule, qui alors peut être quelconque comme la première, il arrivera qu'en faisant varier le polygone d'après ces conditions, le côté libre et toutes les diagonales rouleront également sur d'autres sections coniques, ayant mêmes sécantes communes avec les proposées, et qui deviendront des courbes s. et

s. p. (91), *soit entre elles, soit à l'égard de celles-ci, toutes les fois qu'il en sera ainsi de ces dernières.*

535. D'après les remarques de l'article 532, il est clair qu'une ou plusieurs des sections coniques enveloppes pourront, dans certaines circonstances particulières, se réduire à des points isolés, au nombre de trois seulement, ou à des systèmes de lignes droites ou de sécantes conjuguées communes passant par ces points (370).

Il serait d'ailleurs aisé (531) de construire, dans le cas général, les points de contact appartenant aux différentes courbes et aux cordes génératrices qui leur correspondent.

Supposons maintenant que l'on construise, par rapport à la section conique sur laquelle s'appuient à la fois les sommets du polygone que l'on considère, le polygone circonscrit qui est (229) le polaire réciproque du premier; d'après les conditions auxquelles est assujetti celui-ci, tous les sommets de l'autre, un seul excepté, devront (231) constamment appartenir à des sections coniques, polaires réciproques de celles sur lesquelles roulent les côtés du polygone inscrit. D'ailleurs, ces sections coniques, ainsi que celle qui sert de directrice, devront avoir mêmes tangentes communes (400). Enfin il résulte pareillement du théorème qui précède que le sommet libre du polygone circonscrit et les divers points d'intersection de ses côtés, qui sont les pôles du côté libre et des diagonales de l'autre (229), décriront aussi des sections coniques ayant mêmes tangentes communes avec les premières et la section conique directrice; donc on peut énoncer généralement le théorème qui suit :

Ayant circonscrit à une section conique quelconque un polygone dont les différents sommets, à l'exception d'un seul, appartiennent à d'autres sections coniques ayant mêmes tangentes communes avec la première, soit que d'ailleurs une même section conique ne dirige qu'un seul sommet, soit qu'elle en dirige à la fois plusieurs, soit qu'enfin toutes ces sections coniques se confondent en une seule qui alors peut être quelconque comme la première, il arrivera qu'en faisant varier le polygone d'après ces conditions, le sommet libre et tous les points de concours des côtés décriront également d'autres sections coniques ayant mêmes tangentes communes avec les proposées.

536. Le cas particulier des théorèmes qui précèdent, où l'on n'envisage que deux sections coniques, est surtout remarquable, comme on l'a vu, en ce que ces sections coniques sont parfaitement indépendantes entre elles et de toutes conditions particulières. Or, il est essentiel de remarquer que le po-

lygone de l'un quelconque de ces théorèmes participe, sous un certain rapport, des propriétés qui appartiennent à celui de l'autre, c'est-à-dire qu'il existe toujours une certaine portion de l'un de ces polygones, qui se trouve exactement dans les circonstances qui sont relatives à l'autre.

Soit, par exemple, ABCDEFA (*fig.* 97) un polygone entièrement inscrit à une section conique, et dont tous les côtés, un seul AF excepté, soient tangents à une autre section conique; en prolongeant les côtés AB et EF, adjacents à celui-là, jusqu'à leur rencontre en G, on formera le nouveau polygone GBCDE entièrement circonscrit à la seconde des deux courbes, et dont tous les sommets, excepté le sommet G, appartiendront à la première; donc, non-seulement toutes les diagonales du polygone ABCDEF rouleront sur des sections coniques ayant mêmes sécantes communes avec les proposées, mais encore tous les points de concours des côtés, en faisant toutefois abstraction du dernier côté AF, parcourront d'autres sections coniques ayant mêmes tangentes communes avec celles dont il s'agit.

Il est évident que les mêmes choses ont lieu, d'une manière analogue, pour le polygone du théorème de l'article 535, quand on ne considère que deux directrices; c'est-à-dire que non-seulement le sommet libre et les différents points de concours des côtés décrivent des sections coniques, mais qu'encore les diagonales de ce polygone, excepté celles qui partent du sommet libre, roulent également sur d'autres sections coniques ayant mêmes sécantes communes avec les deux proposées.

Enfin on remarquera que, quand les sections coniques proposées sont des cercles, il n'y a que les courbes sur lesquelles roulent les diagonales qui en soient aussi; les autres sont nécessairement des sections coniques en général, puisque quatre lignes droites ne sauraient être touchées à la fois par plus de deux cercles, qui, dans le cas actuel, ne sont autres évidemment que les cercles mêmes sur lesquels s'appuie le polygone.

Dans le Chapitre suivant, nous aurons occasion d'exposer quelques nouvelles propriétés relatives à la théorie précédente, en nous occupant des problèmes qui s'y rapportent, problèmes dont nous ne pouvions ici donner les solutions sans allonger par trop ce Chapitre.

CHAPITRE III.

EXTENSION DES THÉORIES PRÉCÉDENTES AU CAS OU LES DIRECTRICES SONT DES COURBES D'ORDRE QUELCONQUE, ET OU CERTAINS ANGLES SONT CONSTANTS. — APPLICATION DES MÊMES THÉORIES A LA SOLUTION DE QUELQUES PROBLÈMES QUI S'Y RAPPORTENT.

537. Dans ce qui précède, nous nous sommes occupés presque uniquement des polygones variables dont les sommets s'appuient sur des lignes droites ou sur une section conique; il nous reste à examiner comment on peut étendre la plupart des résultats obtenus au cas où l'on emploierait, pour directrices du polygone, des *courbes géométriques* (p. 3) d'un ordre quelconque, afin de donner une idée des intéressantes recherches de Braikenridge et de Mac-Laurin, et de montrer ainsi comment la simple Géométrie, traitée d'une manière convenable, peut, à l'aide du seul principe de continuité, atteindre sans peine les questions les plus générales et les plus relevées. En nous efforçant surtout d'être très-courts, nous ne négligerons pourtant pas l'occasion d'ajouter quelques nouveaux résultats à ceux de ces célèbres géomètres. Nous terminerons ensuite par donner quelques applications intéressantes des principales propriétés qui ont été exposées dans le précédent Chapitre.

Du lieu du sommet libre et des points de rencontre des côtés d'un polygone variable, dont les autres sommets parcourent des directrices courbes données, et dont les côtés pivotent sur des points fixes quelconques.

538. Considérons un polygone plan quelconque *abcde* (*fig.* 98) dont les différents sommets, un seul *e* excepté, sont assujettis à parcourir respectivement des courbes géométriques *am*, *bn*, *cq*, *dr* d'ordres quelconques *m*, *n*, *q*, *r*, tandis que les côtés successifs *ae*, *ab*, *bc*, *cd*, *de* de ce polygone sont astreints à pivoter constamment sur les points fixes $p, p', p'', p''', p^{\text{IV}}$ qui leur correspondent respectivement, et cherchons quel doit être, en conséquence, le degré de la courbe que parcourt, dans toutes ses positions, le sommet libre *e* du polygone; il sera facile ensuite (495) d'en déduire celui des courbes décrites par les points de rencontre des différents côtés.

Pour plus de simplicité, examinons d'abord le cas où toutes les direc-

trices, une seule *nb* exceptée, sont des lignes droites, et supposons que *n* soit toujours le degré de celle décrite par le sommet *b* dont il s'agit; il est évident, d'après la définition des courbes géométriques, que le plus grand nombre de points suivant lesquels la ligne parcourue par le sommet *e* pourra être coupée par une droite arbitraire, telle que AB par exemple, indiquera aussi le degré de cette ligne : or, si, laissant libre un instant le sommet *b* du polygone, on astreint celui *e* à décrire tous les points de la droite AB, le sommet *b* parcourra, dans toutes ses positions, une section conique (494) rencontrant la courbe (*n*) en un certain nombre de points, qui correspondront évidemment à autant de positions distinctes du polygone, pour lesquelles le sommet *b* sera à la fois sur (*n*) et le sommet *e* sur AB; donc, comme il est impossible qu'il y ait d'autres positions pour lesquelles la même chose ait lieu, ce nombre indiquera précisément en combien de points la droite AB peut, en général, être rencontrée par la courbe que parcourt le sommet libre *e*, et par conséquent ce sera le degré même de cette courbe.

Mais on sait que « deux courbes géométriques, tracées sur un même plan, » ne peuvent jamais se rencontrer en un plus grand nombre de points que » celui qui est marqué par le produit des nombres qui expriment le degré » de ces courbes; » et ce principe, qu'on regarde d'ordinaire comme une conséquence de l'Analyse algébrique, pourrait tout aussi bien s'établir en invoquant la loi de continuité (*); donc enfin le degré de la courbe parcourue par le sommet libre *e* du polygone sera, en général, exprimé par $2n$.

Supposons maintenant qu'on remplace pareillement la directrice droite d'un autre sommet *c* du polygone par une directrice courbe d'un ordre *q*, il arrivera qu'en traçant une nouvelle droite arbitraire AB dans le plan de la figure, et contraignant le sommet *e*, d'abord libre, à la parcourir tout entière, en rendant libre, à son tour, le sommet *c* qui précédemment était contraint à parcourir la courbe (*q*), il arrivera, dis-je, comme on vient de le prouver à l'instant, que ce dernier sommet décrira une courbe de degré $2n$, rencontrant celle (*q*) en $2nq$ points; d'où l'on conclura, par un raisonnement analogue à celui déjà employé ci-dessus, que la courbe parcourue par le sommet *e*, dans l'hypothèse où les directrices *bn* et *cq* sont des courbes de degrés *n* et *q*, ne peut elle-même rencontrer la droite arbitraire AB en plus de $2nq$ points, et que par conséquent tel est aussi le degré de cette courbe.

Le raisonnement peut se continuer indéfiniment pour tous les autres som-

(*) Nous donnerons, dans le Supplément (598), une idée de cette démonstration, pour le cas particulier des sections coniques.

mets du polygone, en remplaçant successivement les directrices droites par de nouvelles directrices de degrés quelconques; et l'on voit que ce même raisonnement, appliqué au cas où tous les points fixes p, p', p'',... sont distribués sur une même droite, conduira (498) à des courbes de degré moitié de ceux des courbes qui viennent de nous occuper; donc on peut énoncer ce théorème général dû à Mac-Laurin, et démontré ensuite, pour le cas du triangle, par Braikenridge (*) :

Si l'on fait mouvoir un polygone plan quelconque, en assujettissant ses différents côtés à pivoter respectivement sur autant de points fixes donnés comme pôles, et chacun de ses sommets, un seul excepté, à parcourir des directrices courbes quelconques, de degrés m, n, p, q,..., *le sommet libre décrira lui-même, dans toutes ses positions, une courbe qui sera, en général et au plus, du degré* 2mnpq..., *et qui se réduira simplement au degré* mnpq..., *quand tous les points fixes seront placés sur une même ligne droite.*

539. Les raisonnements par lesquels nous sommes parvenus à la démonstration de ce théorème sont conformes à ceux employés par Braikenridge et Mac-Laurin; ils sont simples, comme on voit, mais on peut leur en substituer d'autres qui ont l'avantage de ne point exiger l'emploi de propositions auxiliaires, et de mieux faire connaître la nature particulière de la courbe.

Pour cela, il est essentiel de remarquer qu'en vertu du principe de continuité, une droite, tracée arbitrairement dans le plan d'une courbe d'un certain degré, doit toujours être censée rencontrer cette courbe en un nombre de points *réels*, *imaginaires*, *multiples* ou *situés à l'infini*, égal au nombre qui exprime le degré de cette courbe; de sorte que, si l'on peut prouver rigoureusement qu'une certaine droite et une certaine courbe, tracées dans le même plan, n'ont en commun que m points, soit réels, soit imaginaires, situés ou non à l'infini, confondus en un seul ou réunis par groupes séparés de deux ou de plusieurs points, il sera par là même démontré que la courbe est effectivement du degré marqué par le nombre m (**).

Cela posé, considérons notre polygone variable *abcde*, dont les différents sommets a, b, c, d parcourent respectivement des courbes de degrés m, n,

(*) *Transactions philosophiques de la Société Royale de Londres*; année 1735, n° 439. *Voyez* aussi l'ouvrage de Braikenridge, déjà souvent cité : *Exercitatio geometrica*, *etc.*

(**) On remarquera que ce raisonnement, appliqué aux résultats de l'Analyse algébrique, conduirait aisément à l'erreur, d'après la manière dont on la traite d'ordinaire, car il arrive souvent qu'on néglige des facteurs; ici, au contraire, on ne peut rien négliger.

q, *r*. Supposons qu'on trace à volonté l'un, *ae*, des côtés adjacents au sommet libre *e*; sa direction indéfinie ira rencontrer la courbe du sommet *a* en un nombre de points réels, imaginaires, etc., marqué par *m*; et, si l'on joint chacun de ces points avec le pôle ou point fixe p' du côté suivant *ab*, il en résultera *m* directions indéfinies pour ce côté, dont chacune correspondra à un polygone particulier ayant la droite *ae* pour direction du premier côté; de plus, il ne saurait évidemment y en avoir d'autres qui jouissent de cette propriété.

Mais chacune des directions ainsi obtenues pour *ab*, et qui sont en nombre *m*, rencontrera la courbe du sommet *b* en *n* points, d'où résultera *mn* positions différentes de ce sommet sur la courbe (n), et par suite *mn* directions indéfinies du troisième côté *bc*, dont chacune correspondra à un polygone particulier remplissant les conditions prescrites, et ayant la droite *ae* pour direction du premier côté; donc, en continuant ainsi, on parviendra à prouver que le nombre total des directions possibles du dernier côté *de* du polygone sera égal au produit *mnqr* des dimensions de toutes les directrices ; de sorte que tel sera aussi le nombre des polygones distincts qu'il est possible de construire, sous les conditions prescrites, en prenant *ae* pour direction du premier côté; donc enfin il y a au plus, sur la droite *ae*, *mnqr* points réels, imaginaires, etc., différents du point *p*, et qui appartiennent véritablement à la courbe que parcourt le sommet *e*.

On ne peut pas encore inférer de là que *mnqr* exprimé réellement le degré de la courbe inconnue; car il peut se faire que, pour une certaine position particulière du côté *ae*, les points de cette courbe, qui lui correspondent, se confondent tous, ou en partie, avec le point *p*, lequel étant d'ailleurs fixe, serait ainsi un point multiple de la courbe, dont l'ordre serait marqué par le nombre des points d'intersection ou des sommets *e* qui y auraient successivement passé. Dans ce cas, évidemment, le nombre des points de la courbe, qui se trouvent sur chacune des droites *ae*, ne serait pas simplement *mnqr*, mais ce nombre augmenté d'autant d'unités qu'il y aurait de points de la courbe confondus en un seul au point *p*. Reste donc à rechercher s'il en est réellement ainsi dans le cas actuel, et quel est l'ordre de multiplicité du point *p*.

Or le point *e* et tous ses semblables se confondront évidemment avec *p*, toutes les fois que la direction du dernier côté *de* passera elle-même par ce point. Supposons donc qu'on prenne, en effet, la direction de la droite qui passe par les points fixes extrêmes *p* et p^{iv} pour celle de ce dernier côté, et qu'on recherche, par des constructions successives inverses de celles ci-dessus,

la direction ou les directions correspondantes du premier côté *ae*; elles seront évidemment en tout au nombre de *mnqr*, réelles, imaginaires, etc. D'ailleurs, si ce n'est dans des cas tout à fait particuliers, dont quelques-uns seront examinés plus loin, les directions ainsi obtenues ne se confondront pas en général avec celle de la droite pp^{iv} ou du premier côté du polygone; donc enfin elles rencontreront ce même côté en un nombre *mnqr* de points confondus en un seul au point *p*, qui est ainsi un point multiple de la courbe, d'un ordre représenté par ce nombre.

Concluons de là que, puisque chaque droite passant par *p* rencontre la courbe des points *e* en 2*mnqr* points réels, etc., et ne peut la rencontrer en un plus grand nombre de points, ce nombre est aussi celui qui exprime, en général, le degré de cette même courbe, ainsi qu'il s'agissait de le démontrer.

540. On remarquera que les *mnqr* directions du premier côté *ae*, correspondantes à celle où le dernier côté *de* s'applique sur pp^{iv}, sont précisément les tangentes aux diverses branches de la courbe qui passent par le point fixe *p*.

On prouverait de même d'ailleurs que le point fixe p^{iv} du dernier côté du polygone est aussi un point multiple de l'ordre *mnqr*, ayant pour tangentes les *mnqr* directions du dernier côté, qui correspondent à celle où le premier *ae* s'applique sur pp^{iv}; ainsi, non-seulement nous arrivons au résultat démontré plus haut (538), relativement au degré de la courbe parcourue par le dernier sommet du polygone, mais nous reconnaissons, de plus, que les points p, p^{iv} lui appartiennent, et sont les croisements respectifs de *mnqr* branches de cette courbe, dont les tangentes sont faciles à déterminer.

Quant au moyen de construire la tangente en un point quelconque *e* de la courbe dont il s'agit, il résulte très-simplement de l'application de la loi de continuité. En effet, si l'on suppose que le polygone *abcde*, qui correspond au point *e* que l'on considère en particulier, se dérange infiniment peu de la position actuelle qu'il occupe, il est clair que chacun de ses sommets, y compris le sommet *e*, tendra à décrire l'élément correspondant de la courbe sur laquelle il se trouve, c'est-à-dire la tangente même en ce sommet. Mais, d'après le théorème de l'article 494, le sommet *e* tendra aussi à décrire une section conique ayant un élément commun avec la courbe proposée: donc (496) il sera facile de déterminer la tangente au point *e* de la courbe dont il s'agit; le tout, comme on voit, par des constructions purement linéaires.

Cas pour lequel, tous les points fixes étant sur une même droite, la courbe décrite par le sommet libre s'abaisse à un degré moindre.

511. Supposons maintenant que tous les points fixes $p, p', p'', p''', p^{\text{IV}}$ soient situés sur une même ligne droite, les raisonnements qui précèdent demeureront toujours applicables, sauf ceux qui concernent l'ordre de multiplicité des points p et p^{IV} ; car, non-seulement ces points ne seront plus multiples, mais encore ils n'appartiendront plus, en général, à la courbe des points e.

En effet, dans ce cas, il arrivera qu'en prenant la direction de pp^{IV} pour celle du dernier côté de du polygone, toutes les directions correspondantes du premier côté ae se confondront en une seule et même droite avec la droite pp^{IV} dont il s'agit; d'où il suit qu'il n'y aura plus aucun point d'intersection distinct entre ces diverses droites, ou plutôt que la droite pp^{IV} tout entière fera alors elle-même partie de la courbe, et jouera le rôle des $mnqr$ branches passant, dans le cas général, par p et par p^{IV}. Donc aussi la courbe, en faisant abstraction de ces branches toutes confondues en une seule suivant la droite pp^{IV}, devra n'être plus que du degré marqué par $mnqr$; conséquence qui résulte d'ailleurs également de ce qu'alors cette courbe, ainsi décrite, n'est plus rencontrée qu'en $mnqr$ points par une droite quelconque ae.

De ce que les points multiples p et p^{IV} n'existent plus dans le cas où les points fixes des côtés sont en ligne droite, il ne faut pas inférer toutefois que la courbe ne rencontre plus en aucun point la droite pp^{IV} qui a cessé d'en faire partie ; car cette courbe, étant de degré $mnqr$, devra encore la couper, en général, en un nombre $mnqr$ de points. C'est ce qu'au reste la discussion directe apprend très-bien, puisque, un instant avant et un instant après celui où la droite ae se confond avec pp^{IV}, elle renferme encore, en général, $mnqr$ points distincts de la courbe; ce qui ne peut avoir lieu, à cause de la continuité, qu'autant que, dans la position intermédiaire dont il s'agit, elle n'ait un égal nombre de points sur cette courbe, soit réels, soit imaginaires, etc.

Par exemple, quand toutes les directrices sont des lignes droites, la ligne des sommets e est elle-même une droite (498), laquelle rencontre celle des points fixes p, p^{IV} en un point nécessairement distinct de l'un ou de l'autre de ceux-ci ; autrement, en effet, cette droite serait déterminée de situation indépendamment de la direction des autres droites données qui dirigent le sommet du polygone, ce qui est absurde (*).

(*) Il serait facile de déterminer directement, au moyen du calcul, dans le cas général où les

542. Au surplus, on voit que les démonstrations qui précèdent peuvent servir à établir directement la proposition relative au cas particulier (494) où, les points fixes étant quelconques, les directrices sont d'ailleurs des lignes droites : or cette proposition, pour le cas du triangle, conduit immédiatement à la propriété de l'hexagramme mystique de Pascal, et par suite à toute la théorie des pôles et polaires des sections coniques (207), théorie d'où dérive aussi l'élégant théorème de M. Brianchon sur l'hexagone circonscrit (208), etc.: donc on pourrait partir de là pour établir, *à priori*, toutes les propriétés qui font le sujet des deux premiers Chapitres de la Section II, et qui n'ont trait qu'à la direction indéfinie des lignes et non à leur mesure.

Pour étendre ensuite ces conséquences à toutes les lignes possibles du second degré, il faudrait nécessairement admettre en principe que « par cinq » points, pris à volonté sur un plan, on ne peut faire passer qu'une seule » ligne de ce degré, » ou, ce qui revient au même, il faudrait admettre que deux telles lignes ne peuvent jamais se rencontrer en plus de quatre points ; principe qui repose lui-même directement sur la loi de continuité, comme on l'a déjà observé (538, note première). Déjà aussi nous avons vu (294) qu'à l'aide de ce principe seul on pouvait établir sur-le-champ toute la théorie des centres et axes d'homologie des sections coniques : telle est donc l'influence que peut exercer l'admission de la loi de continuité dans les recherches géométriques, influence qui peut très-bien être comparée, ce me semble, à celle qu'y exerce elle-même l'Analyse algébrique, par sa grande généralité.

543. D'après tout ce qui a été dit (541) du cas particulier où les points fixes, sur lesquels pivotent les différents côtés d'un polygone variable, sont placés sur une même droite, je pense qu'il ne sera pas difficile de reconnaître les diverses circonstances où le degré de la courbe, parcourue par le sommet libre, s'abaissera d'une ou de plusieurs unités : on voit, par exemple, que cela arrivera toutes les fois que les côtés extrêmes *ae* et *de* (*fig.* 98) du poly-

---

directrices sont de degrés quelconques, les points où la courbe parcourue par le sommet libre rencontre la droite des points fixes, en considérant, ainsi qu'on l'a déjà fait (501) pour le cas particulier que nous venons de citer, la droite dont il s'agit comme une transversale par rapport à chacun des polygones remplissant les conditions prescrites; car il en résultera une certaine relation entre les segments formés par les divers points fixes sur les côtés correspondants. Supposant ensuite que les côtés de ce polygone viennent tous s'appliquer sur la transversale, on obtiendra autant de relations particulières qu'il y a de points à déterminer sur cette transversale, c'est-à-dire *mnqr*.

gone seront susceptibles de s'appliquer en même temps sur la droite pp^{iv} qui renferme les points fixes de ces côtés.

Le nombre des directions du côté *de*, relatives à une même direction quelconque de *ae*, étant (539), en général, *mnqr*, s'il arrive que, pour celle où *ae* se confond avec pp^{iv}, *t* directions correspondantes de *de* s'y confondent également, ce sera évidemment un signe que le degré de la courbe se sera lui-même abaissé d'un nombre *t* d'unités ; et alors le point p^{iv}, et par suite le point *p*, ne seront plus que des points multiples de l'ordre $mnqr - t$; car ce qui est arrivé au point p^{iv}, en prenant la droite pp^{iv} pour direction du premier côté *ae* du polygone variable, doit arriver évidemment aussi pour le point *p*, en prenant cette même droite pour la direction du dernier côté *de*.

Cas pour lesquels un ou plusieurs des points fixes se trouvent placés sur les directrices adjacentes des sommets du polygone.

544. Supposons maintenant que, dans le cas général de l'article 539, le point fixe p' de l'un quelconque *ab* des côtés du polygone mobile soit pris sur l'une des courbes qui dirigent les extrémités de ce côté, par exemple sur la courbe (*n*), le nombre des points de la ligne que parcourt le sommet *e*, et qui se trouvent placés sur une droite quelconque *ae* passant par le pôle *p*, sera toujours 2*mnqr*, savoir : *mnqr* réunis en un seul au point multiple *p*, et *mnqr* à l'intersection de *ae* et des diverses directions correspondantes du dernier côté *de* du polygone.

Mais, en répétant les raisonnements déjà établis (539) pour le cas général, on verra que *mqr* de ces directions appartiennent au point fixe p', qui, dans le cas actuel, est un des *n* points d'intersection du côté *ab* avec la courbe (*n*), et peut être pris pour le sommet *b* du polygone ; donc il en résultera $mnqr - mqr = mqr(n-1)$ directions relatives aux $n-1$ autres points d'intersection de ce côté avec la courbe dont il s'agit : or il est visible que les *mqr* premières directions sont invariables, quelle que soit d'ailleurs celle qu'on attribue au premier côté *ae* du polygone ; car, pour toutes, le côté *bc* du polygone correspondant passe à la fois par les points fixes p', p'', et par conséquent ce côté et la portion restante *bcde* du polygone sont eux-mêmes fixes. Donc *mqr* branches de la courbe (*e*) sont devenues des lignes droites passant par le point p^{iv}, desquelles d'ailleurs *qr* sont seulement distinctes entre elles, à cause que chacune d'elles correspond à la fois aux *m* intersections du premier côté *ae* et de la courbe *am*, et représente ainsi véritablement *m* droites confondues en une seule.

Il suit de là évidemment et de ce qui précède que, si l'on fait abstraction des mqr branches linéaires dont il s'agit, le nombre des points effectifs de la courbe (e), qui seront situés sur une direction quelconque du premier côté ae du polygone, sera égal à $mnqr + mqr\,(n-1) = mqr\,(2n-1)$; tel sera donc aussi le degré effectif de la courbe dont il s'agit, en ne tenant pas compte des branches qui sont devenues des lignes droites.

Quant à l'ordre de multiplicité des points p et p^{iv}, on voit qu'il est encore $mnqr$ pour le premier et seulement $mnqr - mqr = mqr\,(n-1)$ pour le second, toujours en faisant abstraction des mqr autres branches linéaires de la courbe qui passent par ce dernier point.

545. On pourrait encore, avec Braikenridge et Mac-Laurin, démontrer les mêmes choses par une marche analogue à celle déjà mise en usage ci-dessus (538), en recherchant en combien de points la courbe des points e rencontre une droite arbitraire AB tracée sur son plan; car, en contraignant le sommet e du polygone à parcourir cette droite, le sommet b qui correspondait à la courbe (n), devenu libre, parcourra, d'après le théorème de l'article 538 déjà cité, une courbe du degré $2mqr$ qui aura (539) mqr branches passant par le point fixe p', et rencontrera par conséquent la courbe (n), en faisant abstraction des points qui se confondent avec p', en $2mnqr - mqr = mqr\,(2n-1)$ points; tel est par conséquent aussi le nombre des points d'intersection distincts de la courbe (e) et de la droite AB, ou le degré de cette même courbe dans le cas qui nous occupe.

Si tous les points fixes $p, p', \ldots$, étaient placés, en outre, sur une même ligne droite, le degré de la courbe serait encore $mnqr$, comme dans le cas général où le point p' est quelconque, parce qu'alors la courbe parcourue par le sommet b, quand on contraint le sommet libre e à s'appuyer sur la droite AB, cesserait de passer par p' (541), et rencontrerait par conséquent la courbe (n) en $mnqr$ points, en général distincts. C'est aussi ce qu'on peut voir, *à priori*, au moyen du raisonnement employé en premier lieu (544).

Néanmoins on ne saurait conclure, dans le cas actuel, comme dans celui (541) où le point p' était indépendant de la directrice (n), que la courbe décrite par le dernier sommet e du polygone ne passe pas par le point fixe p du premier côté; il serait, au contraire, facile de prouver qu'elle a encore mqr branches passant par ce point, dont les tangentes s'obtiendraient en conduisant des lignes droites par le point p et par les m points d'intersection de la tangente en p' avec la courbe (m) du sommet a. On remarquera d'ailleurs que cette construction ne donnant que m tangentes pour les mqr branches passant par p, une même tangente appartient néces-

sairement à qr branches distinctes; en sorte que toutes ces branches se touchent entre elles au point p, en les prenant m par m.

546. Mais revenons au cas général de l'article 544, dans lequel les points fixes qui servent de pôles aux côtés du polygone ne sont pas placés en ligne droite, et supposons que le point p', pris sur la directrice (n), au lieu d'être un point simple, comme cela a été admis dans ce qui précède, soit un point multiple de l'ordre k. D'après le raisonnement déjà employé ci-dessus (545), il sera facile de prouver qu'il existera $kmqr$ branches linéaires de la courbe (e) passant toutes par le point fixe p; de sorte que, en en faisant abstraction, le degré de cette courbe sera simplement $2mnqr - kmqr = mqr(2n-k)$, au lieu de $mqr(2n-1)$, comme cela a lieu pour le cas particulier où le point p' est un point simple de la courbe (n).

Il est visible d'ailleurs que l'ordre de multiplicité du point p est toujours $mnqr$, tandis que celui du point p^{iv} n'est plus que

$$mnqr - kmqr = mqr(n-k).$$

Si plusieurs des points fixes $p, p', \ldots$, étaient placés à la fois sur les courbes qui leur correspondent respectivement; si même deux de ces points, adjacents, par les côtés sur lesquels ils se trouvent, à une même courbe ou directrice, étaient à la fois placés sur cette courbe, on obtiendrait en suivant la même marche, et le degré de la courbe que décrit le sommet libre du polygone, en faisant abstraction de toutes ses branches devenues des lignes droites, et l'ordre de multiplicité des points fixes extrêmes du polygone.

Enfin, si tous les points fixes ou seulement une partie de ces points se trouvaient à la fois en ligne droite avec les deux extrêmes p, p^{iv}, il faudrait, de plus, avoir égard aux observations déjà faites ci dessus (545); au moyen de quoi il serait toujours facile de résoudre les questions qui viennent de nous occuper, et dont plusieurs, relatives au cas particulier du triangle, ont été traitées fort au long par Braikenridge, dans l'ouvrage déjà souvent cité.

Cas pour lequel toutes les directrices du polygone variable se trouvent remplacées par une directrice unique.

547. Je crois inutile d'entrer dans plus de détails relativement aux différents cas qui nous ont occupés dans ce qui précède, et je vais passer de suite à celui où l'on remplace à la fois toutes les directrices des sommets du polygone par une même courbe géométrique d'un ordre quelconque.

Soit abcde (*fig.* 99) *un polygone plan quelconque dont les différents sommets, un seul* e *excepté qui reste libre, s'appuient constamment sur une courbe*

géométrique d'un ordre quelconque m, *tandis que ses côtés successifs* ae, ab, bc, cd, de *sont astreints à pivoter respectivement sur les points fixes* p, p′, p″, p‴, p^{iv} : *je dis que le sommet libre* e *du polygone parcourra lui-même, dans le mouvement général du système, les différents points d'une courbe du degré* $2m(m-1)^{n-2}$ (*n* étant le nombre des points fixes ou des côtés du polygone), *laquelle se réduira simplement à une courbe du degré* $m(m-1)^{n-2}$, *quand tous ces points seront placés sur une seule ligne droite.*

Tout consistant à prouver (539) qu'il n'existe, en général, qu'un pareil nombre de points de cette courbe, situés sur la direction du côté *ae* adjacent au sommet libre du polygone, j'observe qu'en prenant arbitrairement cette direction, il en résultera, en général, *m* sommets correspondants *a* sur la courbe donnée; menant donc, par le pôle suivant *p′* et par chacun de ces sommets, une ligne droite *ab*, elle ira rencontrer de nouveau la courbe donnée en $m-1$ points *b*, qui pourront être pris pour les troisièmes sommets d'autant de polygones correspondants à la même direction *ae* du premier côté; donc les points ou sommets *b* ainsi obtenus seront, en tout, au nombre de $m(m-1)$.

En continuant à opérer ainsi de proche en proche, et *n* étant le nombre total des côtés du polygone, on voit qu'on obtiendra enfin $(m-1)^{n-2}$ sommets *d* sur la courbe donnée, et par conséquent un égal nombre de directions du dernier côté *de* et de sommets *e* correspondant à la direction choisie pour le premier côté *ae* du polygone.

On peut d'ailleurs s'assurer, par un raisonnement tout à fait analogue à celui déjà employé plus haut (539), qu'il passe, en général, $m(m-1)^{n-2}$ branches de la courbe inconnue par chacun des points fixes extrêmes *p* et p^{iv}, et non davantage; donc il existe, en tout, $2m(m-1)^{n-2}$ points de cette courbe sur une même direction *ae*, lesquels d'ailleurs peuvent être réels, imaginaires, etc.; et partant tel est aussi, en général, le degré de la courbe que parcourt le sommet *e* du polygone dans les diverses positions qu'il peut prendre.

548. D'après tout ce qui a déjà été dit (540 et 541) pour le cas général où les directrices des sommets du polygone sont quelconques, je crois inutile de m'étendre sur les moyens de construire, soit la tangente en un point quelconque *e* de la courbe que décrit le sommet libre du polygone, soit les tangentes aux diverses branches de cette courbe qui passent par les points fixes *p* et p^{iv}. Quant aux cas particuliers où plusieurs des points fixes se trouveraient à la fois sur la droite qui renferme les points extrêmes *p* et p^{iv}, ou sur la courbe unique qui dirige les sommets du polygone, on ne saurait

éprouver plus de difficultés, attendu que les raisonnements sont absolument les mêmes que pour le cas général cité.

Ainsi, par exemple, que tous les points fixes soient placés sur une seule droite pp^{iv}, il paraîtra évident (541) que $m(m-1)^{n-2}$ branches de la courbe, décrite par le sommet e, deviendront des lignes droites confondues en une seule avec celle dont il s'agit, et que par conséquent le degré de cette courbe se réduira simplement à $m(m-1)^{n-2}$.

Pareillement encore, supposons que, dans le cas où les points fixes sont quelconques, l'un d'eux, p', soit placé sur la courbe qui dirige les sommets du polygone; il est facile de voir que ce point pourra être pris pour le sommet b du polygone, lorsqu'on se donne la direction de ae, ou pour le sommet a, lorsqu'on se donne celle de de, ce qui n'a pas lieu pour le cas où (544) les directrices de ces sommets sont indépendantes entre elles : or, il résulte de là et des raisonnements de l'endroit cité, que non-seulement $m(m-1)^{n-2}$ branches passant par p^{iv} deviennent des droites, mais qu'il en est ainsi encore pour l'autre point fixe p; la courbe se réduit donc alors au degré $2m(m-1)^{n-2} - 2m(m-1)^{n-3} = 2m(m-2)(m-1)^{n-3}$.

Enfin si, revenant au cas général où les points fixes sont quelconques, on suppose qu'une partie seulement des sommets du polygone s'appuient sur une même courbe, tandis que les directrices qui appartiennent aux autres sont indépendantes entre elles, on prouvera sans peine, au moyen des considérations qui précèdent, que le théorème de l'article 538 aura encore lieu, pourvu qu'on remplace le degré de chacune des directrices des différents sommets, qui appartiennent actuellement à une même courbe, par le degré de cette courbe diminué d'une unité; si ce n'est toutefois pour la directrice du premier de ces sommets, qui devra conserver le degré même qui lui est propre.

549. Pour compléter le sujet qui nous occupe, il nous resterait à examiner la nature de la courbe sur laquelle roule le dernier côté, supposé libre, ou les diagonales d'un polygone d'ailleurs assujetti à des conditions analogues à celles admises dans ce qui précède. Nous aurions aussi à examiner ce qui arrive dans le cas beaucoup plus général où, les directrices des sommets du polygone étant toujours quelconques, les côtés rouleraient sur des courbes de degrés donnés, au lieu de pivoter simplement sur des points fixes. A cet effet, nous établirions d'abord les trois principes généraux qui suivent :

« 1° D'un point donné à volonté, sur le plan d'une courbe géométrique

» du degré m, on peut mener, en général et au plus, $m(m-1)$ tangentes à » cette courbe. »

« 2° Le degré d'une courbe géométrique donnée sur le plan d'une section » conique arbitraire étant m, celui de sa polaire réciproque (232 et suivants) » est en général et au plus $m(m-1)$. »

« 3° Deux courbes géométriques, l'une du degré m, l'autre du degré n, » étant tracées sur un même plan, le nombre des tangentes qui leur sont » communes est, en général et au plus, $mn(m-1)(n-1)$. »

De ces trois principes (*) le premier a sa démonstration dans la loi de continuité; le second dérive immédiatement du premier (234); le troisième résulte du second et du principe qui a été cité (538) combiné avec la théorie des polaires réciproques; ce dont on a déjà vu un exemple particulier, art. 400, à l'occasion des courbes du deuxième degré.

Mais il est aisé de pressentir, au simple énoncé de ces principes, que les résultats auxquels on parviendrait, quant au degré des courbes parcourues, seraient nécessairement fort compliqués et n'offriraient ainsi qu'un bien faible intérêt. C'est pourquoi, au lieu de nous engager dans ces nouvelles recherches, nous allons terminer en montrant, d'une manière succincte, comment, de ce qui précède, on peut passer de suite au cas où certains angles des polygones que l'on considère sont constants, quoique mobiles autour de leurs sommets; ce qui embrassera naturellement les principaux résultats énoncés par Mac-Laurin, dans le numéro déjà cité (538, note 2e) des *Transactions philosophiques*.

Cas où certains sommets du polygone restent fixes, en même temps que leurs angles mobiles conservent une ouverture constante.

550. Commençons par ne considérer qu'un seul angle ACB (*fig.* 100), mobile autour de son sommet C, dans le plan d'une figure quelconque; traçons, de ce sommet comme centre, une circonférence de cercle d'un rayon d'ailleurs arbitraire; menons-y une tangente quelconque *ad* terminée aux deux côtés de l'angle ACB, considéré dans une de ses positions autour du centre C; achevons, à volonté, l'hexagone circonscrit *abpp'cd*; les diagonales qui joignent les sommets opposés de cet hexagone viendront se couper en un même point *e* (208).

(*) Nous avons démontré ces principes dans un article inséré à la page 208 du tome VIII des *Annales de Mathématiques*.

Cela posé, si, laissant fixes les cinq premiers côtés *ab*, *bp*, *pp'*, *p'c*, *cd* de cet hexagone, et par conséquent aussi la diagonale *bc*, on contraint le sixième côté *ad* à se mouvoir entre ceux qui lui sont adjacents, de façon que le croisement *e* des diagonales *ap'*, *pd* qui lui appartiennent soit sur la troisième diagonale *bc* qui reste fixe, le côté *ad*, dont il s'agit, roulera perpétuellement sur le cercle proposé. Or il suit de là (462) que l'angle au centre ACB, qui répond à ce côté, demeurera invariable de grandeur en occupant successivement toutes les positions possibles autour du point C; donc le mouvement d'un angle constant quelconque, qui tourne autour de son sommet considéré comme point fixe ou pôle, peut être remplacé par celui de l'angle *a*C*d* d'un quadrilatère *a*C*dea* dont le sommet C, appartenant à cet angle, est fixe, tandis que les trois autres s'appuient respectivement sur les droites *ab*, *bc*, *cd* données de position, et que, d'ailleurs, les côtés *ae* et *de*, non adjacents à cet angle, pivotent sur les points fixes *p'* et *p*, également donnés de position sur le plan de la figure.

Supposons maintenant que l'angle constant ACB, mobile autour de son sommet C, fasse partie de ceux d'un polygone variable dont les sommets A et B, adjacents à cet angle, soient astreints à parcourir des lignes courbes quelconques; il est clair, d'après ce qui précède, que le mouvement des côtés de cet angle, et par conséquent celui des sommets A et B sur les courbes dont il s'agit, pourra être exactement remplacé par le mouvement de la portion de polygone A*aed*B dont les quatre côtés A*a*, *ae*, *ed*, *d*B pivotent respectivement sur les points fixes C, *p'*, *p*, C, et dont les sommets intermédiaires *a*, *e*, *d* sont astreints à décrire les droites données *ab*, *bc*, *cd*.

Par conséquent, si le polygone variable que l'on considère possède un nombre quelconque d'angles constants, mobiles autour de leurs sommets, et dont les côtés s'appuient, par leurs extrémités respectives, sur des courbes de degrés quelconques, on pourra le remplacer par un autre polygone, dans lequel tous les côtés pivoteront sur des points fixes et dont tous les sommets, à l'exception du sommet libre, s'appuieront sur des directrices données, les unes courbes et qui appartiennent à l'ancien polygone, les autres droites et qui y auront été introduites par les opérations qui précèdent. Donc on pourra toujours déterminer le degré de la courbe que décrit, dans son mouvement, le sommet libre, au moyen des principes posés dans ce qui précède; et l'on voit que ce degré ne dépendra absolument que du degré des directrices du polygone primitif, puisque toutes celles qu'on y aura introduites subsidiairement seront des lignes droites. Par exemple, on pourra énoncer, entre autres, ce théorème général (538) :

Si l'on suppose que tous les angles, de rang pair, d'un polygone variable qui a lui-même un nombre pair de côtés, soient constants et se meuvent autour de leurs sommets respectifs considérés comme pôles, tandis que tous les sommets de rang impair, un seul excepté, soient astreints à demeurer sur des lignes courbes de degré m, n, p,..., *prises pour directrices, le sommet libre décrira lui-même une courbe de degré* 2mnp..., *et qui passera* mnp... *fois par chacun des sommets fixes qui lui sont adjacents dans le polygone.*

551. Ainsi, quand toutes les directrices seront des lignes droites, la courbe décrite par le sommet libre du polygone sera simplement une section conique, comme cela a lieu (494) pour le cas où tous les côtés du polygone pivotent sur des points fixes et où tous les angles sont variables. Quel que soit d'ailleurs le degré des diverses directrices, on voit que celui de la courbe du sommet libre s'abaissera d'autant d'unités (543) que les côtés extrêmes, adjacents à ce sommet, seront de fois susceptibles de s'appliquer ensemble sur la direction de la droite qui renferme les deux points fixes ou pôles auxquels appartiennent ces mêmes côtés.

Au surplus, ces divers théorèmes et tous ceux auxquels est parvenu Mac-Laurin, tant dans l'endroit déjà cité (549) que dans sa *Géométrie organique*, pourraient s'établir directement, soit au moyen du principe de l'article 475, dû à Newton et qui est un cas particulier de celui qui précède, soit plus généralement en s'appuyant sur les considérations qui viennent d'être mises en usage dans le précédent Chapitre, lesquelles ne reposent absolument que sur l'emploi du principe de continuité et sur quelques notions qui se rapportent à la *Géométrie de situation*. Ces théorèmes une fois établis, on en déduirait ensuite aisément ceux qui leur sont analogues et où il n'est point question d'angles constants, en supposant ces angles nuls ou égaux à deux droits; et c'est ainsi qu'en a agi Mac-Laurin pour arriver à quelques-uns de ces théorèmes, dont la découverte, avons-nous dit (204 et 494), lui a été contestée par Braikenridge.

Comme notre objet n'est point le même que celui de ces géomètres, puisque nous n'avons pas prétendu faire un Traité sur la *description des lignes courbes*, nous croyons ce qui précède plus que suffisant pour donner une idée des méthodes qu'ils ont employées, et mettre le lecteur sur la voie de découvrir, dans le besoin, beaucoup de théorèmes qui peuvent leur être échappés.

Inscription et circonscription d'un polygone à des polygones donnés.

552. Conformément à ce qui a été annoncé (537), nous allons terminer

ces recherches par quelques applications des diverses propriétés établies dans le précédent Chapitre, applications dont, pour la plupart, nous avons déjà énoncé les résultats, sans démonstration, dans un article qui a été inséré à la page 141 du tome VIII des *Annales de Mathématiques*.

On voit d'abord que rien n'est plus facile que de résoudre la question suivante :

A un polygone, donné à volonté sur un plan, inscrire un nouveau polygone qui soit en même temps circonscrit à un troisième, c'est-à-dire tracer un polygone dont les sommets s'appuient respectivement sur les côtés du premier, et dont les côtés passent respectivement par les sommets du second.

Supposons, en effet, qu'on rende libre l'un quelconque des sommets du polygone cherché, en faisant, pour un instant, abstraction de la droite donnée sur laquelle il doit se trouver; ce sommet décrira une section conique (494), rencontrant généralement la droite dont il s'agit en deux points, qu'il sera aisé de construire (344) en déterminant seulement trois points de la courbe, ou trois positions quelconques du sommet libre, outre les deux pôles ou points fixes adjacents à ce sommet, qui appartiennent également (494) à cette courbe. Ayant ainsi la position de l'un des sommets du polygone cherché, on obtiendra successivement, et de proche en proche, celle de tous les autres par des constructions purement linéaires.

Le principe de l'article 502 conduirait également à des constructions faciles à exécuter.

553. Ce problème a déjà occupé plusieurs géomètres distingués, notamment MM. Servois, Gergonne et Simon Lhuilier, qui en ont offert des solutions plus ou moins élégantes, qu'on trouve insérées dans le IIe volume des *Annales de Mathématiques ;* celle que nous venons d'offrir est conforme à la solution donnée par M. Servois à la page 116 du même volume. On voit qu'elle s'exécutera avec la règle seulement dans les deux cas suivants :

« 1° Quand les points donnés ou les sommets du deuxième polygone donné, par lesquels doivent passer les côtés du polygone qu'on cherche, seront situés sur une seule et même ligne droite (498). »

En supposant d'ailleurs que la droite qui contient tous ces poins passe à l'infini, la solution reviendra à celle qui a été donnée, par M. Gergonne, à la page 285 du tome II du recueil cité.

« 2° Quand les côtés du polygone donné, auquel doit être inscrit celui qu'on cherche, iront tous concourir en un même point (505). »

Il est évident que, dans ces divers cas, plusieurs des droites ou des points

donnés peuvent se confondre en une seule et même droite ou en un seul et même point, sans que le nombre des sommets du polygone cherché diminue, et sans que la solution cesse de rester la même (509).

554. Dans ce qui précède, nous n'avons point eu égard à l'ordre particulier dans lequel se succèdent les sommets et les côtés du polygone inconnu, relativement à la disposition des droites et des points donnés sur lesquels ils doivent s'appuyer respectivement. Or il est évident que chacun des arrangements possibles et différents, soit de ces sommets, soit de ces côtés, par rapport aux droites et aux points donnés, conduira à un problème particulier, tout à fait distinct des autres, et dont la solution devra proprement appartenir à la Géométrie ordinaire.

La question qui nous occupe, prise dans toute sa généralité, se partage donc en deux autres qu'il est essentiel de ne pas confondre : l'une appartenant à la Géométrie de situation, et l'autre, dépendant simplement de la Géométrie ordinaire, que nous venons déjà de résoudre. Celle qui est entièrement relative à la Géométrie de situation se divise elle-même évidemment en deux questions essentiellement distinctes : l'une qui consiste à rechercher

Quel est le nombre de polygones réellement différents, quant à la succession des côtés, qu'il est possible de former en assujettissant ces mêmes côtés à passer respectivement par un nombre m *de points donnés ;*

Et l'autre où l'on se propose de trouver

Quel est le nombre des polygones réellement différents, quant à la succession des sommets, qu'il est possible de former en assujettissant ces mêmes sommets, un seul excepté, à s'appuyer respectivement sur m — 1 *droites données.*

Or il est aisé de voir que le nombre des premiers polygones est, en général,

$$\frac{1.2.3\ldots\ldots(m-1)}{2}.$$

Quant à la manière de les former, on appellera $a, b, c, d, \ldots, f$ les points par où doivent passer les divers côtés du polygone, et l'on supposera que ces mêmes lettres appartiennent aussi aux côtés correspondants ; puis on placera arbitrairement trois de ces lettres, celles a, b, c par exemple, sur le périmètre d'un premier cercle ; le nombre des divers arrangements de ces trois lettres ne saurait évidemment surpasser 1, parce qu'ici on peut les lire indifféremment de droite à gauche ou de gauche à droite.

Pour passer de ce premier cas à celui où il y a quatre lettres a, b, c, d, il

faudra intercaler la lettre d successivement entre deux des trois premières, ce qui ne donnera évidemment que trois arrangements possibles et réellement différents, qu'il faudra écrire séparément sur trois nouvelles circonférences, afin de ne point les confondre entre eux.

On trouvera pareillement les arrangements qui correspondent à une cinquième lettre e, introduite parmi les autres, en l'intercalant, pour chacune des circonférences dont il vient d'être question, entre deux lettres consécutives des arrangements de quatre lettres qu'elles représentent séparément : on obtient ainsi quatre arrangements possibles de cinq lettres, pour chacune de ces circonférences ; d'où il suit que le nombre total de ces divers arrangements est $3.4 = 12$. Pour les distinguer les uns des autres, on pourra les écrire, à leur tour, sur autant de circonférences particulières.

En continuant ainsi de proche en proche, on parviendra enfin à obtenir tous les arrangements possibles et différents qui correspondent aux m points donnés, et l'on voit que leur nombre sera égal en général à $3.4.5....(m-1)$, ainsi que nous l'avions annoncé.

Rien n'est plus facile que de concevoir l'usage qu'on pourra faire de cette espèce de tableau artificiel. Supposons, par exemple, que l'on considère, en particulier, un arrangement $abcd...f$; en se reportant à la figure du problème, cela signifiera qu'en faisant passer par a le premier côté du polygone à construire, le second devra passer par b, le troisième par c, le quatrième par d, et ainsi de suite, et enfin le dernier par f.

555. Pour résoudre la seconde question, prenons, à volonté, l'un des polygones particuliers ainsi obtenus, qui diffère de tous les autres, quant à l'arrangement des côtés relativement aux points donnés, par exemple celui $abcd...f$ que nous venons de considérer en dernier lieu. Prolongeons son premier côté a jusqu'à sa rencontre avec les $m-1$ droites données, il en résultera $m-1$ points distincts qu'on pourra prendre pour les deuxièmes sommets d'autant de polygones différents ; faisant donc passer le second côté b par chacun de ces sommets, et prolongeant, à son tour, ce côté jusqu'à sa rencontre avec les $m-2$ droites données restantes, et qui ne contiennent pas le deuxième sommet appartenant déjà à ce côté, il en résultera $m-2$ points distincts qu'on pourra prendre pour les troisièmes sommets de chacun des polygones différents qui correspondent aux $m-1$ deuxièmes sommets déjà trouvés ; c'est-à-dire qu'on aura, en tout, $(m-1)(m-2)$ troisièmes sommets pouvant appartenir à un égal nombre de polygones essentiellement différents.

Traçons de nouveau chacun des troisièmes côtés c qui correspondent aux $(m-1)(m-2)$ troisièmes sommets trouvés, et prolongeons-le également jusqu'à sa rencontre avec les $m-3$ droites données, qui ne renferment ni le troisième, ni le deuxième sommet d'où il provient; il en résultera, pour ce troisième côté c, $m-3$ points qu'on pourra prendre pour les quatrièmes sommets de chacun des polygones différents qui correspondent aux $(m-1)(m-2)$ troisièmes sommets déjà trouvés, c'est-à-dire en tout $(m-1)(m-2)(m-3)$ quatrièmes sommets appartenant à un égal nombre de polygones essentiellement différents.

En continuant ainsi, de proche en proche, jusqu'au dernier côté f, on trouvera évidemment que le nombre des polygones essentiellement différents qu'on peut former, pour un même arrangement $abcd\ldots f$ des côtés relativement aux droites données, est égal à

$$(m-1)(m-2)(m-3)\ldots 3.2.1.$$

Il suit de là que le nombre total des polygones essentiellement différents que l'on peut former, relativement à l'ordre particulier de succession des sommets et des côtés par rapport aux droites et aux points donnés, est, en tout (554),

$$\frac{1.2^2.3^2\ldots(m-1)^2}{2}.$$

Mais, d'après ce qui précède, pour un ordre quelconque de succession des côtés et des sommets par rapport aux droites et aux points donnés, le problème de l'article 552 a, en général, deux solutions distinctes; donc le nombre total des solutions effectives de ce problème, pris avec toute l'extension qui lui est propre, est en général $1.2^2.3^2\ldots(m-1)^2$.

556. Si l'on admettait qu'une même droite donnée pût renfermer plusieurs sommets du polygone, et que le nombre de ces droites fût d'ailleurs n, on trouverait, par le raisonnement qui précède, que le nombre des polygones essentiellement différents, qui ont leurs sommets sur ces droites et qui répondent à un même ordre de succession des points donnés, est égal à $n(n-1)^{m-1}$; le nombre des solutions effectives du problème serait donc alors

$$1.2.3\ldots(m-1)n(n-1)^{m-1},$$

nombre qui se réduira à la moitié toutes les fois (553) que les points donnés seront sur une même droite, ou que les droites données convergeront en un même point. C'est ce qui aura lieu en particulier (509), quand n sera égal à 2, ou que le polygone devra être inscrit dans un angle donné;

ainsi le nombre des solutions effectives du problème sera alors simplement $1.2.3....(m-1)$.

Inscription aux sections coniques de polygones dont les côtés passent par des points donnés.

557. Les considérations précédentes, qui sont entièrement analogues à celles mises en usage art. 547, s'appliquent également au cas où l'on remplace les droites données par une section conique quelconque; mais alors il ne peut plus être question que de l'ordre de succession des côtés par rapport aux points proposés, lequel donne évidemment toujours lieu (554) à $3.4....(m-1)$ polygones différents et distincts. Si l'on ne considère, en particulier, qu'un seul de ces polygones, la partie purement géométrique du problème relatif au cas dont il s'agit pourra s'énoncer ainsi qu'il suit :

A une section conique donnée et décrite sur un plan, inscrire un polygone de m *sommets, dont les côtés, prolongés s'il le faut, passent respectivement, et dans un ordre assigné, par autant de points donnés arbitrairement sur un plan.*

Ce problème est célèbre et a exercé la sagacité d'un grand nombre de savants géomètres : Pappus le résout, dans ses *Collections mathématiques*, pour le cas particulier du cercle et du triangle, lorsqu'on suppose les trois points donnés en ligne droite. Cramer ayant proposé depuis le problème de Pappus à Castillon, en étendant l'énoncé au cas où les trois points sont quelconques, ce dernier en donna une solution fort compliquée, qui se trouve imprimée dans les *Mémoires de l'Académie de Berlin* pour 1776, et qui n'a guère d'autre mérite que celui d'avoir été obtenue par l'Analyse géométrique des Grecs. Lagrange en donna peu après une autre solution très-belle, mais purement algébrique, qui est insérée dans le même volume, et qu'on retrouve dans la *Géométrie de position*, simplifiée et étendue au cas où l'on demanderait d'inscrire au cercle un polygone d'un nombre quelconque de côtés, passant par un égal nombre de points donnés. Le cas particulier du triangle a encore occupé Euler et ses disciples Fuss et Lexell (*).

Giordano di Ottaiano, jeune Napolitain, fut le premier qui trouva une solution géométrique et simple du cas général de l'inscription au cercle d'un polygone quelconque; mais, quoique fort élégante, elle exige l'emploi du compas et une suite d'opérations qui, même pour le cas particulier du triangle, sont encore assez compliquées. Malfatti parvint peu de temps après

(*) IVe volume des *Nouveaux Mémoires de Pétersbourg*.

à la même solution, en partant de principes analogues et, à ce qu'il paraît, sans avoir eu connaissance des résultats de Giordano : les recherches de ces deux géomètres se trouvent imprimées dans le IVe volume des *Mémoires de la Société Italienne*, et ont été reproduites depuis par S. Lhuilier, dans ses *Éléments d'Analyse géométrique et d'Analyse algébrique*, § 146.

Enfin ce problème a aussi occupé M. Brianchon, pour le cas où, les points donnés étant sur une même droite, on substitue au cercle une section conique quelconque. Sa solution, qui est entièrement basée sur le principe de l'article **522**, se trouve imprimée dans le Xe Cahier du *Journal de l'École Polytechnique*, parmi d'autres recherches intéressantes qui, pour la plupart, ont déjà été signalées dans le cours de cet ouvrage.

Les solutions que nous allons offrir et que nous avons énoncées, sans démonstration, dans un article inséré à la page 147 du tome VIII des *Annales de Mathématiques*, paraîtront surtout dignes de remarque en ce que, s'appliquant à une section conique en général, elles n'exigent que l'emploi de constructions linéaires fort simples, même pour le cas de l'inscription à la courbe d'un polygone d'un nombre quelconque de côtés.

558. La question se réduit évidemment à assigner l'un des sommets du polygone demandé, attendu que, ce sommet une fois déterminé, la solution s'achève, avec la règle seulement, de la manière la plus simple, soit que d'ailleurs la courbe soit entièrement décrite ou seulement donnée (**204**) par cinq points quelconques de son périmètre.

Supposons donc qu'on inscrive à volonté, à la section conique, une portion de polygone dont les côtés, en nombre égal à celui des points donnés, passent respectivement, et dans l'ordre assigné, par ces points. Soient a et k la première et la dernière extrémité de cette portion de polygone; s'il arrive que a et k se confondent, et que ak touche par conséquent la section conique, c'est-à-dire si la portion de polygone se ferme d'elle-même sur la courbe, le polygone ainsi obtenu sera évidemment un de ceux que l'on cherche.

Si au contraire, comme il arrive en général, les extrémités a et k ne se confondent pas, en les joignant par une droite ak et faisant varier la portion de polygone correspondante, de toutes les manières possibles, d'après les mêmes conditions, cette droite roulera en enveloppant dans ses diverses positions (**510**) une même section conique doublement tangente à la proposée. Or, la question qui nous occupe revenant à chercher la position de la corde ak pour laquelle cette corde est nulle ou tangente à la courbe proposée, et cette circonstance ne pouvant avoir lieu évidemment que pour les

seuls points de contact de la section conique qu'elle enveloppe avec celle dont il s'agit, on voit que tout consiste simplement à déterminer ces deux points de contact ou la sécante qui leur appartient; car, en prenant ensuite l'un quelconque de ces points pour la première ou la dernière extrémité d'une portion de polygone correspondante, il arrivera nécessairement que cette portion de polygone se fermera d'elle-même sur la courbe proposée.

La question à laquelle se réduit, en dernière analyse, celle qui nous occupe se trouve résolue tout entière dans le précédent Chapitre (510 et 511), et sa solution est, comme on l'a vu, assez simple et n'exige que des constructions purement linéaires; mais, comme cette solution est indirecte et manque de symétrie, il ne sera pas hors de propos de faire voir qu'on peut la remplacer par une autre beaucoup plus élégante.

559. En effet, pour obtenir la sécante de contact de la section conique proposée avec celle qu'enveloppe la corde *ak* dans toutes ses positions, on peut aussi se servir du procédé général indiqué art. 424, qui exige simplement que l'on connaisse trois positions quelconques et distinctes de *ak*, lesquelles sont ici faciles à obtenir. Cela posé, tout consistera, comme on le voit, à inscrire à la courbe proposée un hexagone dont ces trois cordes soient précisément les diagonales joignant les sommets opposés; car, d'après ce qui a été dit à l'endroit cité, la droite qui renfermera les points de concours des côtés opposés de cet hexagone sera précisément la sécante de contact demandée.

Comme cette construction donne lieu à quatre hexagones et à quatre sécantes de contact répondant à autant de sections coniques doublement tangentes à la proposée, il est bon de remarquer qu'il n'y a qu'une seule de ces solutions qui doive appartenir à la question qui nous occupe, attendu que la corde *ak* ne peut également envelopper, dans ses diverses positions, qu'une seule et même courbe. Or, cette courbe devant nécessairement être intérieure à la proposée, il sera facile de voir, en se servant des considérations de l'article 438, que les premières extrémités *a* des trois portions de polygones qui ont donné les trois cordes *ak* devront être prises pour les trois sommets de rang impair de l'hexagone ci-dessus, et les dernières *k* pour les trois sommets de rang pair qui leur sont opposés respectivement; donc on a cette nouvelle solution du problème général que nous avons en vue :

« Inscrivez à volonté et successivement, à la section conique proposée,
» trois portions de polygones dont les côtés, en nombre égal à celui des
» points donnés, passent respectivement, et dans l'ordre assigné, par ces

» points. Soient a, a', a'' les premières extrémités de ces portions de poly- » gones, et k, k', k'' les dernières, respectivement. Soient considérés ces six » points comme les sommets d'un hexagone inscrit à la section conique, » ayant pour sommets opposés a et k, a' et k', a'' et k'', et les trois points a, » a', a'' pour sommets de rang impair; les trois points de concours de ses » côtés opposés seront, comme on sait, sur une même droite, et cette droite » coupera, en général, la section conique en deux points, dont chacun » pourra être pris pour le sommet cherché du polygone. »

560. On voit que cette construction revient, en définitive, à joindre par de nouvelles droites les extrémités d'espèces différentes appartenant à deux quelconques des cordes ak, $a'k'$, $a''k''$, obtenues comme il vient d'être expliqué; car leur point de rencontre sera précisément un des points de concours des côtés opposés de l'hexagone, c'est-à-dire (438) un des points de la sécante de contact cherchée.

Quelque incontestable que soit la supériorité de cette seconde solution sous le rapport de la généralité et de la symétrie, nous croyons cependant devoir observer que, lorsque les points donnés sont peu nombreux, l'autre semble lui être préférable sous le rapport de la simplicité, attendu qu'elle exige le tracé d'un moindre nombre de lignes.

Toutes ces constructions ayant d'ailleurs une partie arbitraire, on peut profiter de ce qu'elles présentent d'indéterminé pour les rendre plus simples. On peut, par exemple, faire passer l'un des côtés extrêmes de la portion de polygone par les deux premiers ou les deux derniers des points donnés. Ce côté comptera alors pour deux, et l'origine de la portion de polygone pourra être indistinctement supposée à l'une ou à l'autre de ses extrémités. En appliquant cette remarque au cas du triangle, dans la première solution, on aura deux manières de déterminer le point P'' (511, *fig.* 85) sur la polaire de p''. On pourra donc se dispenser de construire cette polaire, et la recherche du sommet inconnu se réduira ainsi au tracé de neuf lignes droites seulement. Cette remarque, appliquée également au cas du triangle dans la seconde solution, conduira précisément aux mêmes résultats.

On voit au surplus, par ce qui précède, que pour un ordre de succession quelconque des points donnés, le problème peut avoir, en général, deux solutions distinctes; donc, pris dans toute son universalité, le nombre de ses solutions distinctes pourra s'élever (556) à $1.2.3 \ldots (m-1)$.

Circonscription, aux sections coniques, de polygones dont les sommets s'appuient sur des droites données.

561. Les considérations qui viennent d'être exposées conduisent immédiatement, au moyen de la théorie des pôles, à la solution complète de cet autre problème, qui peut être considéré, en quelque sorte, comme le réciproque du premier :

A une section conique donnée et décrite sur un plan, circonscrire un polygone de m *côtés, dont les sommets s'appuient respectivement sur un même nombre de droites données, tracées arbitrairement sur ce plan.*

En effet, si l'on construit les pôles des droites données, et qu'on leur applique la question résolue en dernier lieu; si l'on circonscrit ensuite, à la section conique, les polygones qui ont pour points de contact des côtés les sommets des polygones inscrits ainsi obtenus, il est évident que les sommets de ces nouveaux polygones appartiendront respectivement (524) aux diverses droites données. D'après cela, le nombre de ces polygones sera encore égal à $1.2.3\ldots(m-1)$, comme ci-dessus.

Cette solution est indirecte; mais soit qu'on applique aux solutions du problème de l'article 557 les principes de la théorie des polaires réciproques, soit qu'au contraire on se serve immédiatement des principes établis, dans le précédent Chapitre (524 et suivants), sur les polygones circonscrits, en les combinant avec les résultats obtenus art. 418 et 419, on parviendra, d'une manière également facile, aux diverses constructions qui résolvent le nouveau problème sans aucune opération auxiliaire. Ainsi, par exemple, on arrivera à cette solution qui ne le cède en rien, pour l'élégance et la simplicité, à celle de l'article 559, relative aux polygones inscrits dont l'ordre de succession des côtés et des points fixes est assigné :

« Circonscrivez à volonté et successivement à la section conique proposée trois portions de polygones d'autant de sommets qu'il y a de droites » données, et dont les sommets soient respectivement, et dans l'ordre assigné, sur ces droites. Soient a, a', a'' les premiers côtés de ces portions de » polygones, et k, k', k'' les derniers respectivement. Soient considérées ces » six droites comme les côtés d'un hexagone circonscrit à la courbe, ayant » pour ses côtés opposés a et k, a' et k', a'' et k'', et les trois côtés a, a', a'' » pour côtés de rang impair; les trois diagonales, joignant les sommets » opposés de cet hexagone, se couperont, comme l'on sait (208), en un » même point; et la polaire de ce point déterminera, par son intersection

» avec la courbe, deux points dont chacun pourra être pris pour le point de » contact de cette courbe avec le côté cherché du polygone. »

562. Le problème que nous venons de résoudre en dernier lieu a aussi occupé plusieurs géomètres de mérite : il a d'abord été proposé par M. Gergonne, pour le cas particulier du triangle et du cercle, à la page 17 du tome I[er] des *Annales de Mathématiques*. M. Encontre a ensuite fait voir, page 122 du même volume, que sa solution, pour le cas général de la circonscription au cercle d'un polygone quelconque, pouvait se ramener, au moyen de la théorie des pôles, au problème analogue relatif aux polygones inscrits, déjà résolu par les géomètres.

Cette solution, comme on voit, était indirecte et exigeait l'emploi de la règle et du compas réunis, ainsi que celle d'où on la déduisait; M. Gergonne, quelques pages après, en énonça une autre entièrement directe, relative au cas particulier du triangle, et qui fut étendue aux sections coniques et démontrée enfin géométriquement par MM. Servois et Rochat, aux pages 338 et 342 du volume déjà cité : comme elle est fort élégante, je crois qu'on verra avec plaisir comment elle peut se déduire des principes qui précèdent.

Soient AB, BC, AC (*fig.* 85) les droites données sur lesquelles doivent s'appuyer les sommets respectifs du triangle circonscrit à la courbe; soient p, p', p'' les pôles respectifs de ces droites, par lesquels doivent passer les côtés du triangle polaire inscrit qui a ses sommets aux points de contact des côtés du premier (524); en traçant à volonté le quadrilatère inscrit *abcd*, comme il a été expliqué (511), tout consistera (558 et 561) à rechercher la sécante de contact commune de la section conique proposée et de celle qu'enveloppe le côté libre *ad* de ce quadrilatère dans les diverses positions qu'il peut prendre. A cet effet, on pourrait construire les deux points P′ et P″ comme à l'endroit cité (511), puisqu'ils appartiennent à la direction de la droite dont il s'agit; mais on arrivera encore au même but à l'aide des considérations suivantes.

D'après la construction, les trois points P, p'', P″ sont tels, que l'un quelconque P d'entre eux est le pôle de la droite p''P″ qui renferme les deux autres; donc cette droite p''P″ doit (196) renfermer le pôle de toute droite P$p'p$ passant par P; or le pôle de pp' est évidemment à l'intersection B des polaires AB et BC de p et p'; donc les trois points B, p'' et P″ sont sur une même droite, et par conséquent on peut obtenir immédiatement le point P″ au moyen des deux autres et sans passer par les constructions de l'article 511; on aura donc ainsi un des points de la sécante de contact cherchée.

Maintenant, si l'on joint le sommet C du triangle donné ABC avec le pôle p du côté AB, qui lui est opposé, par une droite Cp, on prouvera de la même manière que le point où elle ira rencontrer ce côté appartiendra également à la sécante qui renferme le point de contact du côté du triangle circonscrit dont les extrémités sont sur les droites AB et AC; donc cette droite sera entièrement connue de position aussi bien que le côté dont il s'agit, et par conséquent le problème proposé sera complètement résolu par des constructions purement linéaires.

Ces résultats, qui sont exactement conformes à ceux obtenus par MM. Gergonne, Servois et Rochat aux endroits cités des *Annales de Mathématiques*, peuvent évidemment s'énoncer ainsi :

« Ayant déterminé (*fig.* 91) les pôles respectifs p, p', p'' des côtés du » triangle donné ABC, par rapport à la section conique, on joindra chacun » de ces pôles, par une droite, avec le sommet opposé au côté d'où il pro- » vient; cette droite ira déterminer sur ce côté un point, ce qui donnera en » tout trois points pareils A', B', C' : or ces trois points étant joints, deux à » deux, par de nouvelles droites, donneront lieu à un triangle A'B'C', in- » scrit au proposé, dont les côtés détermineront, par leurs intersections avec » la courbe, les six points de contact appartenant aux deux triangles à la » fois circonscrits à cette courbe et inscrits au proposé. »

Il est évident que ces relations font partie de celles qui appartiennent au système de trois points, pris à volonté sur le plan d'une section conique, et aux polaires de ces trois points; relations qui ont été exposées, pour la plupart, aux articles 419 et 424.

Cas où les points donnés sont sur une même droite, et où les droites données concourent en un même point.

563. Parmi le grand nombre de cas particuliers que peuvent offrir les problèmes généraux des articles 557 et 561, il en est deux qui paraîtront tout à fait dignes d'intérêt, soit par les circonstances qu'ils présentent, soit par la simplicité de la solution qui leur est relative ; l'un et l'autre sont des conséquences tellement évidentes des principes établis art. 513, 525 et 529 du précédent Chapitre, que je crois pouvoir me borner au simple énoncé des résultats.

A une section conique donnée inscrire un polygone de tant de sommets qu'on voudra, dont les côtés passent respectivement et dans un ordre assigné, par autant de points donnés, situés sur une même ligne droite.

Solution. Inscrivez à volonté, à la courbe, une portion de polygone, dont

les côtés passent respectivement par les points donnés. Le nombre de ces points pourra être pair ou impair.

Le nombre des points donnés étant pair, si le polygone ne se ferme pas de lui-même, le problème ne pourra être résolu; et si, au contraire, il se ferme de lui-même, tout autre se fermera également, et par conséquent le problème sera susceptible d'un nombre indéfini de solutions, c'est-à-dire qu'il sera *indéterminé*.

Le nombre des points donnés étant impair, la corde qui joindra les deux extrémités de la portion de polygone ira couper la droite unique, qui contient les points donnés, en un nouveau point dont la polaire, par son intersection avec la courbe, déterminera deux points, dont chacun pourra être pris pour le dernier sommet du polygone demandé.

A une section conique donnée circonscrire un polygone de tant de côtés qu'on voudra, dont les sommets s'appuient respectivement, et dans un ordre assigné, sur un égal nombre de droites données, concourant toutes en un seul et même point.

Solution. Circonscrivez à volonté, à la courbe, une portion de polygone dont les sommets s'appuient respectivement sur les droites données. Le nombre de ces droites pourra être pair ou impair.

Le nombre des droites données étant pair, si les deux côtés extrêmes de la portion de polygone ne se confondent pas en un seul, le problème ne pourra être résolu; et si, au contraire, ils coïncident de manière à former un polygone fermé, ce polygone et tous les autres qu'on pourra construire sous les mêmes conditions que celui-là résoudront le problème, qui aura ainsi un nombre indéfini de solutions.

Le nombre des droites données étant impair, la droite qui joindra le point de concours des côtés extrêmes do la portion de polygone avec le point de concours des droites données coupera la section conique en deux points, dont chacun pourra être pris pour le point de contact de cette courbe avec le dernier côté du polygone cherché.

564. La solution du premier des deux problèmes qui précèdent conduit directement à la démonstration de la propriété suivante, qui mérite d'être citée en passant :

Si deux polygones, d'un même nombre impair de sommets, à la fois inscrits à une même section conique, sont tels, que leurs côtés correspondants, pris deux à deux, se coupent en des points appartenant à une même droite, je dis que les droites qui joindront, dans le même ordre, les sommets opposés aux diffé-

rentes paires de côtés dont il s'agit, iront toutes passer par un point unique ayant pour polaire la droite qui renferme les points de concours ci-dessus; c'est-à-dire, en d'autres termes, que les deux polygones auront (298) *ce pôle et cette droite pour* CENTRE *et* AXE D'HOMOLOGIE.

Considérons le cas particulier de deux triangles inscrits ABC, A'B'C' (*fig.* 101) dont les côtés correspondants concourent, deux à deux, aux trois points p, p', p'' situés en ligne droite; la démonstration s'appliquera, de la même manière, à des polygones quelconques inscrits, de même ordre, et d'un nombre impair de côtés.

Puisque les points de concours p, p', p'' sont situés en ligne droite et appartiennent à la fois aux côtés de l'un et de l'autre triangle inscrit, on peut regarder ces deux triangles comme les deux solutions du problème cité, appliquées à ces trois points; or il suit de là que deux sommets, tels que ceux B et B' qui sont opposés à des côtés AC et A'C' concourant vers un même point donné p'', doivent appartenir à une droite BB', dont le pôle est sur la droite qui renferme les points p, p', p''; donc (196) cette droite passe réciproquement par le point P qui est le pôle de pp'; et, comme il en est de même de chacune des deux autres AA', CC', on voit que toutes ces droites doivent se couper en un même point; ce qu'il s'agissait de démontrer.

Quant au cas où les côtés des deux polygones seraient en nombre pair, on voit que le même raisonnement ne serait plus applicable, puisqu'il pourrait exister alors une infinité de polygones inscrits dont les côtés iraient (513) respectivement concourir aux mêmes points que ceux des deux premiers. Le contraire a évidemment lieu pour la proposition réciproque de celle qui précède; car il résulte de la théorie des pôles (194), ou de celle des centres et axes d'homologie (296), que, si les sommets respectifs de deux polygones inscrits quelconques appartiennent, deux à deux, à des droites qui passent par un même point P, les côtés homologues doivent aussi concourir, dans le même ordre, sur la polaire de ce point.

Au surplus les considérations qui précèdent, ou leurs analogues déduites du second des problèmes ci-dessus, conduiraient à des propriétés exactement semblables pour les polygones d'un nombre impair de côtés, circonscrits aux sections coniques : c'est-à-dire que deux tels polygones sont nécessairement homologiques, dès l'instant où les droites qui joignent leurs sommets homologues concourent en un même point.

Inscription, à une section conique donnée, d'un polygone qui soit en même temps circonscrit à une autre.

565. Nous allons terminer ces applications par l'examen de la question suivante, qui présente des circonstances non moins dignes de remarque que celles auxquelles nous avons été conduits ci-dessus (563) :

Deux sections coniques étant données sur un même plan, inscrire à l'une d'elles un polygone de tant de côtés qu'on voudra, qui soit en même temps circonscrit à l'autre.

Solution. Inscrivez à volonté, à la première des deux courbes, une portion de polygone dont les côtés, en nombre égal à celui des côtés du polygone demandé, soient tous tangents à la seconde. Si cette portion de polygone ne se ferme pas d'elle-même sur la courbe à laquelle elle est inscrite, c'est-à-dire si ses sommets extrêmes ne se confondent pas en un seul et même point, le problème ne pourra être résolu en aucune manière ; et si, au contraire, cette portion de polygone se ferme d'elle-même, toute autre, qu'on essayerait de construire d'après les mêmes conditions, se fermera également, et conséquemment le problème sera susceptible d'un nombre indéfini de solutions, c'est-à-dire qu'il sera indéterminé.

Pour le prouver, considérons d'abord le cas particulier du triangle, et supposons qu'ayant essayé d'inscrire, à volonté, à une section conique une telle figure, dont les côtés touchent une autre section conique quelconque, il se trouve que les conditions du problème soient remplies : ABC (*fig.* 102) étant ce triangle, et A', B', C' les points de contact, avec l'une des deux courbes, des côtés respectivement opposés aux sommets A, B, C, je dis que, si l'on vient ensuite à faire varier l'angle BAC de façon qu'il soit constamment circonscrit à cette courbe et inscrit à l'autre, le côté BC, qui sous-tend l'angle BAC dans celle-ci, demeurera lui-même perpétuellement tangent à la première.

En effet, s'il n'en était pas ainsi, le côté BC envelopperait, dans ses diverses positions, une troisième section conique distincte des autres (533 et 534), qui aurait mêmes sécantes communes qu'elles ou mêmes points d'intersection, et dont le point de contact avec BC serait placé, à chaque instant (531 et 535), sur la droite AA' qui joint le sommet A de l'angle avec le point de croisement D des droites BB', CC' qui vont des extrémités de BC aux points de contact B' et C' des côtés opposés de cet angle. Or, pour la position actuelle du triangle ABC, qu'on suppose à la fois inscrit à l'une des courbes

proposées et circonscrit à l'autre, cette construction est précisément (161) celle au moyen de laquelle on obtiendrait le point de contact du côté BC avec la courbe qui dirige les côtés AB et AC; donc cette courbe et celle qu'enveloppe, par hypothèse, le côté BC dans le mouvement de l'angle A, se toucheraient au point A', ou auraient deux points confondus en un seul avec celui-là, ce qui est visiblement absurde, à moins qu'elles ne se confondent en une seule et même courbe.

En effet, les deux points dont il s'agit devant, en même temps, appartenir (533 et 534) à la troisième courbe qui dirige le sommet A de l'angle que l'on considère, les deux sections coniques proposées auraient, contre l'hypothèse, un élément commun, et ne seraient pas quelconques. Bien plus, en supposant même que cette circonstance particulière eût lieu pour les courbes proposées, on voit que le côté BC devrait être nul, ce qui exigerait, contrairement encore à l'hypothèse, que le triangle dont on s'occupe en particulier s'évanouît ou qu'il cessât d'exister.

Ainsi donc, que les sections coniques proposées s'entrecoupent ou se touchent, s'il arrive qu'on puisse inscrire à l'une d'elles un triangle qui soit en même temps circonscrit à la seconde, il en existera, par là même, une infinité d'autres qui jouiront tous de la même propriété.

566. Considérons maintenant un quadrilatère ABCD (*fig.* 103), à la fois inscrit à une section conique et circonscrit à une autre dont A', B', C', D' soient les points de contact avec les côtés respectifs AB, BC, CD, DA de ce quadrilatère. Supposons que l'on fasse varier la portion de quadrilatère CBAD, composée des trois côtés CB, BA, AD, en l'assujettissant à demeurer toujours inscrite et circonscrite aux deux courbes proposées; le dernier côté CD, devenu ainsi libre, enveloppera, en général, une nouvelle section conique passant par les points d'intersection commune des deux autres (534); or je dis que cette nouvelle section conique se confondra nécessairement avec celle des proposées sur laquelle roulent déjà les autres côtés du quadrilatère.

Pour le prouver, il suffit évidemment, comme ci-dessus, de montrer que C' est le point de contact du côté CD avec la nouvelle courbe. A cet effet, je trace d'abord la diagonale AC du quadrilatère, formant avec les côtés AB, BC le triangle ABC, et j'observe que, dans le mouvement général de la figure, cette droite enveloppera une quatrième section conique (534), dont le point de contact K avec AC s'obtiendra, à chaque instant, comme il a déjà été expliqué ci-dessus, en traçant les droites CA', AB' qui vont des extrémités de la diagonale aux points de contact des côtés opposés AB et BC, puis menant,

par le point de croisement H de ces droites et par le sommet opposé B, la droite BH, qui coupera AC au point K dont il s'agit.

Pareillement, les côtés de l'angle inscrit CAD demeurant constamment tangents à deux sections coniques qui ont mêmes sécantes communes avec les proposées, et dont K et D' sont les points de contact avec les côtés de cet angle, on obtiendra, à chaque instant, par uno construction semblable (531) et qu'on trouve indiquée sur la figure, le point de contact C' du côté libre CD du quadrilatère, qui sous-tend l'angle CAD dont il s'agit. Mais il est aisé de se convaincre, par des considérations analogues à celles employées dans le Chapitre II de la IIe Section (185), que les constructions qui précèdent, pour trouver le point de contact du côté CD avec la courbe qu'il est censé envelopper quand il devient libre, sont précisément celles par lesquelles on pourrait aussi obtenir le point de contact de ce même côté, avec la section conique proposée, pour la position actuelle du quadrilatère où il est circonscrit entièrement à cette section conique; donc nos deux prétendues courbes distinctes se touchent nécessairement au point commun C' dont il s'agit; ce qui ne peut avoir lieu, par les raisons déjà déduites ci-dessus (565), sans qu'elles se confondent en une seule et même courbe, et sans que par conséquent le quadrilatère ABCD demeure perpétuellement circonscrit à la proposée.

Il ne serait pas difficile d'étendre cette démonstration à un polygone d'un plus grand nombre de côtés; mais on remarquera, en général, qu'en rendant libre l'un des côtés de ce polygone, et le faisant mouvoir de façon que tous les autres demeurent, comme auparavant, à la fois inscrits et circonscrits aux sections coniques proposées, ce côté s'appliquera nécessairement, dans certaines positions du polygone, sur les différents côtés de celui duquel on est parti, et qu'on suppose exactement inscrit et circonscrit aux deux premières; donc la conique distincte, qu'il est censé envelopper dans son mouvement, aurait autant de tangentes communes avec l'une des proposées qu'il y a de côtés dans le polygone; ce qui ne saurait être sans qu'elles se confondent en une seule et même courbe (209), puisqu'ici le nombre des côtés est plus grand que quatre. Concluons donc que :

« Quand un polygone quelconque est à la fois inscrit à une section conique » et circonscrit à uno autre, il en existe une infinité de semblables qui » jouissent de la même propriété à l'égard des deux courbes; ou plutôt » tous ceux qu'on essayerait de décrire à volonté, d'après ces conditions, » se fermeraient d'eux-mêmes sur ces courbes.

» Et réciproquement, s'il arrive qu'en essayant d'inscrire à volonté, à une

» section conique, un polygone dont les côtés en touchent une autre, ce » polygone ne se ferme pas de lui-même, il ne saurait nécessairement y en » avoir d'autres qui jouissent de cette propriété. »

567. Toutefois, on ne doit pas conclure de là qu'en joignant, par une droite, les deux extrémités d'une portion de polygone quelconque, entièrement inscrite à l'une des courbes proposées et circonscrite à l'autre, et qu'en faisant mouvoir le polygone formé d'après ces conditions, le côté libre dont il s'agit ne puisse jamais devenir tangent à la section conique qu'enveloppent les autres côtés; le contraire a évidemment lieu, puisque ce côté roule sur une troisième section conique distincte des deux proposées, et qui doit avoir, en général, des tangentes communes avec chacune d'elles. Mais il est facile de voir aussi que, pour ces positions particulières du polygone, il doit nécessairement changer de forme et se réduire à un plus petit nombre de côtés.

Supposons, par exemple, que les courbes proposées étant entièrement extérieures l'une à l'autre, et le polygone dont il s'agit ayant un nombre impair de sommets, on considère celles des positions de ce polygone pour lesquelles l'un quelconque des côtés, adjacents au sommet opposé au côté libre, soit nul ou tangent à la fois aux deux courbes proposées; il arrivera (*) évidemment que les côtés qui occupent de part et d'autre le même rang à compter de celui-là se confondront deux à deux en un seul, et partant que le côté libre se confondra aussi avec l'un de ses adjacents, et sera par conséquent tangent à la section conique que touchent les autres côtés; or on voit qu'alors même le polygone aura changé de forme et se sera réduit véritablement à une portion ouverte de polygone d'un nombre moindre de côtés, ce qui d'ailleurs aura lieu évidemment pour quatre positions distinctes du polygone variable que l'on considère.

Propriétés des polygones à la fois inscrits à une section conique et circonscrits à une autre.

568. Nous pouvons tirer de tout ce qui précède quelques conséquences faciles et remarquables.

Soit ABCD (*fig.* 103) un quadrilatère à la fois inscrit à une section conique

(*) On se rendra aisément compte de tout ceci à l'aide d'une figure, et en se rappelant que nous prenons, comme partout dans cet ouvrage, le mot *polygone* dans son acception la plus générale. *Voyez* p. 3.

et circonscrit à une autre; nous venons de voir qu'il peut en exister une infinité de semblables jouissant de cette propriété, ou plutôt que tous ceux qu'on essayerait de construire d'après les mêmes conditions se fermeraient naturellement autour des deux courbes, et seraient par conséquent à la fois inscrits et circonscrits à ces courbes; or on remarquera que, dans cette infinité de positions du quadrilatère ABCD, les diagonales AC et BD, qu'on peut regarder comme les cordes qui sous-tendent chacune des paires d'angles respectivement opposés, on remarquera, dis-je, que ces diagonales enveloppent toutes une seule et même section conique (533), appartenant au mouvement d'un angle générateur unique, à la fois inscrit à l'une des courbes et circonscrit à l'autre. D'ailleurs chaque diagonale AC répond à la fois à deux positions distinctes ABC, ADC de l'angle générateur dont il s'agit; donc la courbe unique qu'enveloppent ces diagonales est infiniment petite (532), on se confond avec le point K de leur intersection commune, lequel demeure ainsi invariable de position durant le mouvement du quadrilatère.

On peut encore démontrer les mêmes choses, d'une manière entièrement directe et générale, en observant que le point de contact K de la diagonale AC avec la section conique qu'elle enveloppe, point qui a déjà été construit ci-dessus (566), est précisément celui de son intersection avec la seconde diagonale BD du quadrilatère (*). Car le point K étant, par la même raison, le point de contact de la diagonale BD avec la section conique qu'elle enveloppe dans son mouvement, et, d'après ce qui a été dit plus haut, cette section conique se confondant avec celle qui appartient à la diagonale AC, il faut nécessairement que cette section conique se réduise à un point unique. Donc enfin :

Si un quadrilatère simple quelconque est en même temps inscrit à une section conique et circonscrit à une autre, tous les quadrilatères semblables auront même point de croisement des diagonales, et ce point sera (532) *un des points de concours des sécantes conjuguées communes aux deux courbes.*

569. Des considérations particulières, et d'un autre genre que celles qui précèdent, nous ont déjà conduits à ce théorème (487). En le démontrant, nous avons aussi remarqué que le point d'intersection unique des diagonales, qui est en même temps (186) le point de croisement des cordes de contact appartenant aux côtés respectivement opposés du quadrilatère, a même polaire par rapport aux deux courbes; en sorte que c'est un (363) des points de concours des trois systèmes de sécantes conjuguées communes qui leur

(*) C'est ce dont on s'assurera aisément à l'aide des considérations employées art. 185.

correspondent, tandis que cette polaire elle-même est précisément la droite qui renferme les deux autres de ces points.

Ainsi, quand deux sections coniques, tracées sur un même plan, seront telles, qu'un quadrilatère soit à la fois inscriptible à l'une et circonscriptible à l'autre, on pourra, par des constructions purement linéaires, obtenir directement l'un des points de concours de leurs sécantes conjuguées communes, et, par suite, ces sécantes elles-mêmes quand elles existeront (373 et 379). C'est une nouvelle circonstance à ajouter à toutes celles qui ont déjà été signalées, soit dans la précédente Section, soit dans le Ier Chapitre de celle qui nous occupe, pour lesquelles les sécantes et tangentes communes au système de deux sections coniques, données sur un plan, peuvent s'obtenir directement par des constructions du second degré, et qui n'exigent que l'emploi de la règle et du compas.

570. Soit maintenant ABCDEF (*fig.* 104) un hexagone quelconque à la fois inscrit à une section conique et circonscrit à une autre; supposons que l'on trace les diagonales qui joignent ses sommets respectivement opposés; d'abord elles se croiseront toutes, comme l'on sait (208), en un seul et même point K : or le raisonnement général de l'article 568 peut, de nouveau, servir à prouver que la courbe unique qu'enveloppent ces diagonales, dans le mouvement possible (566) du polygone autour des deux courbes, doit nécessairement être infiniment petite ou se réduire à un point, qui est évidemment encore ici le point de croisement K de ces diagonales.

D'ailleurs, la portion de quadrilatère ABCD, par exemple, composée de trois côtés consécutifs quelconques de l'hexagone proposé, s'appliquant successivement, dans les diverses positions du système, sur les cinq portions semblables déterminées par les autres diagonales de cet hexagone, on voit, *à priori*, que la section conique unique (534), enveloppée par la diagonale AD ou le côté libre du quadrilatère, devra toucher à la fois et doublement cette diagonale et chacune des deux autres; ce qui ne peut être évidemment, à moins que cette section conique ne soit infiniment petite et ne se confonde avec le point K.

La même démonstration s'appliquant, mot à mot, à un polygone quelconque, d'un nombre pair de sommets, qui serait à la fois inscrit à une section conique et circonscrit à une autre, on peut conclure le théorème général qui suit :

Un polygone quelconque, d'un nombre pair de sommets, étant inscrit à la fois à une section conique et circonscrit à une autre, 1° *toutes les diagonales*

qui joignent les sommets respectivement opposés de ce polygone se croiseront en un seul et même point ; 2° ce point demeurera invariable de position, quand on viendra à faire mouvoir le polygone entre les deux courbes, d'après les conditions primitives (566) ; 3° *ce point sera* (532) *l'un des points de concours des sécantes conjuguées communes à ces courbes.*

571. Supposons, en outre, qu'on forme le nouveau polygone A′B′C′D′E′F′, dont les sommets sont précisément les points de contact des côtés du premier ABCDEF; il résultera de la théorie des polaires réciproques (230) qu'il sera en même temps circonscriptible à une troisième section conique, et que par conséquent il se trouvera absolument dans la même situation que l'autre à l'égard des courbes respectives auxquelles il appartient. Donc les diagonales qui joignent ses sommets opposés, et qui sont en même temps les cordes de contact des côtés opposés du premier, se croiseront également en un même point. Or je dis que ce point se confondra précisément avec le point K où se croisent déjà toutes les diagonales des sommets opposés du polygone ABCDEF.

Pour le prouver, considérons deux côtés contigus quelconques, AB et BC, de ce dernier polygone, ainsi que les côtés DE et EF qui leur sont respectivement opposés, et supposons qu'on prolonge jusqu'à leurs intersections en H et G ceux qui ne sont pas opposés; on formera le quadrilatère BGEH, circonscrit à l'une des sections coniques proposées, dans lequel (186) les diagonales BE, GH et les cordes de contact B′E′, A′D′, qui appartiennent aux côtés respectivement opposés, devront se croiser en un même point. Ainsi chaque diagonale BE, joignant deux sommets opposés du polygone ABCDEF, passe par le point d'intersection des cordes de contact A′D′, B′E′ relatives aux côtés, adjacents à ces sommets, qui sont opposés; c'est-à-dire que chaque diagonale BE passe par le point commun à toutes les cordes de contact des côtés opposés du polygone dont il s'agit; donc enfin ce point est aussi celui où concourent toutes les diagonales de ce polygone, comme il s'agissait de le démontrer.

Concluons encore, d'après la théorie des pôles et polaires (186 et 194), que les points de concours des côtés opposés du polygone ABCDEF, ainsi que ceux du polygone polaire A′B′C′D′E′F′, sont tous rangés sur une même droite, ayant le point K pour pôle, tant dans les sections coniques proposées que dans celle qui est inscrite au dernier de ces polygones.

572. Maintenant, soit formé le nouveau polygone polaire A″B″C″D″E″F″ qui a pour côtés les tangentes aux sommets du premier ABCDEF; il sera

évidemment (230), à son tour, inscriptible à une quatrième section conique; donc il devra encore jouir de toutes les propriétés qui précèdent, à l'égard de cette nouvelle section conique et de celle des proposées à laquelle il est circonscrit. On voit qu'en continuant de traiter ainsi, soit le dernier polygone extérieur A″B″C″D″E″F″, soit le dernier polygone intérieur A′B′C′D′E′F′, il en résultera une suite de sections coniques et de polygones jouissant, à l'égard de ceux qui les précèdent et les suivent immédiatement, de propriétés analogues à celles qui viennent de nous occuper. On voit, de plus, que le point K, commun à tous les polygones, aura même polaire dans toutes les courbes.

Enfin le point K dont il s'agit est évidemment (363 et 532), pour toutes les sections coniques à la fois, un point de concours de sécantes conjuguées communes. Or on peut observer que, quand ces courbes ont même centre, ce centre se confond nécessairement avec le point dont il s'agit, puisque les deux autres points de concours de sécantes conjuguées communes sont à l'infini. De là résulteraient donc beaucoup de conséquences relatives aux polygones inscrits et circonscrits à la fois au système de deux sections coniques concentriques; mais, sans nous arrêter sur ces conséquences, nous allons terminer par quelques réflexions générales qui ne seront pas dénuées de tout intérêt.

Réflexions générales sur ce qui précède.

573. D'après ce qui précède et d'après tout ce qui a déjà été dit au Chapitre II de la IIIe Section, on a dû voir que les points de concours des sécantes conjuguées communes aux sections coniques jouissent de propriétés non moins singulières que les points de concours des tangentes communes ou centres d'homologie qui leur appartiennent, et l'on aura même pu remarquer que ces propriétés ont entre elles une sorte d'analogie. Et en effet, relativement aux arcs opposés de chacune des deux courbes, ce point est un centre d'homologie (248 et 296) dont la polaire, commune à ces courbes, est l'axe d'homologie ou l'axe de concours unique des droites homologues. Seulement, de l'une à l'autre courbe, les points homologues ne sont plus nécessairement rangés sur les mêmes rayons.

Quant à ce qui concerne proprement les figures à la fois inscrites et circonscrites aux deux courbes, on voit que leurs propriétés doivent venir se fondre, pour ainsi dire, dans celles des figures pareilles relatives aux cercles concentriques, puisque le centre commun de ceux-ci est nécessairement à la fois un point de concours de tangentes et de sécantes conjuguées communes.

D'ailleurs, si l'on suppose que les sections coniques proposées aient un double contact, soit réel, soit idéal, le point que l'on considère devient en même temps un centre d'homologie, et il jouit alors (138) de toutes les propriétés projectives qui appartiennent au centre commun de deux cercles concentriques.

Ainsi toutes les propriétés de cette espèce, relatives aux polygones réguliers à la fois inscrits et circonscrits à un système de cercles pareils, subsistent également pour les polygones, d'un nombre de sommets d'ailleurs quelconque et non plus simplement pair, qui seraient en même temps inscrits et circonscrits à deux sections coniques ayant un double contact. La seule différence consiste en ce que, dans le premier cas, la sécante de contact ou polaire du point que l'on considère est à l'infini, et qu'ici, au contraire, cette même droite est à distance donnée, ce qui fait que les côtés opposés des polygones convergent réellement sur elle au lieu d'être simplement parallèles, et que les rapports d'égalité et de proportionnalité sont remplacés par les rapports beaucoup plus généraux qui nous ont occupés dans les Chapitres I et II de la IIe Section; de telle sorte, par exemple, que la division en parties égales se trouve remplacée par la division harmonique, etc.

Cette différence disparait entièrement quand la polaire dont il s'agit passe à l'infini, et que les sections coniques sont par conséquent (92) concentriques, semblables et semblablement placées; alors les polygones inscrits et circonscrits à la fois aux deux courbes deviennent des espèces de polygones parallélogrammiques, dont les côtés opposés sont égaux et parallèles, et sont divisés également au point de contact qui leur appartient respectivement. Dans la même hypothèse, les angles opposés sont évidemment aussi égaux, mais c'est la seule relation de cette nature qui leur soit commune avec les polygones réguliers, susceptibles, de leur nature, d'être inscrits et circonscrits en même temps à deux cercles concentriques.

Les relations d'angles appartiennent essentiellement, comme nous l'avons vu (IIe Chapitre de cette Section), aux polygones à la fois inscrits et circonscrits à deux sections coniques qui ont un foyer commun, foyer qui est aussi pour elles un centre d'homologie, ou point de concours de tangentes communes; et si, de plus, il arrive que les deux courbes aient en même temps un double contact, c'est-à-dire (456) même polaire focale, ces polygones, sans avoir leurs côtés opposés parallèles comme dans le cas où ils sont concentriques, offriront dans leurs propriétés la plus grande analogie possible avec les polygones réguliers inscrits et circonscrits en même temps à deux cercles, soit sous le rapport des relations d'angles, soit sous celui de la simple

direction des lignes; cette analogie serait pour ainsi dire parfaite, si les sections coniques pouvaient devenir en même temps concentriques sans se confondre, ou si seulement elles étaient à la fois des paraboles.

574. Mais nous ne pousserons pas plus loin ce rapprochement, ni l'examen des différentes propriétés qui peuvent appartenir aux polygones à la fois inscrits à une section conique et circonscrits à une autre. Quelque attrait que puissent présenter de telles propriétés pour ceux qui aiment les spéculations géométriques, on nous reprochera peut-être d'avoir déjà trop insisté, dans ce qui précède, sur ces propriétés, eu égard au degré de mérite ou d'utilité qui peut leur être propre. Celles surtout que nous avons présentées, au commencement de ce Chapitre, sur les polygones variables dont les sommets parcourent des directrices courbes quelconques, pourront paraitre, jusqu'à un certain point, oiseuses aux personnes qui aiment, avant tout, les résultats susceptibles d'une application immédiate et journalière. Mais nous ferons observer que, si de pareilles recherches ne semblent pas, à cause de leur généralité, inspirer autant d'intérêt que celles qui ne concernent que les lignes droites et les sections coniques, lesquelles, à raison de l'élégante simplicité de leur forme et de la facilité de leur description, sont presque les seules employées dans les arts qui se fondent sur le dessin linéaire, elles ont au moins l'avantage d'exercer heureusement l'imagination, d'agrandir le champ de la Géométrie, et de montrer la hauteur à laquelle elle est parvenue de nos jours.

Il serait même à désirer qu'à l'exemple de nos voisins on ne laissât pas autant dans l'oubli certains résultats des travaux géométriques des siècles passés, et qu'on revînt un peu sur les principes, presque toujours faciles et souvent ingénieux, à l'aide desquels les grands hommes de ce temps-là y étaient parvenus; car ce ne sont pas tant les vérités particulières que les méthodes qu'il ne faut pas laisser périr : peut-être aussi que ceux qui cultivent l'Analyse algébrique, pour ainsi dire exclusivement, acquerraient, par là, cette habitude de pressentir à l'avance les résultats du calcul, que possèdent encore si bien nos grands géomètres modernes; car on ne peut se le dissimuler, et Newton lui-même l'a dit, « la méthode de découvrir est presque tout entière dans la Géométrie. »

FIN DE LA IVe ET DERNIÈRE SECTION.

SUPPLÉMENT

SUR LES

PROPRIÉTÉS PROJECTIVES DES FIGURES

DANS L'ESPACE.

575. Nous n'avions d'abord eu l'intention que de parler d'une manière subsidiaire des propriétés projectives de l'espace, en indiquant, chemin faisant et à l'aide de quelques mots, l'extension dont pouvaient être susceptibles les divers théorèmes relatifs aux figures planes qui nous ont occupés jusqu'à cette heure; mais, ayant réfléchi que cette partie de notre travail pourrait être celle qui offrirait le plus d'intérêt aux yeux de ceux qui cultivent la Géométrie descriptive, nous avons cru devoir rejeter dans un article à part tout ce qui concerne les figures dans l'espace, en nous bornant toutefois aux considérations les plus générales et les plus dignes d'être remarquées. En entrant dans de plus grands développements, nous aurions fait de cette partie de nos recherches un véritable Traité, qui nous eût fait excéder de beaucoup les bornes dans lesquelles nous avons voulu nous renfermer.

Des figures homologiques dans l'espace, ou de la perspective relief; application au tracé des bas-reliefs,

576. La première question qui se présente, c'est de voir comment on pourra étendre aux figures situées en général dans l'espace les considérations offertes, art. 297 et suivants, sur les figures homologiques considérées dans un même plan, ou, tout au plus, dans deux plans différents. Pour y parvenir, rappelons-nous d'abord le cas particulier où les figures sont s. et s. p.; car puisque, d'après la définition que nous avons donnée, aux endroits cités, de l'homologie des figures situées dans un plan, cette homologie n'est qu'une sorte de similitude, dans laquelle les lignes homologues, au

lieu d'être parallèles, concourent à des distances données et finies, il nous sera très-aisé de passer d'une manière analogue, des propriétés déjà établies (241) pour les figures s. et s. p. dans l'espace, aux propriétés qui doivent être relatives aux figures homologiques en général.

Si l'on admet, pour définition des polygones s. et s. p. dans l'espace, que ces polygones soient tels, que les droites qui joignent les points homologues concourent en un même point, et que les droites homologues soient parallèles, conditions évidemment nécessaires et suffisantes pour remplir cet objet, et pour déterminer d'espèce l'un des polygones au moyen de l'autre, il faudra aussi admettre en premier lieu, pour le cas de l'espace comme pour celui du plan, que, dans les figures homologiques, les points homologues doivent être rangés sur des droites concourant en un même point, centre d'homologie des deux polygones, c'est-à-dire que les figures homologiques doivent être projections *relief* (13) les unes des autres.

Reste à voir quelle condition particulière on doit adopter pour fixer le lieu des points de concours des droites joignant des points homologues, afin que les figures qui en résultent aient la plus grande conformité de nature possible avec les figures semblables de grandeur et de position; en un mot, il s'agit d'examiner quelle espèce de condition doit remplacer celle du parallélisme de ces dernières figures. Or, l'une des conditions essentielles à remplir, c'est que tout ce qui est plan dans l'une des figures reste plan dans l'autre; c'est-à-dire que, si l'on conçoit un plan quelconque pour l'un de nos polygones, toute figure tracée dans ce plan devra être représentée, pour l'autre polygone, par une figure plane homologique ou perspective ordinaire de la première par rapport au centre de projection : de là, en effet, dérive immédiatement la condition demandée, comme on va le voir.

Il en résulte d'abord que tous les points de concours des lignes homologues, qui appartiennent à ces plans respectifs, sont sur une même droite ou axe d'homologie, intersection commune de ces plans; la surface unique lieu des points de concours, si elle existe, doit donc être telle, que tout plan, mené arbitrairement dans l'espace, aille la rencontrer suivant une droite; premier caractère qui n'appartient qu'aux surfaces planes. Reste donc à prouver que cette surface existe réellement, ou, ce qui revient au même, il reste à prouver que les différents axes de concours ou d'homologie des plans homologues de nos deux polygones se coupent deux à deux en un point. Or c'est ce qui est évident *à priori*, d'après ce qui se passe pour les plans homologues respectifs auxquels appartiennent les paires d'axes dont il s'agit. Concevons, en effet, deux plans quelconques pour l'un de nos polygones, et

les deux plans qui leur sont homologues pour l'autre; d'après ce qui précède, les différents points de la droite d'intersection des deux premiers auront pour homologues ceux de la droite, intersection des deux autres; ces droites appartiennent donc au même plan projetant, donc elles se coupent en un point; donc il en est de même des deux paires de plans homologues que l'on considère et des deux axes de concours ou d'homologie qui leur appartiennent. Mais un point de concours quelconque de deux droites homologues peut toujours être censé appartenir à la droite de concours de deux plans homologues appartenant respectivement à ces deux droites; donc enfin tous les points de concours possibles des droites homologues de l'une et de l'autre figure déterminées par nos deux polygones doivent appartenir à un seul et même plan, qu'on peut appeler le plan *d'homologie* ou *de concours* de ces figures.

577. Réciproquement, si l'on admet, pour condition de l'homologie de deux figures rectilignes ou polyédrales situées dans l'espace, que les points homologues sont rangés sur des droites dirigées vers un même centre, et que les droites homologues concourent, deux à deux, sur un plan unique: si l'on observe, en outre, que toutes les propriétés de situation des figures s. et s. p. dans l'espace dérivent uniquement de la définition admise ci-dessus jointe à la propriété (168) des triangles situés dans l'espace ou sur un plan, propriété qui est la même, soit que la droite de concours se trouve ou non à l'infini, on en conclura aisément que les propriétés purement descriptives des figures homologiques sont exactement conformes à celles qui ont lieu pour les figures s. et s. p., si ce n'est toutefois que les lignes homologues, au lieu d'être parallèles, sont concourantes, comme il résulte de la définition même admise pour ces sortes de figures.

Des figures rectilignes et polyédrales, on passe d'ailleurs immédiatement aux lignes et aux surfaces courbes quelconques; en sorte que les conséquences qui précèdent sont générales et s'appliquent à toutes les figures possibles décrites ou données à volonté dans l'espace. Ainsi les figures homologiques, telles que nous venons de les définir en dernier lieu, et quelle que soit la manière dont elles se composent, ont entre elles des relations absolument analogues à celles des figures homologiques décrites sur un plan; c'est-à-dire qu'elles sont encore des espèces de perspectives ou de projections les unes des autres, pour lesquelles la droite de concours ou l'axe d'homologie des deux figures est remplacé par un plan, sur lequel viennent s'entrecouper également toutes les lignes et toutes les surfaces ho-

mologues de l'une et de l'autre figure, et qui est ainsi le lieu des points de l'espace qui sont leurs propres homologues par rapport à ces figures.

578. Pour établir ces diverses conséquences, il n'est pas plus nécessaire, dans le cas de l'espace que dans celui du plan (300), de recourir aux propriétés déjà établies pour les figures s. et s. p.; car ce qui précède montre assez (*) comment on peut y arriver directement, sans s'appuyer sur autre chose quo sur la propriété évidente des triangles homologiques, et sur la définition que nous venons de donner des figures homologiques en général. Bien plus, si l'on suppose que le plan d'homologie s'écarte à l'infini dans l'espace, on retombera, comme on voit et ainsi que nous l'avons déjà fait remarquer (301) pour le cas des figures planes homologiques, sur toutes les propriétés des figures s. et s. p., qui ne concernent que la direction indéfinie des lignes et non leur mesure, lesquelles peuvent ainsi être établies indépendamment de toute relation métrique, ou sans recourir au principe de la proportionnalité des lignes homologues.

Il serait d'ailleurs inutile d'insister sur ce rapprochement entre les figures homologiques et les figures s. et s. p. dans l'espace, soit qu'on compare entre elles leurs propriétés métriques ou leurs propriétés descriptives, puisque nous ne pourrions que répéter ici, en des termes un peu plus généraux, ce qui a déjà été dit à l'occasion des figures tracées dans un plan; nous nous bornerons en conséquence à énoncer simplement quelques-unes des propositions qui résultent immédiatement de celles établies (241) relativement aux figures s. et s. p. dans l'espace, lesquelles s'appliquent, comme nous venons de le faire observer, d'une manière analogue aux figures homologiques en général.

579. Considérons, par exemple, deux surfaces quelconques ayant un centre et un plan d'homologie; il est clair, d'après tout ce qui précède, que :

« 1° Ces surfaces, nécessairement du même ordre, auront une section plane commune, réelle ou imaginaire, suivant le plan d'homologie, qui ainsi est un plan de section, réelle ou idéale, des deux surfaces. »

« 2° Ces surfaces seront susceptibles d'être enveloppées par un même cône, réel ou imaginaire, qui aura pour sommet le centre d'homologie. »

« 3° Le plan tangent à l'une des surfaces aura, pour homologue, le plan tangent à la seconde, au point homologue à celui de contact du premier, et ces deux plans se couperont sur le plan d'homologie. »

(*) Nous reviendrons sur ce sujet un peu plus loin (583), à l'occasion du tracé de la figure homologique d'une figure donnée dans l'espace.

« 4° Toute section plane de l'une des surfaces aura pour homologue une section plane de l'autre, du même ordre, et qui appartiendra au même cône de projection ou d'homologie; de plus, les plans de ces deux sections iront s'entrecouper, sur le plan d'homologie, suivant une droite qui sera une sécante, réelle ou idéale, commune aux deux courbes correspondantes. »

« 5° Si l'on circonscrit un cône à l'une des surfaces, son homologue sera aussi un cône, du même ordre, circonscrit à l'autre, et ayant, avec le premier, le plan d'homologie pour section plane commune, réelle ou idéale. »

« 6° Etc. »

580. Toutes ces propriétés étant, en quelque sorte, évidentes d'après le rapprochement que nous venons d'établir entre les figures homologiques en général et les figures s. et s. p., il sera très-facile de les multiplier indéfiniment. Il résulte d'ailleurs, de ce rapprochement, cette notion nouvelle et paradoxale, quoique fort exacte :

Tous les points à l'infini de l'espace peuvent être censés appartenir à un seul et même plan, nécessairement indéterminé de situation.

Ce principe n'est qu'une extension de celui de l'article 96, et peut s'en déduire directement, au moyen du principe de continuité. En effet, une surface plane a pour caractère principal d'être toujours coupée, par une autre surface pareille, suivant une ligne droite unique, située à distance donnée ou infinie; or c'est là ce qui a lieu précisément à l'égard de celle qu'on peut concevoir renfermer tous les points à l'infini de l'espace; puisque déjà, en vertu du principe cité, tous les points à l'infini d'un plan doivent être regardés comme distribués sur une seule et même ligne droite.

D'ailleurs, deux droites quelconques, situées à l'infini, pouvant être censées les concours respectifs de deux paires de plans parallèles, et ces quatre plans s'entrecoupant en outre suivant quatre droites qui sont parallèles ou concourent en un même point, à l'infini, appartenant aux deux droites en question, on voit que toutes les droites à l'infini peuvent être censées s'entrecouper deux à deux; donc enfin toutes ces droites, et par conséquent tous les points à l'infini de l'espace, peuvent être considérés comme appartenant à un même plan. De plus, comme un plan quelconque peut se transporter, d'une infinité de manières différentes, à l'infini, et qu'alors il peut être censé renfermer tous les points de concours des droites parallèles, on voit que la direction du premier est nécessairement arbitraire ou plutôt indéterminée.

581. Ce qui précède peut servir à justifier *à posteriori*, et d'une manière pour ainsi dire entièrement rigoureuse, l'exactitude de cette notion générale, et il est fort inutile, pour notre objet actuel, d'en apporter des exemples particuliers, dont le nombre, au surplus, n'est pas moins considérable que pour le cas où les points à l'infini que l'on considère sont tous situés dans un plan donné, et qui, pour la plupart, présentent des circonstances entièrement analogues. Nous nous bornerons seulement à remarquer que, de la même manière que deux systèmes différents de parallèles, tracés sur un plan, déterminent complétement (198) la droite à l'infini de ce plan, pareillement trois systèmes de parallèles quelconques de l'espace doivent déterminer entièrement le plan à l'infini qui leur correspond. Ainsi l'on doit pouvoir résoudre le problème suivant, sans employer autre chose que le plan et la ligne droite :

Par un point, donné à volonté dans l'espace, mener une droite parallèle à une droite donnée, ayant d'ailleurs à sa disposition trois systèmes quelconques de parallèles situées dans des plans différents et non parallèles?

Quand on ne se donne qu'un seul système de parallèles, il ne détermine qu'un seul point à l'infini, et l'on ne peut mener que des droites qui aillent concourir en ce point ou qui soient parallèles aux premières; mais la solution se réduit alors à quelque chose d'extrêmement simple pour le cas de l'espace : en effet, si, par ce point et par chacune des parallèles données, on mène deux plans, leur intersection commune sera la droite demandée. On observera d'ailleurs que, pour que la construction s'exécute, dans ces divers cas, avec la règle seulement, il est nécessaire qu'on prenne, pour y rapporter les objets de la figure, deux plans et deux centres de projection quelconques (*); mais quelque intérêt que présentent ces dernières considérations, nous ne devons pas oublier que notre objet véritable est l'homologie des figures dans l'espace.

582. D'après les diverses remarques qui précèdent, il est évident que tout ce que nous avons dit (Sect. III, Chap. I) sur la manière de décrire, dans le cas du plan, l'une des figures homologiques au moyen de l'autre et de certaines données, comme aussi de trouver directement, et par des procédés

(*) Dans la Géométrie descriptive, on prend d'ordinaire deux plans de projection rectangulaires entre eux, et l'on y rapporte tous les points de l'espace par des perpendiculaires abaissées de ces points sur chaque plan; c'est-à-dire que l'on prend un centre de projection particulier pour chaque plan, et que ce centre est situé à l'infini dans une direction qui lui est perpendiculaire. On voit, d'après cela, quelle sorte d'opérations on aurait à exécuter pour le cas général dont il s'agit.

purement graphiques, tout ce qui lui appartient, s'applique, d'une manière analogue, au cas où les figures sont situées dans l'espace, pourvu toutefois qu'on remplace l'axe d'homologie par un plan, et que le nombre des données soit suffisant pour faire trouver, avec le centre et l'axe d'homologie, au moins un point de la figure non décrite et l'homologue de ce point.

Ainsi, par exemple, trois paires de points homologues quelconques et le centre d'homologie ne suffiraient plus pour déterminer entièrement l'une des figures au moyen de l'autre, il en faudrait nécessairement quatre. Or on peut remarquer qu'en joignant deux à deux, par des droites, les quatre points de chaque figure, on obtiendra six lignes droites, de part et d'autre, qui formeront deux tétraèdres et iront se couper en six points appartenant au plan d'homologie; de plus, ces six points seront, trois par trois, sur quatre droites intersections des faces homologues des tétraèdres. Les mêmes choses ayant lieu nécessairement pour deux tétraèdres quelconques dont les sommets seraient, deux à deux, sur six droites convergeant en un même point de l'espace, il en résulte, comme on voit, un théorème fort beau, sur ces figures, et entièrement analogue à celui (167) qui est relatif aux simples triangles homologiques, c'est-à-dire que :

Deux tétraèdres quelconques qui ont un centre d'homologie ou de projection ont aussi un plan d'homologie ou de concours, et vice versâ.

583. Je reviens à la théorie générale des figures homologiques, et, pour confirmer ce qui n'a été simplement qu'avancé au commencement de l'article 578, j'observe qu'en partant de la construction qui sert à décrire l'une des figures au moyen de l'autre, quand on en a un point avec son homologue, et qu'on connait en outre le centre et le plan d'homologie, il serait très-aisé d'établir, *à priori*, toutes les propriétés de ces sortes de figures.

En effet, il résulte de cette construction que, si l'on imagine dans l'espace une suite de triangles dont les côtés respectifs ou leurs prolongements pivotent constamment sur le point donné, sur l'homologue à ce point et sur le centre d'homologie, tandis que deux des sommets de ces triangles s'appuient sans cesse, l'un sur le plan d'homologie, l'autre sur la figure donnée, le troisième sommet parcourra lui-même successivement tous les points de la figure homologique.

Or il est évident *à priori*, et d'après les notions les plus simples du plan et de la ligne droite, que, si le sommet qui appartient à la figure directrice demeure sur une droite, l'autre demeurera pareillement sur une droite; que s'il demeure sur un plan, l'autre demeurera également sur un plan, et tra-

cera la perspective ou projection centrale ordinaire des points contenus dans le premier; qu'enfin, si ce point est assujetti à demeurer sur une ligne ou surface courbe d'un certain ordre, l'autre décrira pareillement une ligne ou surface courbe de cet ordre, comprise dans le même cône enveloppe ou projetant, et ayant la même section suivant le plan d'homologie, etc. En général, on voit qu'il existera, entre la figure primitive et sa dérivée, une corrélation de propriétés et de construction entièrement analogue à celle qui a lieu pour le cas de la projection ou perspective ordinaire sur un plan, c'est-à-dire que les deux figures jouiront exactement des mêmes relations projectives dans le sens indiqué au commencement de cet ouvrage.

Il est sans doute inutile de dire que les mêmes choses auront lieu également pour les relations projectives qui sont purement métriques (13).

584. Quand il s'agit de représenter une scène quelconque de la nature au moyen d'un relief, le parti le plus convenable et qui est le plus susceptible de remplir complétement l'effet désiré est, sans contredit, de représenter les objets dans leur grandeur et leur disposition naturelles, ou tout au moins de les exécuter en petit exactement comme ils se trouvent en grand; c'est-à-dire qu'alors tous les objets du relief doivent être s. et s. p. relativement à ceux qu'ils représentent dans la nature. Mais, quand on est contraint, par quelques raisons particulières, de restreindre la profondeur du tableau, et qu'on veut cependant conserver aux figures une certaine dimension en hauteur et en largeur, on a recours alors à ce qu'on nomme des *bas-reliefs*, lesquels ne sont, à proprement parler, que des reliefs très-aplatis et fixés d'ordinaire contre une surface plane, sur laquelle ils saillent d'une certaine quantité : telles sont, par exemple, les figures qui se trouvent sur les médailles, et celles qu'on aperçoit sur les murs de certains édifices publics, etc. Il est évident que, dans ce cas, l'artiste n'a plus qu'un seul parti à prendre, c'est celui de construire le relief de façon que les apparences des formes géométriques, sinon celles dues aux effets de lumière, soient rigoureusement observées, dans le tableau, pour une position particulière donnée de l'œil de l'observateur; car on sent assez qu'il en doit être ici comme de la perspective linéaire sur une surface plane ou courbe, qui ne peut produire un effet entièrement satisfaisant que pour un point de vue unique.

Le bas-relief devra donc être construit de telle sorte que, du point de vue donné, les points, les lignes, les figures rectilignes ou polyèdrales, etc., aient entre elles, par rapport à l'œil du spectateur, la même disposition que les objets de la nature qu'on suppose placés en arrière, c'est-à-dire qu'ils de-

vront appartenir aux mêmes rayons, aux mêmes plans, aux mêmes cônes visuels. Il faudra, en outre, si le fond du bas-relief est une surface plane, il faudra, dis-je, pour éviter autant que possible les effets désagréables de lumière, que les droites demeurent des droites, que les figures contenues dans un plan, comme la façade d'une maison, la section ou le contour apparent d'une certaine surface, etc., conservent cette propriété sur le tableau comme dans la nature ; en un mot, il faudra que chaque partie plane dont il se compose puisse être considérée comme une perspective ordinaire de celle qu'elle représente, et qu'elle ait avec elle la plus grande analogie de forme possible. Or il est évident que toutes ces conditions ne peuvent être remplies qu'autant que l'on considère le bas-relief et la scène comme deux figures homologiques, dans le sens que nous venons d'envisager précédemment.

585. La scène et le plan par lequel on la suppose limitée étant donnés, aussi bien que l'œil et le fond du tableau, qui peut être censé représenter ce plan limite, et qui est par conséquent le plan homologue du premier (*), on aura déjà une droite, intersection de ces deux plans, située tout entière dans le plan d'homologie ou de concours des lignes homologues ; de sorte qu'il suffira de rechercher un autre point quelconque de ce plan pour qu'il soit entièrement déterminé de position par rapport aux deux figures. Or il reste encore une condition essentielle à remplir relativement au bas-relief, c'est celle de sa plus grande saillie sur le plan du fond, laquelle est toujours fixée par quelque raison particulière de convenance ou de localité.

Supposons donc qu'on se donne le point le plus saillant du bas-relief, représentant le point le plus avancé de la scène, vers l'œil du spectateur, on aura tout ce qu'il faut pour fixer la position des diverses parties du tableau ou du bas-relief.

En effet, ayant déjà deux plans homologues déterminés selon ce qui précède, on aura, par là même, une infinité de paires de points homologues appartenant à ces plans; joignant donc, par une droite, le point le plus avancé de la scène avec l'un quelconque des points du plan limite qui lui correspond, et construisant de même, pour le bas-relief, la droite qui joint les points homologues aux premiers, ces deux droites iront se rencontrer en un point appartenant (577) au plan d'homologie, dont on connaîtra ainsi la position absolue dans l'espace, et qui servira à construire, au moyen du

(*) Il convient sans doute, dans la pratique, de supposer ces deux plans parallèles, et alors le plan d'homologie leur est nécessairement aussi parallèle, de même que tous les systèmes de deux plans homologues dont l'un quelconque jouirait de cette propriété.

point de vue et du point donné sur le bas-relief, toutes les parties dont celui-ci se compose.

Il est évident que c'est d'après des principes analogues que l'on doit disposer les décors de théâtre, la scène elle-même et la salle tout entière, afin de rendre l'illusion la plus complète possible pour les spectateurs.

586. Au reste, mon objet n'est pas d'écrire un traité suivi sur cette matière; je me contenterai d'avoir posé les principes, qui ne me paraissaient établis nulle part, et qui sans doute n'étaient suppléés, dans les divers cas, que par des méthodes particulières basées sur des règles de convenance et de goût, connues seulement du petit nombre des vrais artistes (*). On sentira facilement que les constructions générales qui précèdent peuvent être remplacées, dans certaines circonstances, par d'autres beaucoup plus courtes et plus faciles pour la pratique; de la même manière que, dans la perspective ordinaire, il existe des méthodes particulières beaucoup plus expéditives que la méthode générale indiquée par la Géométrie descriptive.

Ainsi, par exemple, on pourra considérer la scène comme coupée par une suite de plans équidistants, parallèles au plan du fond du tableau, et construire leurs perspectives, également parallèles à ce fond (art. 584, note), au moyen de l'*échelle fuyante* ou *harmonique* (27). Construisant ensuite, sur ces derniers, la perspective linéaire des intersections qui correspondent aux autres, on aura les intersections relatives au bas-relief ou tableau. On voit, d'après cela, ce qu'il y aurait à faire si le fond du tableau ou le plan contre lequel il s'appuie était une surface courbe donnée. Mais nous laisserons aux artistes instruits le soin de développer ces idées de la manière convenable, pour les mettre à la portée du grand nombre de ceux qui exécutent.

Des centres et plans d'homologie, des points, lignes et surfaces polaires des surfaces du second ordre. — Contacts et osculations de ces surfaces.

587. D'après les principes exposés aux articles 578 et 583, la surface homologique d'une surface donnée du second ordre est une autre surface du second ordre ayant nécessairement une section plane commune avec la pre-

(*) Je ne connais aucun Traité de perspective où l'on ait posé des règles fixes pour la construction des bas-reliefs; l'Encyclopédie elle-même, qui traite de tout, ne parle que d'une manière vague, d'harmonie, de dégradation des objets, d'effets de lumière, etc., en se contentant, pour le reste, de renvoyer aux règles de perspective ordinaire.

mière suivant le plan d'homologie, et qui est enveloppée par un même cône ayant son sommet au centre d'homologie; or je dis que, si seulement deux surfaces du second ordre (C), (C') sont enveloppées par un même cône, ces surfaces seront nécessairement homologiques, et cela de deux manières différentes, par rapport au sommet du cône dont il s'agit; de telle sorte que les plans d'homologie correspondants se confondront, pour la direction, avec l'une ou l'autre des branches de pénétration des deux surfaces (C) et (C'), branches qui sont ainsi nécessairement planes dans le cas qui nous occupe.

On pourrait aisément démontrer ce théorème en partant des propriétés relatives au cas particulier de deux sections coniques tracées sur un même plan; mais on peut aussi y arriver d'une manière entièrement directe, ainsi qu'il suit.

En effet, le cône circonscrit à la fois aux deux surfaces (C) et (C') détermine sur elles deux courbes de contact, dont l'une est nécessairement l'homologique de l'autre par rapport au sommet de ce cône; et, si l'on prend à volonté, sur la surface (C), un point quelconque a, et qu'on mène, par ce point et par le sommet du cône, une droite, elle ira déterminer, sur la surface (C'), deux nouveaux points a', a'', dont l'un quelconque pourra être censé l'homologue du premier. Or les deux courbes de contact, qui sont planes, et les deux points homologues a et a', ainsi choisis, déterminent un plan d'homologie (585), au moyen duquel et des points a et a' on pourra construire (582) la surface du second ordre réellement homologique de (C'), laquelle passera évidemment par le point a et touchera le cône enveloppe suivant la même courbe que (C).

D'ailleurs deux surfaces du second ordre, qui ont une section plane de contact commune et passent, de plus, par un même point quelconque, doivent nécessairement se confondre en une seule et même surface, puisqu'il en doit être ainsi (294) de l'infinité de sections planes faites dans ces surfaces par le point commun a; donc la surface du second ordre (C) est réellement l'homologique de celle (C'), ainsi qu'il s'agissait de le démontrer. D'après la loi de continuité, cette conséquence s'étend même au cas où le centre d'homologie cesse d'être un sommet de cône enveloppe réel; et, comme il y a deux points a' et a'' qui correspondent à un même point a de (C), sur (C'), on voit qu'il existe aussi deux plans distincts d'homologie, ou de section commune, qui jouissent de propriétés pareilles à l'égard des deux surfaces proposées et du sommet dont il s'agit. Donc enfin :

Quand deux surfaces du second ordre ont un sommet de cône enveloppe com-

mun, soit réel, soit idéal, elles sont, de deux manières différentes, homologiques ou projections l'une de l'autre par rapport à ce sommet, qui ainsi est un centre d'homologie; de plus, ces surfaces ont alors deux sections planes communes, réelles ou idéales, dont les directions indéfinies se confondent avec celles des plans d'homologie conjugués à la fois (292) *au sommet du cône.*

588. On remarquera, en passant, que, lorsque les deux surfaces proposées sont deux surfaces coniques, le cône enveloppe de ces surfaces dégénère en deux plans tangents à la fois à chacune d'elles, et qu'alors il y a une infinité de centres d'homologie, tous placés sur la droite d'intersection de ces plans, lesquels jouissent individuellement des mêmes propriétés par rapport aux deux surfaces proposées. C'est ce qu'au reste on pourrait conclure immédiatement des propriétés établies, dans le Ier Chapitre de la IIIe Section, pour le système de deux lignes quelconques du second ordre tracées sur un plan commun.

589. Supposons maintenant qu'on applique au cas général qui nous occupe les raisonnements établis, art. 247, pour le centre de similitude de deux circonférences de cercle quelconques tracées sur un plan, il en résultera évidemment le théorème qui suit :

Un point quelconque de l'espace peut être considéré, par rapport à une surface du second ordre quelconque, comme le centre d'homologie ou de projection des deux nappes qui ont leurs courbures dirigées en sens contraire à l'égard de ce point, et le plan d'homologie ou de concours n'est autre chose alors que le plan polaire *ou* de contact *relatif à ce même point, pris pour* pôle *ou pour sommet d'une surface conique enveloppe de la proposée.*

590. Ainsi les propriétés du pôle et du plan polaire des surfaces du second ordre et celles des *droites polaires* qui en dérivent immédiatement, propriétés qui ont été établies par MM. Monge, Livet, Brianchon et Chasles, dans les recueils de l'École Polytechnique (*), ne sont que des cas particuliers des propriétés du centre et du plan d'homologie; et cette conséquence subsiste évidemment, d'une manière analogue, quand on suppose la surface remplacée par le système de deux plans arbitraires, dont l'un quelconque peut d'ailleurs passer tout entier à l'infini, sans que les propriétés cessent d'exister.

L'énoncé qui précède indique même beaucoup plus que ce qu'on a con-

(*) *Géométrie descriptive*, par G. Monge, §§ 38 et suiv.; XIIIe Cahier du *Journal de l'École Polytechnique*, p. 270 et 297; *Correspondance sur la même École*, t. II, p. 322, et t. III, p. 11.

tume de considérer, et l'on doit ajouter, comme chose évidente d'après le principe (155) relatif au quadrilatère plan avec ses trois diagonales, que *toute transversale passant par le pôle (ou centre d'homologie) détermine, sur la surface proposée et sur le plan polaire (ou plan d'homologie), trois points qui, avec le premier, forment un groupe harmonique.*

591. Quand le plan polaire passe à l'infini, l'homologie devient similitude (578) ou, plus exactement encore, symétrie; le pôle se confond donc alors avec ce qu'on nomme le *centre* de figure de la surface, centre qui, comme on voit, est lui-même situé à l'infini toutes les fois que le plan polaire dont il s'agit est tangent à la surface proposée, ou que cette surface est du genre des *paraboloïdes* (132).

De là aussi on déduirait immédiatement toutes les propriétés connues des diamètres, des plans diamétraux, des sections parallèles, etc., des surfaces du second ordre, sur quelques-unes desquelles nous nous proposons de revenir un peu plus loin.

La facilité avec laquelle nous venons de passer des propriétés du pôle à celles du centre, au moyen de la notion établie art. 580, est très-propre d'ailleurs à faire sentir la justesse et l'utilité de cette notion, qui peut même servir, comme on vient de le voir par l'exemple qui précède, à établir le *criterium* de chaque genre particulier des surfaces du second ordre, aussi bien que leurs différents modes de génération au moyen des lignes droites et des sections coniques; mais je n'entrerai pas, pour le moment, dans le détail de cette discussion, qui est facile.

592. Enfin on déduirait encore de ce qui précède toute la théorie des polaires réciproques des surfaces du second degré, que nous n'avons jusqu'ici établie (Section II, Chapitre II) que pour le cas particulier des sections coniques tracées sur un plan, ce qui conduirait à une foule de conséquences, aussi neuves qu'intéressantes, sur les figures situées en général dans l'espace : par exemple, on en déduirait avec facilité la démonstration du beau théorème de M. Brianchon, cité à l'article 231. Mais il serait aussi long que superflu de nous arrêter au développement de ces diverses conséquences, qui ne présenterait qu'une répétition continuelle, ou plutôt qu'une extension facile des principes déjà posés pour le cas particulier des sections coniques; nous ferons seulement remarquer qu'en appliquant la théorie des polaires réciproques, ainsi généralisée, aux considérations qui précèdent (587), on serait conduit immédiatement à la proposition inverse qui suit :

Quand deux surfaces du second ordre ont un plan de section commune,

réelle ou imaginaire, elles ont, par là même, deux centres d'homologie conjugués, sommets des cônes qui enveloppent à la fois ces surfaces, et jouissant à leur égard de toutes les propriétés nombreuses qui appartiennent en général à ces sortes de points; de plus, elles ont une autre section plane commune, réelle ou imaginaire, conjuguée à la première.

593. Pour le cas particulier de deux sphères ou de deux surfaces du second ordre s. et s. p., ce que nous avons nommé (291) l'homologie directe devient similitude, comme pour le cas des sections coniques, et le plan d'homologie correspondant ou de section commune passe tout entier à l'infini. De là résulte donc, pour les sphères et les surfaces du second ordre s. et s. p., les diverses notions et propriétés analogues à celles établies en particulier (Section II, Chapitre III) pour les cercles et les sections coniques également s. et s. p. Ainsi l'on voit que deux telles surfaces ont toujours une section plane commune à l'infini, réelle ou idéale, et qu'elles en ont nécessairement une autre, de cette espèce, située en général à distance donnée et finie, sur le plan de laquelle concourent les droites et plans inversement homologues, etc., etc.

594. Enfin les propriétés générales des surfaces du second ordre, qui ont un centre d'homologie, conduisent encore sans peine, comme conséquence particulière, à la théorie des contacts et des osculations de ces sortes de surfaces; mais il est à remarquer qu'ici il n'en est pas de même que pour le cas de deux sections coniques, qui ne peuvent se toucher en un point sans que ce point soit un centre d'homologie (319); car deux surfaces du second ordre ne sont pas toujours susceptibles d'être enveloppées par un même cône de cet ordre, ou d'avoir un centre d'homologie; il faut nécessairement (587), pour que cela ait lieu, que leurs courbes d'intersection soient planes.

Puisque deux surfaces du second ordre, qui ont un point de contact commun, ne sont pas nécessairement homologiques par rapport à ce point, recherchons quelle espèce de conditions elles doivent remplir pour que cela ait lieu.

Remarquons d'abord que deux surfaces quelconques peuvent être tangentes de deux manières différentes en un point commun. Dans l'une, elles peuvent n'avoir aucun autre point commun aux environs du premier; et alors elles doivent être censées avoir une branche de pénétration infiniment petite confondue avec ce point. Dans l'autre, les deux surfaces peuvent se pénétrer en plusieurs branches de courbes, dont deux au moins passent par

ce point, qui est ainsi multiple; il est, en effet, évident que, dans ces divers cas, les surfaces auront également un élément ou un plan tangent commun au point dont il s'agit.

Cette remarque s'applique même au cas particulier du plan tangent à une surface donnée; et alors, si cette surface est du second degré, le plan tangent déterminera sur elle, dans la première hypothèse, une section plane infiniment petite, dont les sections parallèles seront elliptiques; dans l'autre, les deux branches de pénétration, appartenant au point de contact, devront nécessairement se réduire au système de deux droites passant par ce point et parallèles aux asymptotes des sections hyperboliques de la surface, qui sont elles-mêmes parallèles au plan tangent; car une ligne du second ordre ne peut évidemment avoir deux branches distinctes passant par un point, à moins qu'elle ne se confonde entièrement avec les tangentes en ce point. Les deux droites en question pouvant d'ailleurs être censées imaginaires pour la première hypothèse, il est permis de conclure, en général (111), que par un point quelconque pris sur une surface du second ordre, il passe deux lignes droites, réelles ou imaginaires, situées tout entières dans cette surface, et que par conséquent une telle surface peut, aussi en général, s'engendrer de deux manières différentes, par le mouvement de simples lignes droites.

Pour l'*ellipsoïde*, l'*hyperboloïde à deux nappes* et le *paraboloïde elliptique* qui présentent partout leur convexité au plan tangent, les deux modes de génération sont imaginaires, mais ils sont évidemment réels pour l'*hyperboloïde à une nappe* et pour le *paraboloïde hyperbolique* dont le plan tangent en un point quelconque pénètre nécessairement la surface. On voit même que ce dernier ayant (591) un plan tangent à l'infini, a également deux génératrices à l'infini, qui sont tout entières sur sa surface; or, de là et du principe de l'article 107 résulte immédiatement tout ce que l'on connait sur la génération du paraboloïde hyperbolique au moyen de deux droites.

595. Revenons maintenant à notre premier objet, et remarquons que, lorsque deux surfaces du second ordre ont un point de contact commun, il ne suffit même pas, pour pouvoir affirmer qu'elles ont ce point pour centre d'homologie, qu'elles aient simplement des sections planes communes, et qu'elles soient aptes par conséquent à avoir en général deux centres d'homologie (587); car deux surfaces quelconques du second ordre, qui se coupent suivant deux lignes planes, et qui ont ainsi deux centres d'homologie distincts non situés sur ces surfaces, ont cependant, pour points de contact communs, ceux où se rencontrent, en général, les deux courbes des sections

planes dont il s'agit. Or, pour peu qu'on réfléchisse aux propriétés du centre et du plan d'homologie, il sera aisé de voir que deux surfaces du second ordre, qui ont un point de contact commun, ne pourront être homologiques par rapport à ce point qu'autant que le plan tangent qui lui correspond ne puisse être regardé comme un plan d'homologie ou de section commune à la fois à ces surfaces.

Cela posé, si nous considérons deux surfaces du second ordre ainsi tangentes en un point commun, il est clair, d'après ce qui précède (594), que, pour que le plan tangent en ce point puisse être censé une section plane commune aux deux surfaces, il faut que les deux génératrices, réelles ou imaginaires, qui correspondent au plan tangent, se confondent pour l'une et l'autre surface, ou soient les mêmes; c'est-à-dire que les sections planes, parallèles au plan tangent commun, devront être s. et s. p.: elliptiques d'ailleurs si le plan tangent détermine une section plane commune infiniment petite dans les surfaces; hyperboliques si, au contraire, ce plan renferme deux génératrices communes à ces surfaces.

Enfin les mêmes conditions seront évidemment remplies, en général, si les deux surfaces du second ordre ont une section plane commune unique, indépendante du point de contact; car le plan de section ou d'homologie, conjugué à celui-là, renfermera ce point et ne pourra être évidemment autre chose que le plan tangent même qui lui correspond; autrement, en effet, il serait sécant et donnerait une seconde branche de pénétration des deux surfaces, ce qui est contre l'hypothèse.

596. Dans les deux cas précédents, qui reviennent identiquement au même comme on voit, et qui ne peuvent exister l'un sans l'autre, les deux surfaces du second ordre proposées auront le point de contact commun pour centre d'homologie, et le plan de section commune correspondante pour plan d'homologie conjugué à ce centre; par conséquent on pourra se servir des procédés indiqués ci-dessus (582 et 583), soit pour construire l'une des deux surfaces au moyen de l'autre et de certaines données, soit pour déterminer directement tout ce qui lui appartient.

Or je dis que les mêmes choses auront lieu encore, pourvu seulement que les surfaces proposées aient un contact du second ordre au point commun dont il s'agit.

En effet, quelle que soit alors la courbe de pénétration des deux surfaces, on pourra toujours prendre sur elle deux points autres que le point de contact, et qui détermineront avec lui un plan, lequel rencontrera ces surfaces

suivant deux lignes du second ordre ayant cinq points communs, dont trois confondus en un seul au point de contact; or c'est ce qui ne peut être évidemment (**203**), à moins qu'elles ne se confondent en une seule et même courbe, commune à la fois aux deux surfaces proposées, et par conséquent sans que la courbe d'intersection de ces surfaces soit plane. On voit d'ailleurs que les deux surfaces ne sauraient avoir d'autre branche d'intersection, si ce n'est celle infiniment petite qui se trouve confondue avec le point de contact; donc ce point sera un centre d'homologie de ces surfaces, conjugué au plan de section distincte dont il s'agit, et par conséquent, comme tel, il jouira des diverses propriétés déjà souvent signalées.

597. Pour passer de là au contact du troisième ordre, il suffit évidemment de supposer que la seconde section plane devienne infiniment petite comme la première, ou se confonde avec le plan tangent, qui sera ainsi devenu doublement un plan d'homologie des deux surfaces. Dans ce même cas, une seule condition, comme celle de passer par un point quelconque donné, suffira pour construire entièrement la surface osculatrice par le procédé indiqué (art. 582 et 583). Il en faudrait nécessairement deux pour le contact du second ordre, et trois pour celui du premier, tout comme cela a lieu pour le cas particulier des lignes du second ordre.

Il est facile, au surplus, d'étendre ces considérations à des surfaces quelconques, et de voir, pour le cas actuel, ce que devient le second centre d'homologie.

Enfin, de ces différentes remarques on déduirait immédiatement toutes les notions relatives aux surfaces du second degré qui sont mutuellement osculatrices en un point; mais, au lieu de nous arrêter davantage à cet examen, il vaudra beaucoup mieux que nous revenions sur le cas général des surfaces du second degré homologiques, pour y ajouter quelques éclaircissements que nous avons dû négliger dans ce qui précède, afin de ne pas partager inutilement l'attention.

Application de la loi de continuité à la démonstration des principales propriétés des sections planes des surfaces du second degré.

598. La démonstration d'où nous sommes partis, art. 587, pour établir les divers théorèmes qui précèdent, est entièrement analogue à celle qui a été mise en usage à l'article 294 pour le cas des sections coniques, et l'on voit qu'elle repose sur les mêmes principes et offre les mêmes restrictions. Les conséquences qui en résultent ne peuvent recevoir toute leur extension

qu'en invoquant la loi de continuité; comme elle, elle repose, en dernière analyse, sur ce principe que, « par cinq points pris à volonté sur un plan, » ne passe jamais qu'une seule et même ligne du second ordre, » principe qui peut, à la rigueur, être regardé comme une autre conséquence de la loi de continuité.

En effet, si l'on suppose que l'une des deux courbes change de forme, par succession insensible, de façon qu'en conservant toujours le même degré ou la même nature, elle tende sans cesse à dégénérer en deux lignes droites; par suite de la loi de continuité (539), elle devra aussi sans cesse conserver le même nombre de points d'intersection réels, imaginaires, etc., avec l'autre; or il est évident que, à la limite, ce nombre ne saurait surpasser quatre, d'après la définition même adoptée pour les lignes du second ordre; donc pareillement les courbes proposées ne peuvent avoir plus de quatre points communs, et, si elles en ont réellement cinq, elles se confondent nécessairement en une seule et même courbe. Ce tour de démonstration pourrait encore servir évidemment à prouver que *toutes les lignes du second ordre sont nécessairement des sections coniques.*

599. Ainsi, les diverses propriétés des surfaces du second ordre, qui viennent de nous occuper précédemment, dérivent immédiatement et uniquement des premières notions du plan et de la ligne droite, pourvu qu'on admette, dans toute leur étendue, les conséquences du principe de continuité. A la vérité, la démonstration de l'article 587 repose encore sur ce théorème, que *la courbe de contact de deux surfaces quelconques du second ordre est plane;* mais il est aisé de voir que la démonstration de ce dernier théorème peut également être établie au moyen des mêmes principes.

Que l'on prenne, en effet, trois points quelconques de la courbe de contact pour y faire passer un plan; ce plan coupera les deux surfaces suivant deux lignes du second ordre, qui se toucheront aux trois points dont il s'agit, ou auront six points communs confondus, deux à deux, en un seul; ce qui ne peut être, selon ce qui précède, à moins que les deux courbes ne se confondent en une seule et même courbe commune à la fois aux deux surfaces. Mais celles-ci ne sauraient évidemment avoir d'autres points communs que ceux de la courbe de contact; donc cette courbe se confond tout entière avec la précédente; donc enfin elle est plane.

On serait arrivé plus directement au but, en observant que la courbe de contact est nécessairement telle, que tout plan transversal arbitraire ne la rencontre qu'en deux points seulement; or cela ne peut avoir lieu que pour

les seules lignes du second ordre, qui d'ailleurs sont toutes planes : s'il était possible, en effet, qu'il y eût des lignes du second ordre à double courbure, on pourrait toujours mener, par trois points quelconques d'une telle courbe, un plan transversal, ce qui est contre l'hypothèse, à moins que la courbe ne soit comprise tout entière dans le plan transversal. (*Annotations de l'Errata.*)

600. On démontre d'ailleurs, avec une égale facilité, les diverses autres propriétés générales des surfaces du second ordre et des lignes qui s'y trouvent renfermées, pourvu qu'on admette toujours le principe de continuité.

Remarquons d'abord que deux sections planes quelconques d'une surface du second ordre ont, en général, deux points réels communs situés sur la droite d'intersection de leurs plans; c'est-à-dire que cette droite est une sécante commune, qui devient idéale quand les deux points en question sont impossibles ou imaginaires, et qui, en vertu du principe cité, n'en conserve pas moins toutes ses propriétés primitives (*).

Cela posé, considérons, par exemple, deux surfaces du second ordre ayant une section plane commune, réelle ou idéale; je dis que, conformément à ce qui a déjà été établi, d'une manière différente, dans ce qui précède (592), ces surfaces auront nécessairement une autre section plane commune conjuguée à la première; ou, en d'autres termes :

Si l'une des branches d'intersection de deux surfaces du second ordre est plane, l'autre le sera pareillement.

Pour le prouver, supposons que l'on prenne, à volonté, trois points sur la seconde branche, pour y faire passer un plan; il ira déterminer deux points réels ou imaginaires sur l'autre, qui seront communs à la fois aux deux surfaces, et par lesquels devront passer, aussi bien que par les trois premiers, les deux lignes du second ordre qui résultent de l'intersection de ces surfaces respectives par le plan transversal; ces deux lignes auraient donc cinq points communs : or, cela ne peut être à moins qu'elles ne se confondent en une seule et même courbe avec la seconde branche dont il s'agit, laquelle est ainsi nécessairement plane, comme la première.

601. Considérons encore ce beau théorème, dû à Monge et que M. Chasles a ensuite démontré (**) en se servant du principe de l'article 428, relatif au cas particulier des sections coniques :

Quand deux surfaces quelconques du second degré sont circonscrites à une

(*) Nous avons démontré les mêmes choses rigoureusement, art. 65, sans recourir au principe de continuité.

(**) *Correspondance Polytechnique*, t. III, p. 328 et suiv.

même troisième surface de ce degré, elles ont toujours deux sections planes communes, réelles ou idéales, dont les plans passent par la même droite que ceux de contact de ces surfaces.

En effet, les deux courbes planes de contact de ces surfaces, étant à la fois sur la troisième, ont deux points communs, réels ou imaginaires, situés sur la droite d'intersection de leurs plans, pour chacun desquels les trois surfaces ont évidemment à la fois même plan tangent; or, ces deux points appartenant à la courbe de pénétration dont on recherche la nature, il arrivera qu'en prenant, à volonté, un troisième point sur cette courbe, pour déterminer avec les deux autres un plan, ce plan produira, dans les deux surfaces correspondantes à cette courbe d'intersection, deux lignes du second degré qui auront trois points communs, dont deux seront doubles ou des points de contact; ce qui ne peut être à moins que les deux courbes ne se confondent en une seule et même section conique commune à la fois aux deux surfaces que l'on considère, c'est-à-dire sans qu'une, au moins, des branches d'intersection de ces surfaces soit plane; donc l'autre le sera également (600), comme il s'agissait de le démontrer. On voit, de plus, que ces deux sections et celles de contact des surfaces qui leur correspondent ont, toutes quatre, une sécante réelle ou idéale commune.

602. On prouverait, d'une manière tout aussi simple, que, réciproquement, *quand deux surfaces du second ordre ont deux sections planes communes, il en existe une infinité d'autres qui leur sont à la fois circonscrites, et parmi lesquelles il en est deux qui sont des surfaces coniques du second ordre.*

Cette dernière partie du théorème revient d'ailleurs à ce qui a déjà été dit précédemment (592) sur les surfaces du second degré homologiques.

603. Les raisonnements qui précèdent peuvent évidemment servir aussi à établir cet autre théorème, également dû à Monge et démontré ensuite par M. Chasles, à l'endroit déjà cité :

Quand deux surfaces du second ordre ont deux points de contact communs, elles s'entrecoupent suivant deux courbes planes, réelles ou imaginaires, passant par ces deux points, de telle sorte que la droite d'intersection de ces plans a pour polaire réciproque la droite d'intersection des plans tangents aux points de contact communs.

La proposition inverse est en quelque sorte évidente *à priori* (595); cependant, comme les sections planes des deux surfaces peuvent ne pas s'entrecouper, on voit qu'alors ces deux surfaces ont un double contact idéal suivant

la droite commune aux deux plans de section, laquelle, étant réelle, n'en conserve pas moins sa polaire réciproque, bien que celle-ci soit devenue le concours idéal de deux plans tangents imaginaires communs aux deux surfaces. (*Annotations de l'Errata.*)

604. Considérons encore deux sections planes quelconques d'une surface du second degré, elles auront (600) deux points réels ou imaginaires communs, c'est-à-dire une sécante commune placée à l'intersection des deux plans; menons les plans tangents aux points communs correspondants, ils se rencontreront suivant une droite polaire réciproque de la première; par cette droite et par un point quelconque de l'une des deux courbes, menons, de nouveau, un plan, il ira déterminer sur l'autre courbe deux points; joignons enfin, par une droite, l'un de ces points avec le premier, elle rencontrera celle d'intersection des plans tangents en un point qui sera le sommet d'un cône du second ordre renfermant à la fois les deux courbes proposées.

En effet, si l'on projette, de ce point, l'une d'elles sur le plan de l'autre, il est évident que la projection aura, avec cette autre, trois points communs, dont deux, appartenant à la sécante commune ci-dessus, sont des points de contact de ces courbes, ce qui ne peut être, à moins qu'elles ne se confondent en une seule et même courbe.

Comme au point, pris à volonté sur l'une des deux courbes proposées, correspondent toujours deux points sur l'autre, on voit qu'il existe pareillement deux cônes passant par ces courbes, lesquels sont par conséquent *conjugués*. La démonstration s'appliquant d'ailleurs, mot à mot, au cas de deux sections coniques quelconques ayant une sécante réelle ou idéale commune dans l'espace, il en résulte immédiatement ce théorème connu :

Par deux sections coniques, situées ou non situées sur une surface du second ordre, mais ayant une sécante réelle ou idéale commune, on peut toujours faire passer deux cônes de cet ordre.

605. Ainsi deux semblables courbes sont, de deux manières différentes, projections l'une de l'autre par rapport au sommet de chaque cône, c'est-à-dire qu'elles jouissent, comme telles, des propriétés que nous avons déjà souvent signalées. Si donc on suppose que ces courbes appartiennent à une même surface du second ordre, et qu'on conçoive, par le centre de cette surface et par le sommet de l'un quelconque des cônes, une suite de plans sécants, il en résultera, sur cette surface, des sections coniques diamétrales passant toutes par un ou deux mêmes points, lesquels jouiront, par rapport

aux courbes proposées, de toutes les propriétés projectives qui appartiennent au centre d'homologie des figures simplement décrites sur un plan, pourvu qu'on remplace toujours les lignes droites par des sections diamétrales.

On arriverait encore au même but, en observant que ces propriétés appartiennent (290) aux sections coniques qui, sur un plan quelconque, sont la projection des deux premières par rapport au centre de la surface. On voit, de plus, que la même extension a lieu pour toutes les autres propriétés projectives qui peuvent appartenir individuellement à chacune de ces sections coniques ou à leur système commun. Enfin on remarquera que les sommets de deux cônes ainsi conjugués sont réciproquement tels, que le plan polaire de l'un, relativement à la surface, passe par l'autre et par la sécante commune des deux courbes planes que l'on considère, en sorte que la distance de ces sommets est divisée harmoniquement (590), et par les deux plans des courbes dont il s'agit, et par la surface du second ordre qui renferme à la fois ces deux courbes.

606. Considérons trois sections coniques quelconques dans l'espace, appartenant ou non à une surface du second ordre, mais ayant, deux à deux, une sécante commune, réelle ou idéale, située à l'intersection de leurs plans respectifs; on voit que les trois sécantes dont il s'agit iront concourir en un même point de l'espace. Cela posé, concevons les trois systèmes de cônes conjugués qui renferment, deux à deux, les trois courbes proposées; il est évident que le plan tangent à deux de ces cônes, non conjugués entre eux, sera tangent à la fois aux trois courbes, et par conséquent à un troisième cône non conjugué au premier; donc les sommets de ces six cônes, c'est-à-dire les six centres d'homologie ou de projection des trois courbes, sont, trois par trois, sur quatre droites et par conséquent dans un même plan.

Si maintenant on combine cette remarque avec ce que nous venons de dire pour le cas de deux courbes, on verra, en examinant ce qui se passe dans les différents plans qui appartiennent à une même droite des centres d'homologie, que les propriétés projectives de nos trois courbes sont entièrement analogues à celles (Section II, Chapitre III) qui concernent les sécantes communes, les axes et les centres de similitude de trois cercles quelconques tracés sur un même plan; avec cette différence cependant que ces courbes, au lieu d'avoir une autre sécante commune conjuguée à la fois aux trois premières, comme cela a lieu dans le cas particulier des cercles, n'en auront aucune de cette sorte. On pourra même en conclure que :

Trois lignes du second ordre, situées à volonté dans l'espace, mais ayant,

deux à deux, une sécante commune intersection de leurs plans, sont toujours susceptibles d'appartenir à une seule et même surface du second ordre.

607. Supposons enfin, comme ci-dessus (605), que l'on projette, sur une surface du second ordre et à partir de son centre, les différents points et les différentes droites relatives aux trois sections planes arbitraires qui s'y trouvent renfermées; on conclura encore, de ce qui précède, que ces courbes jouiront entre elles des diverses propriétés qui appartiennent au système de trois cercles quelconques tracés sur un plan, pourvu qu'on remplace par des sections diamétrales les lignes droites qui appartiennent à ce dernier système.

La même remarque s'étend évidemment, en général, à un nombre quelconque de sections planes d'une surface du second ordre; c'est-à-dire que les propriétés projectives d'un tel système sont entièrement analogues à celles d'un système pareil de cercles tracés à volonté sur un plan.

608. Nous avons déjà observé (406) que toutes ces choses ont lieu également pour le système de sections coniques quelconques tracées sur un même plan, lorsqu'elles ont une sécante commune, réelle ou idéale; mais cette condition n'est pas même nécessaire, ou plutôt on peut la remplacer par une autre tout à fait différente; car on prouve aisément, par un raisonnement souvent mis en usage (587, 601, etc.) dans ce qui précède, que:

Trois sections coniques quelconques, tracées sur un même plan et qui ont trois de leurs sécantes communes, non conjuguées entre elles, concourant en un point unique, peuvent toujours être considérées comme la projection de trois autres sections coniques, dans l'espace, ayant deux à deux une sécante commune à l'intersection de leurs plans respectifs.

De plus, puisque, selon ce qui précède, ces dernières sections coniques appartiennent toujours à une même surface du second ordre, et que, d'une autre part, toute courbe tracée sur cette surface touche, en projection, son *contour apparent* (*) aux deux points communs à ce contour et à la première courbe, on voit que nos trois sections coniques sont susceptibles d'être enveloppées, à la fois, par une même quatrième section conique, ou d'avoir un double contact avec elle, soit réel, soit simplement idéal.

609. En général, lorsqu'une section conique a un double contact, réel ou

(*) Cette expression, qui se rapporte essentiellement au cas de la perspective, désigne ici la courbe de contact du cône, enveloppe de la surface, qui a son sommet au centre de projection; en d'autres termes, c'est la section relative au plan polaire du centre de projection.

idéal, avec une autre section conique tracée sur son plan, on peut toujours la considérer comme la projection d'une section plane d'une surface du second ordre, qui aurait l'autre pour contour apparent, et *vice versâ*. Imaginons en effet, par celle-ci, une surface quelconque du second ordre, et il y en a évidemment une infinité; concevons (599) le cône tangent à cette surface le long de la courbe qu'elle renferme; son sommet étant pris pour centre de projection ou point de vue, il est évident que la courbe de contact sera le contour apparent de la surface. Cela posé, concevons que, par un point de cette surface, projection d'un point quelconque de la courbe qui a un double contact avec la première, on mène un plan qui renferme en même temps la sécante de contact commune à ces courbes; il rencontrera la surface en une nouvelle courbe dont la projection, sur le plan du contour apparent, aura avec l'autre trois points communs, dont deux doubles ou appartenant aux mêmes éléments; donc ces courbes ne font véritablement qu'une seule et même courbe, ainsi qu'il s'agissait de le démontrer.

Il suit de là évidemment, et de ce qui précède (606), que le système d'un nombre quelconque de sections coniques, ayant un double contact, réel ou idéal, avec une même section conique donnée sur un plan, jouissent exactement entre elles des mêmes propriétés projectives que le système pareil d'un nombre quelconque de cercles tracés sur un plan commun, si ce n'est toutefois qu'elles n'auront pas, comme ceux-ci, une sécante commune en même temps à tout leur système (94).

Ainsi, par exemple, si l'on en considère trois à volonté, leurs centres d'homologie, pris dans un certain ordre et de façon qu'il n'y en ait pas deux qui soient conjugués entre eux, seront, trois par trois, en ligne droite, etc., etc.

D'après l'article 608, les mêmes choses ont lieu aussi pour le cas où les sections coniques proposées sont seulement telles, que trois de leurs sécantes communes, non conjuguées entre elles, concourent en un point unique du plan qui les renferme.

610. Toutes ces propriétés pourraient d'ailleurs s'établir directement au moyen de celles qui ont déjà été démontrées, par une autre marche, dans le Chapitre III de la IIIe Section, et celles-ci sont évidemment, à leur tour, comprises implicitement dans les précédentes. Or, il est à remarquer que cette correspondance est indépendante de la réalité ou de la non-réalité du double contact des sections coniques que l'on considère; c'est-à-dire que les diverses propriétés qui précèdent subsistent également pour le cas où le double contact est idéal. En effet, les propriétés des sections planes d'une surface du

second ordre sont elles-mêmes indépendantes de la position particulière de ces sections sur la surface; et, pour que la projection d'une certaine section sur le plan du contour apparent ait un double contact idéal avec ce contour, il suffit qu'elle n'ait aucun point commun avec lui; ce qui est possible évidemment d'une infinité de manières différentes. Bien plus, de ces considérations relatives à l'espace on pourrait déduire l'interprétation, en quelque sorte rigoureuse, de tout ce qui a été dit sur le double contact idéal des sections coniques; et l'on voit même comment il serait possible de les étendre au cas où certaines lignes deviendraient entièrement imaginaires, et à celui où ces lignes, au lieu d'être simplement des sections coniques, seraient d'un ordre quelconque, etc.

Mais revenons aux propriétés des sections coniques qui ont un double contact avec une section conique donnée sur un plan, et supposons que certaines d'entre elles se réduisent à des points isolés, à des systèmes de deux droites indéfinies, à des portions de lignes droites (437) inscrites ou terminées à la courbe dont il s'agit; cela reviendra à admettre que les plans des sections, qu'elles représentent sur la surface qui a la conique proposée pour contour apparent, soient les uns tangents à cette surface, les autres sécants suivant deux de ses génératrices (595), les autres enfin dirigés vers le point de vue ou centre de projection qui lui est relatif; or il en résultera une infinité de propositions, fort élégantes, du genre de celles déjà établies dans la IIe Section de cet ouvrage. Ainsi, par exemple, en supposant que deux ou trois sections coniques, doublement tangentes avec la proposée, se réduisent au système de deux ou trois cordes, on retombera directement (424) sur les propriétés du quadrilatère et de l'hexagone inscrits aux sections coniques, etc., etc.

Au surplus, nous ne devons pas oublier, en terminant ce sujet vraiment digne d'intérêt, et qui nous semble bien propre à montrer toutes les ressources qu'on peut tirer du principe de continuité, nous ne devons pas oublier, dis-je, de rappeler que M. Chasles (*) et, avant lui, le savant auteur des *Développements de Géométrie*, M. Dupin (**), avaient déjà indiqué, à l'occasion du problème où il s'agit de mener une section plane tangente à trois autres sections planes quelconques d'une surface du second ordre, comment on pouvait passer de là aux propriétés des figures rectilignes inscrites aux sections coniques.

Nous ajouterons à tout ce qui précède qu'on obtiendrait aisément les pro-

(*) *Correspondance Polytechnique*, t. III, p. 17.
(**) Même recueil, t. II, p. 421.

priétés des figures circonscrites aux surfaces du second ordre, en considérant, sur une telle surface, les cônes circonscrits qui ont ses diverses sections planes pour lignes de contact avec elle ; car, d'après le théorème de Monge (601), tous ces cônes s'entrecouperont suivant des courbes planes, dont les propriétés, à l'égard des sommets correspondants, seront faciles à découvrir au moyen de celles qui appartiennent aux courbes de contact tracées sur la surface, et de la théorie des polaires réciproques (592). Tout consiste, en effet, à remarquer que le sommet d'un cône quelconque, circonscrit à une surface du second ordre, est le pôle du plan de contact correspondant, et que la surface même du cône est polaire réciproque de la courbe contenue dans ce plan ; que les courbes d'intersection de deux cônes circonscrits sont réciproques polaires des surfaces coniques qui renferment les deux courbes de contact correspondantes, etc., etc.

Des courbes d'intersection des surfaces du second degré en général, de leurs droites diamétrales conjuguées communes, de leurs sections circulaires et de leurs axes principaux.

611. Au lieu de considérer, comme dans tout ce qui précède, des sections planes faites dans une surface du second ordre, occupons-nous des courbes à double courbure qui résultent, en général, de l'intersection de cette surface par une autre surface quelconque du second ordre ; nous trouverons encore que les branches d'une telle courbe jouissent entre elles de propriétés analogues à celles qui appartiennent au système de deux des premières : c'est-à-dire que ces branches sont susceptibles d'être placées sur une même surface de cône, et sont par conséquent aussi homologiques par rapport au sommet de ce cône ; car il est visible (589) que leurs droites homologues concourront sur un même plan d'homologie, qui sera évidemment ici, comme dans ce qui précède, le plan polaire du sommet du cône relativement à chacune des deux surfaces.

Remarquons d'abord que la courbe de pénétration est, en général, composée de deux branches, l'une d'entrée, l'autre de sortie, et que son degré est nécessairement le quatrième, puisque tout plan transversal ne peut jamais déterminer plus de quatre points d'intersection, communs aux deux surfaces, appartenant aux deux lignes du second ordre qui sont dans ce plan. Cela posé, considérons un plan tangent quelconque T (*) aux deux

(*) Nous n'avons pas décrit la figure, à cause de sa complication, mais il sera facile de la suppléer au besoin.

branches dont il s'agit : il coupera les surfaces suivant deux lignes du second ordre (U) et (V) ayant un double contact entre elles aux points communs à ces branches et au plan tangent, points que nous nommerons *a* et *b*. Concevons pareillement un second plan tangent T' à ces branches, et soient (U') et (V'), *a'* et *b'* respectivement les nouvelles lignes du second ordre et les points de contact qui en résultent. Il est évident que les courbes (U) et (U') auront une corde commune *mn* (600) sur la droite d'intersection des deux plans T, T', et que celles (V) et (V') en auront pareillement une *pq* sur cette droite; donc, d'après un théorème que nous avons fait connaître (429), et qu'il serait facile d'établir directement au moyen des considérations qui précèdent, chacune des sécantes de contact *ab* et *a'b'* devra, selon l'espèce du contact (415), concourir en l'un ou en l'autre des points K et L qui, sur la droite d'intersection des plans T, T', divisent à la fois harmoniquement les cordes *mn*, *pq*, et sont ainsi déterminés de position sur cette droite.

Mais il existe nécessairement une infinité de plans tangents pour lesquels le contact est de l'une des deux espèces, et il en existe aussi une infinité dont le contact est de l'autre de ces espèces; en sorte que les paires de plans tangents T et T', qui leur appartiennent respectivement, donneront lieu à des sécantes de contact *ab*, *a'b'* concourant, les unes en des points K, les autres en des points L de la droite d'intersection de ces paires de plans. Supposons donc qu'on ne considère, en particulier, que la suite des plans tangents de la première espèce, et soit T'' un troisième plan tangent qui ait cette propriété avec ceux T et T'; soient *a''* et *b''* les points de contact correspondants; il résultera de ce que nous venons de dire que les droites *ab*, *a'b'*, *a''b''* devront se croiser, deux à deux, sur les intersections des plans T, T', T'', ce qui ne peut être évidemment, à moins que ces droites n'appartiennent à un quatrième plan, ou qu'elles ne concourent au point commun à la fois aux trois autres; or la première hypothèse est inadmissible, puisqu'on serait amené à conclure que l'infinité de points *a*, *b*, *a'*, *b'*,..., serait située sur un même plan; donc la seconde seule subsiste.

Mais nous venons de montrer que le point d'intersection K des trois droites et des trois plans que l'on considère est entièrement déterminé de position au moyen de deux de ces droites ou de ces plans; de plus, il est assez évident que tous les plans, assujettis à la même loi et qui sont en nombre infini, doivent se succéder sans interruption ou d'une manière continue; donc enfin, si l'on fait rouler convenablement le troisième des plans dont il s'agit sur les branches de pénétration des deux surfaces, il ne cessera pas de passer par le point fixe K, aussi bien que la sécante de contact qui

lui correspond; et par conséquent ce plan et cette sécante décriront un même cône, qui renfermera à la fois les deux branches dont il s'agit.

Concluons donc, conformément à ce qui a été avancé au commencement de cet article, que ces deux branches sont homologiques l'une de l'autre par rapport au sommet du cône, et qu'elles ont pour plan d'homologie le plan polaire relatif à ce sommet, et qui est nécessairement commun à la fois aux deux surfaces proposées.

612. Réciproquement, si un point quelconque de l'espace est tel, qu'il ait même plan polaire dans deux surfaces du second ordre, ce point sera nécessairement le sommet d'un cône passant par la courbe de pénétration des deux surfaces; car tout plan renfermant ce point déterminera deux courbes du second degré dans ces surfaces, lesquelles auront même polaire par rapport au point en question, ce qui ne peut être à moins qu'il ne soit (363) le point de concours de deux de leurs sécantes conjuguées communes, d'ailleurs réelles, idéales ou imaginaires.

Je dis, en outre, que le cône, formé par la suite de tous ces systèmes de sécantes conjuguées communes, et celui qui renferme en général les deux branches de pénétration de deux surfaces quelconques du second ordre, seront eux-mêmes du second ordre seulement : en effet, un plan quelconque, passant par le sommet de l'un de ces cônes, ne déterminera jamais plus de deux arêtes sur la surface de ce cône, et, par suite, une droite quelconque ne pourra jamais rencontrer cette surface en plus de deux points.

613. Enfin, puisque, par la courbe de pénétration de deux surfaces du second degré, on peut faire passer un cône de ce degré, sur lequel elle se trouve comprise tout entière, à plus forte raison doit-on pouvoir y faire passer, et d'une infinité de manières différentes, une nouvelle surface du second degré; mais c'est ce qu'on peut aussi démontrer directement, ainsi qu'il suit : prenons un point quelconque de l'espace pour y faire passer la nouvelle surface, et concevons, par une droite menée arbitrairement de ce point, une suite de plans, ils couperont la courbe de pénétration des surfaces proposées chacun en quatre points. Concevons, pour chaque plan, la ligne du second ordre qui renferme ces quatre points et le point pris à volonté, la suite de ces lignes formera une certaine surface continue qui sera nécessairement du second degré; car tout plan transversal déterminera, dans cette surface, une courbe qui aura au plus quatre points communs, réels ou imaginaires, avec la courbe correspondante formée, dans l'une des surfaces proposées, par le plan transversal, et qui ne pourra être par conséquent que

du second degré; donc il en sera de même aussi de la surface à laquelle cette courbe appartient.

614. Les raisonnements établis ci-dessus (611), laissent assez apercevoir qu'il y a plus d'un cône du second degré renfermant à la fois les branches de la courbe de pénétration des deux surfaces qu'on y considère, et que chacun de ces cônes doit provenir d'un même mode de mouvement continu du plan tangent T autour de ces deux branches. Or, si l'on suppose ces deux branches fermées, ce qui n'ôte rien à la généralité des conséquences qui vont suivre, il sera aisé de s'apercevoir que, par la tangente en un point quelconque de l'une d'elles, on peut mener au moins deux plans tangents à la seconde; or je dis qu'il existera également au moins un plan doublement tangent à la branche qui lui appartient.

En effet, cette dernière étant supposée fermée, il existera toujours une infinité de plans tangents, en un de ses points, qui la rencontreront en deux nouveaux points, et, comme il en existe également une infinité qui rencontrent la seconde branche en deux points, en cessant par conséquent de rencontrer la première, on voit qu'il y aura nécessairement une position intermédiaire du plan en question pour laquelle il sera doublement tangent à la branche qui lui appartient : on pourrait même ajouter qu'il existe, en général, deux plans tangents pareils, puisqu'il doit y avoir au moins un point d'entrée et un point de sortie du plan tangent.

Quoi qu'il en soit, puisqu'un cône du second ordre ne peut avoir qu'un seul plan tangent en un point donné sur sa surface, il est clair que les quatre plans tangents que nous venons de considérer, pour un même point de la courbe de pénétration, doivent appartenir à quatre cônes ou à quatre modes de mouvement distincts du plan tangent. Je dis, en outre, qu'il ne saurait y en avoir plus de quatre.

615. Pour le prouver, concevons la droite qui renferme les sommets de deux cônes quelconques; il est clair que tout plan passant par cette droite rencontrera les cônes suivant deux systèmes de sécantes conjuguées communes aux deux sections qui correspondent à ce plan et aux surfaces proposées; donc (360) chaque sommet aura, dans ces courbes, même polaire passant réciproquement par l'autre; donc pareillement le plan polaire, commun à la fois aux deux surfaces et à l'un des sommets de cônes, passera réciproquement par l'autre sommet; or de là on conclut d'abord ce théorème, dont la remarque de l'article 605 n'offre qu'un cas particulier, et qui est

entièrement analogue à celui de l'article 360 relatif aux simples lignes du second ordre :

Les sommets des différents cônes, qui renferment la courbe d'intersection de deux surfaces quelconques du second ordre, sont tels, que le plan polaire de l'un quelconque d'entre eux passe à la fois par tous les autres.

616. Donc aussi :

Le nombre de ces sommets est, au plus, de quatre, et le tétraèdre qui leur appartient est tel, qu'une arête quelconque a pour polaire réciproque, dans l'une et dans l'autre surface, l'arête respectivement opposée de ce tétraèdre.

S'il pouvait y avoir un cinquième sommet, il faudrait nécessairement, d'après ce qui précède, qu'il fût le pôle du plan qui renferme trois quelconques des autres sommets, c'est-à-dire qu'il devrait se confondre avec le quatrième. Donc enfin il existe, en général, quatre cônes renfermant la courbe d'intersection, et il ne peut jamais en exister plus de quatre qui jouissent de cette propriété.

On voit, en outre, que, quand trois des quatre sommets de cônes sont donnés, le quatrième s'ensuit nécessairement, puisque, d'après ce qui précède, il doit être le pôle du plan qui renferme à la fois les trois autres.

617. De là on déduirait immédiatement, comme cas particulier, tous les théorèmes de Monge sur les droites *diamétrales conjuguées communes* des surfaces du second ordre, théorèmes qui ont été ensuite démontrés analytiquement, par M. Chasles, à l'endroit déjà cité (601) de la *Correspondance Polytechnique*.

En effet, lorsque deux surfaces quelconques du second ordre sont concentriques, elles ont même plan polaire à l'infini (580 et 591) par rapport au centre commun; donc (612) ce centre est le sommet d'un cône du second ordre qui renferme la courbe de pénétration des deux surfaces, et par conséquent, les trois autres sommets étant nécessairement à l'infini (615), les cônes qui leur correspondent sont des cylindres du second ordre aussi bien que ceux qui, ayant mêmes sommets qu'eux, sont circonscrits respectivement aux deux surfaces. Enfin on voit que les deux surfaces proposées ont trois plans diamétraux conjugués communs, ayant pour pôle, à l'infini, les sommets dont il s'agit, et ces plans deviennent évidemment des plans diamétraux rectangulaires de l'une des surfaces du second ordre, quand l'autre est une sphère.

Il est d'ailleurs facile de prouver que, dans ces divers cas, les sommets de cônes, à l'infini, sont toujours réels.

En effet, il est évident que l'on pourra toujours concevoir une troisième surface du second ordre concentrique aux deux proposées, c'est-à-dire ayant même plan polaire à l'infini par rapport au centre commun, et qui, étant s. et s. p. par rapport à l'une de ces surfaces, aura avec l'autre deux branches distinctes de pénétration commune, et par conséquent trois sommets réels de cônes (614) circonscrits à ces branches et placés à l'infini, outre celui qui se confond avec le centre commun; c'est-à-dire qu'elle aura, avec cette autre surface, trois plans diamétraux conjugués communs. Or les deux surfaces s. et s. p. ont évidemment les mêmes systèmes de plans diamétraux conjugués; donc ceux dont il s'agit sont communs à la fois aux trois surfaces que l'on considère, et par conséquent aux deux proposées; donc enfin il existe toujours pour celles-ci trois points à l'infini qui ont mêmes plans polaires dans chacune d'elles, et qui peuvent être considérés, au moins idéalement, comme le sommet d'autant de cônes renfermant les branches, réelles ou imaginaires, de pénétration des deux surfaces.

618. Puisque tout plan diamétral détermine, dans les deux surfaces, deux lignes du second ordre concentriques, qui ont au moins deux sécantes idéales conjuguées communes (365 et 384), il est aisé de prouver que, parmi les quatre cônes ou cylindres du second ordre qui renferment l'intersection des deux surfaces concentriques proposées, il en existe également au moins deux qui demeurent réels, même lorsque cette intersection est entièrement imaginaire. Ainsi cette courbe a toujours au moins deux de ses projections, sur un plan quelconque, qui sont des sections coniques réelles : quant aux deux autres cylindres ou cônes, ils doivent nécessairement être impossibles ou imaginaires en même temps que la courbe de pénétration dont il s'agit, puisque autrement les sections planes, passant par le centre commun des surfaces proposées, auraient plus de deux sécantes communes, ce qui est impossible dans l'hypothèse dont il s'agit.

Ces raisonnements s'appliquant, d'une manière analogue, au cas où les deux surfaces du second ordre, sans être concentriques, ont cependant un pôle commun relatif à un même plan, il en résulte que, dès qu'elles ont un tel point, elles en ont nécessairement trois autres qui sont réels en même temps que le premier, et qui peuvent être considérés, avec ce point, comme les sommets d'autant de cônes renfermant les branches d'intersection des surfaces proposées : on voit, de plus, que deux de ces quatre points appartiennent nécessairement à des cônes imaginaires, quand ces surfaces cessent de s'entrecouper.

Je ne crois pas devoir m'étendre davantage sur ces considérations, mon but n'étant ici que de faire voir comment on peut arriver facilement, au moyen des principes posés dans cet ouvrage, aux différents théorèmes sur les surfaces du second ordre qu'on a coutume de traiter par l'Analyse algébrique; je me contenterai, pour terminer ce sujet, de présenter un dernier exemple relatif à la recherche des *sections circulaires* des surfaces du second ordre, laquelle se rattache évidemment à celle des *axes principaux* et des *ombilics* de ces surfaces.

619. Concevons donc une surface du second ordre quelconque, et proposons-nous de rechercher directement si une telle surface a des sections circulaires, et en quel nombre sont ces sections.

Traçons à volonté une sphère dans l'espace; les sections circulaires de la surface proposée, si elles existent, auront, avec les sections qui leur sont parallèles dans la sphère, une sécante idéale commune située à l'infini, ou, si l'on veut, elles auront à l'infini deux points imaginaires communs, car (241 et 600) elles appartiendront, deux à deux, à un même cône comme étant s. et s. p.

Tout consiste donc à rechercher les points, à l'infini, communs aux deux surfaces, ou les sécantes communes qui les renferment; car tout plan, passant par l'une de ces sécantes, coupera nécessairement la sphère et la surface proposée suivant deux courbes s. et s. p., c'est-à-dire suivant des cercles : or le plan qui renferme (580) tous les points à l'infini de l'espace coupe idéalement la sphère et la surface proposée suivant un cercle et une conique qui ont quatre points imaginaires communs, et par conséquent six sécantes communes, dont deux nécessairement réelles, comme on va le démontrer dans ce qui suit.

Cela posé, imaginons, dans le plan à l'infini, une droite quelconque dont la direction peut d'ailleurs être censée appartenir à l'intersection de deux plans parallèles; les points réciproques (388) de ceux de cette droite, par rapport aux sections, à l'infini, des surfaces proposées, seront (370) sur une troisième section conique qu'il s'agit actuellement de construire, bien que l'une, au moins, des deux autres soit imaginaire, afin d'obtenir (371 et 373) les sécantes communes demandées, qui sont nécessairement toutes deux idéales.

Prenons, à volonté, un point sur la droite dont il s'agit; construisons, pour chaque surface, le plan polaire de ce point : il ira rencontrer le plan à l'infini suivant une droite qui sera évidemment la polaire du point en ques-

tion par rapport à la section correspondante du plan à l'infini. Les deux polaires ainsi obtenues, étant réelles, iront se rencontrer en un point qui sera le réciproque du proposé; donc on peut construire le lieu des points réciproques de ceux d'une droite, donnée sur le plan à l'infini, sans connaître les deux sections coniques qui leur appartiennent, et quoique ces sections coniques soient imaginaires, en tout ou seulement en partie.

En répétant les mêmes opérations pour une autre droite quelconque à l'infini, il en résultera une nouvelle réciproque, qui ira rencontrer la première en quatre points (371), dont un sera le réciproque de l'intersection commune des deux directrices, et dont un, au moins, des trois autres sera réel et le concours de deux des sécantes communes cherchées. Je dis, de plus, que les deux derniers points d'intersection seront aussi réels en même temps que les premiers.

En effet, si l'on construit, comme ci-dessus, la polaire du second point réel déjà trouvé par rapport aux deux courbes proposées, polaire qui est commune (360) à leur système, elle déterminera dans ces courbes deux cordes qui devront être divisées à la fois harmoniquement (361) par les deux derniers points cherchés. Supposons donc que, par cette polaire, on mène un plan transversal arbitraire, il rencontrera la surface du second ordre suivant une section conique, et la sphère suivant un cercle, qui auront les cordes ci-dessus en commun avec les sections relatives au plan à l'infini : or les deux points qu'on cherche, sur la direction commune de ces cordes, doivent évidemment être tels (194), d'après la propriété dont ils jouissent de diviser ces cordes harmoniquement, que la polaire de l'un quelconque d'entre eux passe par l'autre; mais ils sont à l'infini, et ces polaires sont des diamètres du cercle et de la section conique en question; donc ces points appartiennent à la direction des diamètres conjugués parallèles des courbes dont il s'agit, c'est-à-dire aux axes rectangulaires ou principaux de celle qui est une section conique quelconque; donc enfin ces axes vont rencontrer la direction de la droite à l'infini aux deux points demandés, qui ainsi sont toujours réels, en même temps que celui d'où cette droite dérive.

Ces mêmes considérations pourront servir, comme on voit, à construire l'un des trois points de concours des sécantes conjuguées communes aux sections à l'infini des deux surfaces, quand le troisième sera donné, le tout, comme on voit, par des opérations qui n'exigent que l'emploi de la règle et du compas. Les considérations des articles 379 et 380 conduiraient évidemment encore au même but.

620. Remarquons, avant d'aller plus loin, que la droite qui renferme

l'un des trois points ainsi trouvés et le centre de la surface du second ordre étant, d'après ce qui précède, la mutuelle intersection de deux sections diamétrales circulaires de cette surface, doit nécessairement être perpendiculaire à la fois à ces sections, et par conséquent normale à la surface proposée. Donc cette droite est un des *axes principaux* de la surface, et les directions de ces axes, *au nombre de trois seulement*, pourront se construire très-simplement à l'aide des procédés qui viennent d'être indiqués.

621. Maintenant que nous connaissons les trois points de concours réels des sécantes conjuguées communes aux sections planes qui sont à l'infini sur les surfaces, il nous sera très-facile de trouver ces sécantes elles-mêmes, et de prouver que deux d'entre elles sont réelles et conjuguées, le système des quatre autres étant nécessairement imaginaire; il est évident, en effet, que tout ce que nous avons dit (384) du cas où les sections coniques appartenant à ces trois points sont réelles, mais n'ont aucun point d'intersection commune, s'applique mot à mot à celui qui nous occupe, et dans lequel on suppose les sections coniques, en tout ou en partie, imaginaires. Concluons donc enfin que :

Toute surface du second ordre a généralement des sections planes circulaires (*), *dont deux réelles et conjuguées, et quatre imaginaires également conjuguées deux à deux ; or les droites de concours des plans, qui appartiennent respectivement à ces trois systèmes, sont toujours réelles, et leurs directions sont parallèles à celles des trois axes principaux de la surface.*

622. Quand la surface proposée est un paraboloïde, le plan à l'infini lui est tangent, et alors la section correspondante se réduit à un point ou au système de deux lignes droites (594), faciles à construire au moyen de deux sections parallèles quelconques faites dans la surface. Or ce point, ou celui de rencontre des deux droites, est évidemment un des trois points de concours des sécantes communes aux sections planes, à l'infini, tant de la sphère que de la surface proposée; donc il sera facile d'obtenir les deux autres de ces points au moyen de celui-là et du procédé indiqué à la fin de l'article 619, et, par suite (620), on aura la direction des trois axes principaux de la surface proposée, dont la construction n'est ainsi, pour le cas des paraboloïdes, que du second degré seulement.

Ayant les axes de la surface proposée ou les trois points qui leur corres-

(*) M. Hachette a, je crois, le premier démontré, à l'aide du calcul, que, par un point donné à volonté sur une surface du second ordre, passent en général deux sections circulaires de cette surface. *Voyez* le *Traité des surfaces du second degré*, publié par cet estimable professeur.

pondent à l'infini, on en déduira sans peine (621) la direction des plans de sections circulaires, sections qui se réduisent évidemment à de simples lignes droites (95) dans le cas du paraboloïde hyperbolique, puisque, selon ce qui précède, ces plans doivent renfermer respectivement les deux droites à l'infini de la surface, desquelles il a déjà été parlé ci-dessus; c'est-à-dire que, dans ce cas, les sections circulaires se réduisent à des systèmes de deux génératrices de la surface, dont l'une à distance donnée et l'autre à distance infinie.

623. Il sera d'ailleurs facile d'exécuter les diverses opérations indiquées, soit dans le cas général, soit dans le cas particulier, en concevant qu'on mène, par un point pris à volonté dans l'espace, des droites, des plans et des cônes, passant par les points, les droites et les courbes situées dans le plan à l'infini, et observant, en outre, que le plan polaire d'un point à l'infini, pour l'une des surfaces proposées, se confond avec le plan diamétral conjugué à la direction du diamètre qui renferme ce point.

Par exemple, si l'on mène, pour un même point à l'infini, les plans polaires diamétraux qui lui correspondent dans les deux surfaces, et sont par conséquent conjugués à une même direction de diamètres parallèles appartenant à ce point, ces plans iront se rencontrer en une droite, dont la parallèle, menée par le point pris pour auxiliaire, renfermera avec elle le point, à l'infini, réciproque de celui d'où l'on est parti; construisant donc ainsi une suite de droites passant par le point auxiliaire dont il s'agit et renfermant les différents points réciproques de ceux d'une droite quelconque, à l'infini, prise pour directrice et qu'on suppose donnée par le système de deux plans diamétraux parallèles des deux surfaces, elles formeront un premier cône du second ordre renfermant la section conique à l'infini, lieu des réciproques de cette droite.

Un second cône semblable, construit pour une autre directrice à l'infini, ou pour une autre direction de plans diamétraux parallèles des deux surfaces, donnera, par son intersection avec le premier, quatre arêtes communes à ces cônes, dont une sera connue à l'avance (619), et dont les trois autres, d'après ce qui précède, se confondront, en direction, avec les trois axes principaux de la surface proposée, si l'on a choisi le centre de cette surface pour sommet auxiliaire, ou seront seulement parallèles à ces axes si, ce centre étant à l'infini, on a choisi un autre point quelconque de l'espace pour sommet auxiliaire.

624. Ces dernières considérations font voir qu'on peut aisément se passer

du secours de la sphère, pour trouver les axes principaux et les sections circulaires de la surface du second ordre. En effet, puisque tout plan diamétral de cette sphère, conjugué à la direction d'une droite donnée, est perpendiculaire à cette droite, on voit que, pour obtenir successivement toutes les arêtes de l'un des cônes, relatives à une directrice quelconque donnée à l'infini, ou au plan diamétral qui la contient, il suffira de tracer, à volonté, un diamètre de la section comprise dans ce plan, et de rechercher ensuite les plans diamétraux dont l'un est conjugué et l'autre perpendiculaire à ce diamètre; car, selon ce qui précède, ces deux plans devront se rencontrer suivant l'arête du cône, réciproque du diamètre choisi en particulier.

Il est évident d'ailleurs que l'on arriverait de suite aux mêmes conséquences, à l'aide de la loi de continuité, en supposant que la sphère auxiliaire, au lieu d'être quelconque, soit infiniment petite, sans être précisément un point.

Comme on connaît à l'avance l'une des arêtes communes des deux cônes, puisqu'elle répond (619) au réciproque du point d'intersection des deux directrices à l'infini d'où les cônes proviennent, et que d'ailleurs ces cônes sont du second ordre, on voit qu'il suffira de rechercher seulement quatre autres arêtes quelconques de chacun d'eux, pour qu'ils soient entièrement déterminés de grandeur et de position, ainsi que les trois arêtes communes qui leur appartiennent outre celle déjà donnée. En effet, si l'on considère ce qui se passe dans un plan sécant quelconque, on aura cinq points de chacune des sections coniques qui en résultent dans les cônes; au moyen de quoi on pourra (203) les décrire entièrement, et obtenir, par suite, leurs points d'intersection appartenant aux arêtes cherchées (*).

625. D'après la construction indiquée en dernier lieu pour les arêtes de chaque cône, il résulte immédiatement que, si l'on considère, en particulier, l'un de ces cônes et la section diamétrale de la surface, qui contient la directrice à l'infini correspondante, 1° les deux axes principaux de cette section; 2° le diamètre qui lui est conjugué; 3° la perpendiculaire élevée à son plan par son centre, appartiennent à la surface de ce cône ou sont quatre

(*) On peut éviter de décrire à la fois les deux courbes par points, en recherchant, d'après le principe de l'article 339, un cercle homologique à l'une d'elles, et construisant les cinq points qui, par rapport à ce cercle, sont homologues ou projections des points donnés de l'autre courbe; car la question sera ramenée à celle de trouver les intersections du cercle et de la conique homologiques des courbes proposées; projetant ensuite ces intersections sur les courbes dont il s'agit, on aura évidemment les points demandés.

arêtes qui, avec celle déjà commune à ce cône et à l'autre, suffisent pour le déterminer complétement.

Ce qui précède offre donc une solution, aussi simple que possible, du problème où il s'agit de *trouver les axes principaux d'une surface du second ordre quelconque;* et l'on voit même comment, par des constructions analogues, on peut trouver les sections circulaires réelles de cette surface, lesquelles donnent, par l'intersection des deux diamètres conjugués à leurs plans respectifs, les quatre seuls ombilics qui peuvent exister en général sur cette surface, les huit autres étant nécessairement imaginaires en même temps que les plans des sections circulaires qui leur correspondent.

Je dis que les points ainsi déterminés seront des ombilics de la surface, car il est visible que, pour un tel point, il existera toujours (595) une sphère osculatrice pour laquelle les rayons de courbure seront tous égaux autour du point de contact commun, ce qui est le caractère principal des ombilics. Le cas des paraboloïdes est surtout remarquable en ce que, pour le paraboloïde elliptique, deux des ombilics de la surface sont nécessairement confondus en un seul avec le point à l'infini de cette surface, et que, dans le paraboloïde hyperbolique, tous les ombilics sont à la fois impossibles comme pour l'hyperboloïde à une nappe.

626. Il nous serait facile de montrer l'identité des résultats auxquels nous ont conduits, presque forcément, les principes qui font la base de ces recherches, avec ceux obtenus par M. Dupin, dans son *Mémoire sur les surfaces du second ordre* (*), pour la détermination des axes pricipaux de ces surfaces; car la méthode de ce géomètre consiste à abaisser, du centre de la surface proposée, des normales aux différentes courbes résultantes de deux systèmes quelconques de sections planes parallèles faites dans cette surface : la suite de toutes ces normales forme deux cônes distincts du second ordre, dont la pénétration mutuelle contient les axes principaux demandés. Or, en rapprochant ces conséquences de celles qui précèdent, au moyen du principe de l'article 492, il paraîtra évident que les mêmes cônes ont été obtenus de part et d'autre; seulement il nous semble que les constructions que nous avons mises en usage offrent quelques légers avantages sous le rapport de la simplicité et de la généralité, en ce qu'elles sont toujours applicables, et qu'elles donnent immédiatement, par des intersections de plans, autant d'arêtes que l'on veut de chaque cône.

(*) XIVe Cahier du *Journal de l'École Polytechnique*, p. 66 à 68.

627. On remarquera, au surplus, que la question qui nous a occupés dans ce qui précède (619) et les diverses constructions correspondantes reviennent exactement à trouver les diamètres conjugués parallèles de deux surfaces du second ordre (617), en remplaçant la sphère auxiliaire par une surface quelconque de cet ordre; or, quand ces surfaces sont concentriques, ce dernier problème revient lui-même à cet autre :

Étant donné l'un des sommets de cônes qui renferment la courbe d'intersection de deux surfaces quelconques du second ordre, ou, si on l'aime mieux, le plan polaire commun de ce sommet, déterminer directement les trois autres sommets semblables, à l'aide du premier.

Donc, les raisonnements établis sur le cas particulier demeurant applicables au cas général dont il s'agit, pourvu qu'on remplace le plan à l'infini par le plan polaire qui lui correspond, les constructions qui viennent de nous occuper pourront aussi servir à résoudre le problème énoncé en dernier lieu, en les généralisant de la manière convenable, d'après les nouvelles données.

628. Mais, si l'on ne connaissait aucun des sommets des cônes qui renferment la courbe de pénétration des deux surfaces, ni aucun des plans polaires qui correspondent à ces sommets, il faudrait nécessairement avoir recours à d'autres procédés et à d'autres principes plus généraux encore que ceux employés dans ce qui précède, principes qu'il est d'ailleurs aisé de deviner et de découvrir, d'après tout ce qui a déjà été dit sur la question analogue relative aux simples lignes du second ordre.

Enfin il ne nous serait pas difficile de nous élever, à l'aide des considérations qui font le sujet du présent paragraphe, à la théorie générale des *lignes de courbure* des surfaces du second degré. A cet effet, nous remarquerions, avec M. Dupin, comme chose en quelque sorte évidente d'après la définition de ces lignes, que deux surfaces quelconques ne peuvent s'entrecouper partout à angles droits ou être orthogonales sans que l'intersection qui en résulte soit à la fois une ligne de courbure de ces surfaces; nous prouverions ensuite, avec le même auteur, que, pour une surface donnée du second degré, on peut concevoir deux groupes distincts de surfaces du même ordre, orthogonales entre elles et à la première, et qu'il suffit que les sections diamétrales principales s'entrecoupent respectivement à angles droits, etc. Mais c'est dans les ouvrages mêmes de ce profond géomètre (*) qu'il faut

(*) *Développements de Géométrie*, IVe Mémoire; XIVe Cahier du *Journal de l'École Polytechnique*. (*Voir*, à l'*Errata* du présent volume, une Lettre de M. Ch. Dupin, datée de 1822.)

aller étudier les principes et les développements de ces belles vérités géométriques, présentées avec autant de simplicité que d'élégance; et je me hâte de terminer le sujet qui m'a occupé, peut-être trop longuement, dans ce qui précède, en présentant une dernière réflexion qui se rattache immédiatement au fond de cet ouvrage.

Il résulte en effet, des raisonnements et des constructions mis en usage dans les articles 619 et suivants, que l'on peut opérer sur les lignes du second ordre imaginaires, situées ou non à l'infini, au moyen des plans et des surfaces de cet ordre qui les contiennent et les définissent, comme on peut opérer sur les simples points imaginaires à l'aide des sections coniques et des droites qui renferment deux à deux ces points (342, 376, 389, etc.); car nous venons de montrer, en particulier, comment on peut déterminer les pôles, polaires et sécantes communes de semblables lignes données dans un même plan. Or il est évident que, de là, il serait facile de passer aux surfaces imaginaires du second ordre, et, par suite, aux notions qui concernent les lignes et les surfaces courbes géométriques d'un ordre quelconque, dont la description, purement graphique, a toujours pour éléments celle de quelques-unes des premières; mais il est sans doute fort inutile que je m'appesantisse davantage sur ces idées, dont les applications ne sauraient manquer au lecteur géomètre.

De la projection ou perspective-relief des surfaces du second ordre les unes dans les autres, et des propriétés générales qui en découlent.

629. Je reviens maintenant à l'objet que j'avais principalement en vue dans ce Supplément, c'est-à-dire à l'homologie ou perspective-relief des surfaces du second ordre, théorie d'où doit résulter nécessairement l'extension des propriétés des surfaces individuelles de cet ordre aux surfaces les plus générales qu'il concerne; car c'est un complément nécessaire de tout ce que j'avais à dire sur les propriétés projectives des figures, et de ce que j'ai déjà dit, en particulier, sur les lignes droites et les sections coniques.

Puisqu'une surface du second ordre quelconque a, en général, des sections circulaires, il en résulte qu'on peut tracer une infinité de sphères qui aient avec elle deux sections planes communes, réelles ou idéales; car si, par un cercle de la surface proposée, on mène une sphère quelconque, la surface de cette sphère aura (600) une nouvelle section plane, et par conséquent circulaire, commune avec cette surface, laquelle sera conjuguée à la

première sans lui être parallèle; donc cette sphère aura nécessairement (592) deux centres d'homologie conjugués avec la surface proposée; donc enfin :

La surface du second ordre peut, en général, être considérée comme la projection-relief d'une sphère, et doit, comme telle, jouir des mêmes propriétés projectives.

630. On devine toutes les conséquences de ce théorème; mais poursuivons.

Nous venons de voir que la sphère peut avoir, avec une surface du second ordre quelconque, deux sections communes circulaires et non parallèles; or chacun des plans de ces sections est parallèle (620) à l'un des axes principaux de la surface du second ordre, et par conséquent perpendiculaire au plan principal conjugué à cet axe; donc ce plan diamétral est un plan commun de symétrie des deux surfaces que l'on considère, et doit contenir leurs centres d'homologie ou sommets de surfaces coniques enveloppes communes. Il n'en est donc pas ici comme du cas des sections coniques, qui peuvent avoir tous les points de l'espace pour centres de projection circulaire; néanmoins, si l'on conçoit tant de surfaces du second ordre que l'on voudra, toutes s. et s. p., il sera encore facile de prouver qu'elles peuvent, en général, être considérées comme les homologiques ou perspectives-relief d'un égal nombre de sphères.

Remarquons d'abord que des surfaces du second ordre s. et s. p., et par conséquent des sphères situées à volonté dans l'espace, peuvent toujours être considérées comme ayant une section plane commune à l'infini, soit réelle, soit idéale; car, d'après les notions déjà établies pour les sections coniques et les cercles (89 et 90), toutes sections, faites à la fois dans les unes ou les autres de ces surfaces par un même plan arbitraire, étant nécessairement s. et s. p. entre elles, ont deux points, réels ou imaginaires, à l'infini dans ce plan, appartenant à tout leur système, et au plan qui contient les points à l'infini de l'espace.

Cela posé, puisque les surfaces du second ordre que l'on considère sont, deux à deux, s. et s. p., ou ont un centre de similitude, tous les axes et plans principaux de ces surfaces sont nécessairement parallèles entre eux, et il en est de même aussi des sections circulaires qui leur appartiennent; donc les plans principaux qui, d'après ce qui précède, contiennent tous les centres d'homologie ou de projection des différentes sphères ayant des sections planes communes avec les surfaces proposées, sont parallèles entre eux ou vont concourir en une droite, à l'infini, sur laquelle doit nécessairement

se trouver le centre d'homologie susceptible de projeter à la fois, suivant des sphères, toutes les surfaces du second ordre proposées. Or, je dis qu'il existe, en général (**111**) et notamment pour les ellipsoïdes, un tel point sur la droite dont il s'agit.

Concevons en effet, par le centre de l'une des surfaces proposées, les sections circulaires qui appartiennent à ce centre, et la sphère qui les renferme à la fois; cette sphère déterminera, sur le plan diamétral qui est perpendiculaire aux sections circulaires, un cercle concentrique à la section de ce plan diamétral, et qui aura avec elle, en général, deux systèmes de tangentes communes parallèles, appartenant aux deux cylindres du second ordre circonscrits à la fois à la surface proposée et à la sphère. Mais, par hypothèse, toutes les autres surfaces du second ordre sont s. et s. p. par rapport à celle-ci; donc tous les cylindres, analogues aux premiers, ont leurs arêtes respectivement parallèles, ou, en d'autres termes, ce sont des cônes circonscrits ayant mêmes sommets à l'infini, comme il s'agissait de le démontrer.

Maintenant concevons, pour chaque cylindre ou cône, l'infinité de sphères qui lui sont inscrites; il est évident (**587**) qu'elles auront toutes des sections planes communes avec la surface du second ordre correspondante; en sorte qu'il n'est aucune section circulaire de cette surface par laquelle on ne puisse concevoir passer une sphère inscrite au cône dont il s'agit. Donc, la même chose ayant lieu pour toutes les autres surfaces, et leurs sections circulaires étant parallèles, si l'on conçoit, dans l'espace, un plan quelconque parallèle à l'une de ces sections et les différentes sphères passant par les cercles qu'il détermine dans les surfaces proposées et qui sont inscrites aux cônes respectifs ci-dessus, chacune de ces sphères pourra être considérée comme l'homologique ou la projection relief d'une surface du second ordre correspondante, par rapport au sommet commun, à l'infini, à tous les cônes, pris pour centre d'homologie ou de projection, et au plan commun de section circulaire, pris pour plan de concours ou d'homologie.

Mais ce n'est pas tout, il faut encore prouver (**582** et **583**) que, dans ces différents systèmes de projection, qui ont même centre et même plan d'homologie, un même point, appartenant au système général des sphères, a pour homologue le même point appartenant au système général des surfaces qu'elles représentent; or c'est ce qu'il est très-facile de prouver à l'aide du principe de continuité, puisque les sphères peuvent être considérées, selon la remarque déjà faite au commencement de cet article, comme ayant une infinité de points imaginaires communs à l'infini, tous distribués sur un même plan, et par conséquent sur un même cercle imaginaire, et que l'un

quelconque de ces points répond nécessairement à un point homologue unique, également commun à toutes les surfaces du second ordre.

On arriverait d'ailleurs au même but, en observant que deux sphères quelconques, et les surfaces qu'elles représentent, sont nécessairement dans le cas du théorème, puisque ces sphères ont des points communs, à distance donnée, qui peuvent être réels dans certaines positions générales des surfaces correspondantes; car, la même chose ayant lieu pour une de ces sphères combinée successivement avec chacune de toutes les autres, la proposition ci-dessus en résulte nécessairement.

Enfin, si les surfaces proposées étaient en outre concentriques, c'est-à-dire (591) si elles avaient à l'infini un plan de contact commun, réel ou idéal, il en serait de même évidemment des sphères qui les représentent; concluons donc ce théorème :

Le système d'un nombre quelconque de surfaces du second ordre s. et s. p. *dans l'espace, c'est-à-dire ayant un plan de section commune à l'infini, peut, en général, être considéré, de deux manières différentes* (587), *comme la projection relief d'un égal nombre de sphères ayant, de même, une section plane idéale commune à l'infini; de plus, quand le plan de section à l'infini de l'un de ces systèmes devient un plan de contact, il en arrive autant pour l'autre système, et les surfaces respectives dont ils se composent sont concentriques.*

631. N'oublions pas que, dans le dernier des cas dont il s'agit, comme dans le cas général, le centre de projection est nécessairement à l'infini; en sorte que la projection cesse proprement d'être ce qu'on nomme centrale, et se fait par des systèmes de parallèles, ce qui n'empêche nullement d'ailleurs que les deux figures ne jouissent encore des mêmes propriétés projectives.

Au surplus, M. Chasles a déjà remarqué (*), à l'aide de considérations déduites du calcul, qu'on pouvait étendre, aux ellipsoïdes s. et s. p., certaines propriétés qui appartiennent aux sphères; et, pour y parvenir, il suppose que l'on fasse croître ou décroître, dans un certain rapport, les ordonnées abaissées, des différents points d'une surface du second degré, sur les plans principaux de cette surface. M. Dupin, avant lui, avait employé un mode analogue de transformation pour arriver aux beaux théorèmes sur la courbure des surfaces du second ordre qui font la base de ses *Développements de Géométrie* (**), et il s'en était servi également pour établir quelques autres

(*) *Correspondance Polytechnique*, t. III, p. 326 et 341.
(**) Section I, Ier Mémoire.

propriétés de ces surfaces, dans son Mémoire inséré au XIV[e] Cahier du *Journal de l'École Polytechnique*. Ce qui précède nous semble plus général, outre que cela laisse apercevoir tout de suite (578 et suivants) quelle espèce de dépendances graphiques conservent entre elles la figure primitive et sa dérivée.

Je crois d'ailleurs inutile d'examiner le cas général des figures quelconques dont le centre d'homologie ou de projection est à l'infini; et je me dispenserai pareillement de montrer comment, des considérations relatives à ce cas, découle immédiatement tout ce qui appartient au mode de transformation dont il vient d'être parlé, ainsi qu'à quelques autres, souvent employés dans les arts, et dont M. Dupin s'est également servi avec avantage aux endroits déjà cités; ce que je pourrais dire à ce sujet ne serait qu'une application ou une extension facile de la théorie des figures homologiques en général, et de ce qui a été exposé, art. 326 et suivants, pour le cas particulier des figures homologiques décrites sur un plan.

632. Quant aux relations purement métriques concernant les figures homologiques dont le centre de projection est à l'infini, il est certain que, si elles satisfont aux diverses conditions établies au commencement de cet ouvrage, notamment aux articles 11, 20 et 47, elles auront lieu en même temps pour la figure primitive et pour sa dérivée; mais ces relations ne sont pas les seules qui subsistent, dans le cas actuel, entre les deux figures; il en est un grand nombre d'autres particulières qui, pour la plupart, sont faciles à découvrir au moyen des principes posés art. 47. Ainsi, par exemple, on voit que les distances homologues seront divisées en parties respectivement proportionnelles par les points homologues; les distances parallèles de l'une des figures resteront parallèles entre elles dans l'autre et proportionnelles aux premières, et les mêmes choses auront encore lieu pour les aires de la figure primitive qui seront contenues dans un seul plan ou dans des plans parallèles; c'est-à-dire que les aires de la nouvelle figure seront elles-mêmes dans un seul plan ou dans des plans parallèles, et qu'elles seront de plus proportionnelles aux premières. Or, de cette correspondance entre les figures que l'on considère, découlent plusieurs corollaires remarquables : ainsi l'on voit que les centres, les axes, les plans de symétrie, enfin les centres de gravité des lignes, des aires, des volumes homologues seront homologues, ou placés sur les mêmes droites et les mêmes plans projetants, etc.

Les relations entre les volumes homologues sont encore plus simples que

celles entre les aires. A cet effet, on remarquera que le plan de concours de deux figures homologiques, dont le centre est à l'infini, divise (326) en parties proportionnelles les projetantes ou distances parallèles comprises entre les différents points homologues; or, si l'on considère le prisme triangulaire formé par trois quelconques de ces projetantes et par les triangles homologues qui les terminent sur chaque figure, on verra sans peine que le plan d'homologie partagera de même ce prisme et tous ses semblables en deux autres, dont les volumes seront entre eux dans un rapport constant, égal à celui des ordonnées ou segments formés sur chaque arête à partir du plan dont il s'agit : en effet, d'après les éléments, « tout prisme triangulaire, » terminé par des bases quelconques, a pour mesure le produit de la sur- » face de sa section perpendiculaire aux arêtes par le tiers de la somme de » ces arêtes. » Donc il en sera généralement ainsi de tout prisme projetant terminé par des faces planes ou courbes, homologues des deux figures; et partant *les volumes homologues quelconques seront encore entre eux dans ce même rapport*.

En appliquant ces diverses considérations aux figures qui nous ont occupés art. 630, on en déduira, comme on voit, une infinité de théorèmes relatifs aux surfaces du second ordre en particulier, dont un grand nombre ont été énoncées sans démonstration, par M. Dupin, dans les Notes IV et V du Mémoire inséré au XIVe Cahier du *Journal de l'École Polytechnique*, et qui, pour la plupart, ont été reproduits depuis, par M. Chasles, dans le IIIe volume de la *Correspondance* sur la même École. Nous regrettons que l'espace nous manque pour entrer dans quelques développements sur ce sujet aussi utile qu'intéressant, et nous nous contenterons, pour terminer, de dire quelques mots sur la cubature des volumes ou portions de volumes des surfaces du second degré.

En considérant, en effet, que le parallélipipède rectangle, construit sur les trois axes principaux d'un ellipsoïde quelconque, a pour homologue un cube circonscrit à la sphère homologique de cette surface, on en conclura que les volumes homologues quelconques appartenant à ces surfaces respectives sont entre eux comme le produit des trois demi-axes de la première au cube du rayon de la seconde, ou, à cause que le moyen axe égale (630) le diamètre de la sphère, comme le rectangle des demi-axes extrêmes est au carré du rayon dont il s'agit : ainsi, par exemple, le volume d'un ellipsoïde quelconque égale $\frac{4}{3}\pi abc$, a, b, c étant les demi-axes principaux, etc., etc.

633. Nous venons de prouver (630) que les propriétés projectives des surfaces du second ordre s. et s. p. sont les mêmes que celles qui appar-

tiennent en général à un système de sphères quelconques; or il est à remarquer qu'il n'est pareillement aucune des propriétés nombreuses des cercles, établies Section II, Chapitre III, qui ne puisse s'étendre, d'une manière analogue, aux sphères et par suite aux surfaces du second ordre s. et s. p. On en sera parfaitement convaincu, si l'on réfléchit que les propriétés des systèmes de sphères doivent dériver uniquement, ainsi que cela a lieu (285) pour le cas particulier des cercles, de celles qui appartiennent à leurs centres de similitude ou d'homologie; car ces dernières sont exactement semblables (593) pour le plan et pour l'espace.

Plusieurs de ces propriétés des sphères étant déjà connues des géomètres, nous renverrons aux ouvrages mêmes où elles sont exposées (*), en nous contentant, pour les autres, de montrer, par quelques exemples, comment peut avoir lieu l'extension dont il vient d'être parlé; le peu que nous en dirons, joint aux considérations générales exposées pour le cas particulier des cercles, suffira pour mettre le lecteur sur la voie des démonstrations.

Considérons donc quatre sphères (C), (C'), (C''), (C''') situées arbitrairement dans l'espace, dont les centres de similitude, au nombre de douze, étant distribués, deux par deux, sur les six arêtes du tétraèdre qui a pour sommets les centres de ces sphères, et divisant ces arêtes en segments harmoniques, auront entre eux les relations indiquées dans la note de l'article 162, comme cela a déjà été exposé par les géomètres qui viennent d'être cités (**). Ainsi ces douze centres de similitude seront situés, trois par trois, sur une même droite, et six par six sur un même plan, ce qui fait, en tout, seize *axes* (269) et huit *plans de similitude* renfermant, quatre à quatre, ces seize axes, et s'entrecoupant par conséquent suivant chacun d'eux.

Cela posé, si l'on a choisi arbitrairement un plan de similitude, et dans

(*) *Voyez* plus particulièrement, à ce sujet, la *Notice* publiée, par M. Dupin, à la page 420 du tome II de la *Correspondance Polytechnique*, et les Mémoires de MM. Gergonne et Gaultier, déjà cités art. 271, Section II. Enfin, pour la manière dont ces propriétés des sphères doivent s'étendre aux surfaces du second degré s. et s. p., consultez le Mémoire de M. Chasles, dont il a été fait mention art. 631.

(**) *Voyez* aussi une démonstration, par les principes de la *Théorie des transversales*, dans l'*Essai* sur cette Théorie, par M. Carnot. On connaît d'ailleurs l'élégante démonstration que Monge a, le premier, donnée de ce théorème; elle est fondée sur la considération du plan tangent commun aux cônes enveloppes des sphères, et repose ainsi, pour certains cas, sur l'admission de la continuité; on pourrait aisément lui en substituer d'autres exemptes de ce reproche, si toutefois on peut le croire fondé, ce que nous ne pensons pas; et ces démonstrations, simples et générales comme celles de Monge, auraient l'avantage de s'étendre à des figures quelconques ayant, deux à deux, un centre de similitude ou d'homologie.

ce plan les quatre centres de similitude provenant des sphères prises dans un ordre quelconque de succession, tel que (C), (C'), (C''), (C'''), sans que cependant une même sphère se trouve trois fois employée, ces quatre points appartiendront aux sommets de l'un des trois quadrilatères simples formés par la mutuelle intersection des axes de similitude renfermés dans le plan dont il s'agit. Or, si l'on prend, à volonté, un point quelconque sur la surface (C) de l'une de ces sphères, puis l'homologue inverse (242) de celui-ci sur la sphère (C'), puis le point inversement homologue à ce dernier sur (C''), et ainsi de suite, il pourra arriver que le cinquième point, obtenu de cette manière sur la sphère (C), se confonde avec le point de départ. Cela étant, les sommets du quadrilatère gauche, ainsi tracé, seront les points de contact de l'une des sphères tangentes à la fois aux proposées.

Dans le cas contraire, en traçant la droite indéfinie qui renferme le premier et le dernier points trouvés sur la sphère (C), cette droite ira percer le plan de similitude en un point qui demeurera invariablement le même, quel que soit le point de départ, et sera tel, que son plan polaire (589), par rapport à (C), renfermera le point de contact de cette sphère avec l'une de celles qui la touchent en même temps que les trois autres, et dont le contact est relatif au plan de similitude dont il s'agit.

634. Si, au lieu de s'arrêter ainsi au cinquième point trouvé, on continuait indéfiniment, et toujours dans le même ordre, à rechercher les points consécutivement homologues du premier, la suite de tous ces points appartiendrait à une même cinquième sphère, en général variable avec le point de départ, et qui aurait le plan de similitude correspondant pour plan de section commune, réelle ou idéale, avec toutes ses semblables, parmi lesquelles se trouvent nécessairement deux des sphères tangentes à la fois aux proposées. La cinquième sphère variable dont il s'agit ira donc déterminer, sur chacune de celles-ci, un cercle renfermant tous les points homologues relatifs à cette dernière, et dont le plan rencontrera celui de similitude en une droite invariable en même temps que le point de départ; de telle sorte qu'en menant, par cette droite, deux plans tangents à celle des sphères proposées qui lui correspond, pour obtenir la *sécante de contact* ou, plus généralement (590), la *polaire réciproque* de la première par rapport à cette sphère, polaire toujours constructible d'après les propriétés qui lui appartiennent, cette polaire ira déterminer, sur cette même sphère, deux points qui seront les points de contact de deux des sphères à la fois tangentes aux proposées.

Enfin les quatre polaires ou cordes de contact dont il vient d'être parlé, et qui renferment évidemment les pôles respectifs du plan de similitude, se rencontreront au point de concours unique des six plans de section commune, réelle ou idéale, des quatre sphères proposées, prises deux à deux. Ce point unique, que M. Gaultier nomme le *centre radical* des sphères, est donc tel aussi que, si l'on détermine les quatre plans polaires relatifs à ce point et à ces sphères, ces plans passeront réciproquement par les quatre droites invariables ci-dessus, placées sur le plan de similitude que l'on considère en particulier; et, comme ce point doit jouer absolument le même rôle par rapport à tous les plans pareils, on voit que les plans polaires dont il s'agit vont déterminer trente-deux droites sur les huit plans de similitude, dont les polaires réciproques, par rapport aux sphères respectives, appartiendront, quatre à quatre, aux points de contact des seize sphères tangentes à la fois aux proposées (*).

635. Quatre points, consécutivement homologues inverses par rapport aux quatre sphères (C), (C'), (C''), (C'''), suffisant pour déterminer entièrement la cinquième sphère variable dont il a été parlé plus haut, et par conséquent pour construire, sur le plan de similitude correspondant, les droites fixes qui lui appartiennent ainsi qu'à toutes ses semblables, il en résulte qu'on pourra ne construire que ces quatre points, si l'on veut faire usage directement de la cinquième sphère qui les renferme; autrement il faudra construire douze points consécutivement homologues par rapport aux proposées, lesquels seront situés, trois par trois, sur ces sphères, etc.

Ces diverses constructions ont, comme on voit, la plus grande analogie avec celles que nous avons exposées à l'occasion des cercles, et elles dispensent de recourir directement aux plans de section commune des sphères: on pourrait pareillement éviter l'usage des plans de similitude (284); mais je pense en avoir dit assez pour montrer l'esprit de ces recherches, et mettre le lecteur à même de trouver les diverses autres propositions relatives aux sphères dans l'espace, et qui ne sont que des extensions faciles de celles qui concernent le cas particulier des cercles décrits sur un plan. Je ferai cepen-

(*) On comparera aisément ces diverses constructions avec celles obtenues par les géomètres déjà cités, art. 633, et il sera facile de reconnaître ce qu'elles peuvent avoir de commun.

Il est à remarquer d'ailleurs que, jusqu'à ces derniers temps, il n'existait que des solutions purement géométriques du problème de la sphère tangente à quatre autres, et que c'est à MM. Poisson, Français, Gergonne et J. Binet que l'on doit les premières solutions algébriques satisfaisantes de ce problème.

dant encore une remarque, en terminant ici à regret ce sujet intéressant, c'est qu'en appliquant, aux propositions dont il s'agit, les conséquences qui résultent du principe de continuité, de la même manière que nous l'avons déjà fait (287) dans le cas précité des cercles, on arrive, directement et très-simplement, à plusieurs propriétés des figures inscrites et circonscrites à la sphère, et par conséquent (629) aux surfaces du second ordre en général, qui me semblent mériter l'attention des géomètres, et par leur généralité et par les conséquences qu'on en peut tirer. Je me propose de revenir, par la suite, sur ce sujet entièrement neuf, si j'en ai le loisir et si l'on juge qu'après tout ce qui a déjà été dit pour le cas particulier du cercle, la chose puisse encore valoir la peine d'être développée.

636. D'après ce qui précède (630), toutes les propriétés des sphères qui viennent de nous occuper subsistent, de la même manière, pour les surfaces du second ordre s. et s. p., lesquelles, d'après nos principes, ont comme elles une section plane commune à l'infini ; or je dis qu'à leur tour les propriétés projectives des systèmes de surfaces du second ordre s. et s. p. s'appliquent aux systèmes de surfaces quelconques de cet ordre, pourvu seulement que celles-ci aient, comme les premières, une section plane commune, réelle ou idéale. Tout consiste, en effet, à prouver que l'un de ces systèmes peut être considéré comme la projection ou perspective-relief de l'autre, c'est-à-dire comme l'homologique de cet autre.

Considérons donc le système d'un nombre quelconque de surfaces du second ordre ayant une section plane commune ; prenons, pour centre de projection ou d'homologie, un point quelconque de l'espace, et, pour plan d'homologie, un plan parallèle à celui qui contient la section commune dont il s'agit ; prenons enfin un point, à l'infini, pour représenter un point quelconque du plan de cette section ; ces deux derniers points appartiendront par conséquent au même rayon d'homologie. Cela posé, au moyen de ce couple de points et du plan d'homologie, on pourra construire (582 et 583), dans toutes ses parties, la figure homologique de la proposée, laquelle sera composée, comme elle, de surfaces du second ordre ayant nécessairement une section plane commune : or je dis que le plan de cette section sera à l'infini, et que les surfaces correspondantes seront par conséquent s. et s. p. En effet, le plan de cette section devra concourir, avec son homologue, sur le plan d'homologie ; mais, par hypothèse, ces derniers plans sont parallèles entre eux ; donc le plan de section commune des nouvelles surfaces leur sera aussi parallèle, ou aura une droite, à l'infini, commune avec ces plans ; d'un autre

côté, il doit aussi passer par un point quelconque à l'infini; donc enfin il est lui-même situé tout entier à l'infini.

Si les surfaces du second ordre proposées, au lieu d'avoir simplement une section plane commune, avaient un contact, réel ou idéal, suivant cette section, il est évident (590) que leurs homologiques seraient à la fois concentriques, s. et s. p. Donc on peut énoncer ce théorème général :

Le système d'un nombre quelconque de surfaces du second ordre, ayant une section plane commune, réelle ou idéale, peut toujours être considéré comme la projection d'un égal nombre de surfaces de cet ordre s. et s. p., *qui deviennent concentriques quand les proposées se touchent suivant la section qui leur est commune, c'est-à-dire* (104) *qu'elles sont alors asymptotiques.*

637. Nous avons démontré (630) que les propriétés projectives des surfaces du second ordre s. et s. p., ayant ou non un centre commun de symétrie, sont les mêmes que celles des sphères quelconques concentriques ou non concentriques; donc il en est encore ainsi des propriétés des surfaces du second ordre qui ont une section plane commune, soit de contact, soit quelconque, et qui s'enveloppent ou se coupent suivant la courbe, réelle ou imaginaire, appartenant à cette section.

Au surplus, de la même manière que nous sommes déjà parvenus (587) aux propriétés projectives du système de deux surfaces du second ordre quelconques qui ont un sommet de cône enveloppe commun, sans recourir à celles des figures s. et s. p. dans l'espace, pareillement aussi l'on peut établir directement les propriétés générales de situation d'un nombre quelconque de surfaces du second ordre s. et s. p., ou ayant, plus généralement, une section plane commune, sans s'appuyer, en aucune manière, sur celles qui ont été démontrées pour les sphères en particulier. Car, ces surfaces jouissant des mêmes propriétés projectives à l'égard de leurs centres et plans d'homologie individuels, on voit que les mêmes raisonnements sont également applicables à tous les cas.

CONCLUSION.

638. Je crois avoir donné, dans ce Supplément, une idée de la manière dont les propriétés et les notions, relatives aux figures situées dans un plan, peuvent s'étendre, en général, à celles qui appartiennent à la fois aux trois dimensions. On pourrait multiplier presque indéfiniment le nombre des applications particulières, et faire voir qu'il n'est, pour l'espace comme pour le plan lui-même, presque aucune des propriétés générales, découvertes par

les géomètres, qui n'ait sa source, soit dans la loi de continuité, soit dans quelqu'un des principes de la doctrine des projections ou des figures homologiques, étendue ainsi que nous venons de le faire en dernier lieu: et comme, en vertu de la loi dont il s'agit, les propriétés générales des figures demeurent immédiatement applicables à tous les états particuliers du système, peut-être aussi sera-t-on en droit de conclure que les recherches qui font le sujet de ce travail embrassent implicitement, dans leur objet, à peu près toutes les propriétés générales et particulières des lignes et des surfaces du second ordre indéfinies, combinées soit entre elles, soit avec les lignes droites et les surfaces planes.

C'est surtout pour les figures dans l'espace que le principe de continuité est, pour ainsi dire, indispensable : c'est aussi là, comme on vient de le voir, qu'il présente les applications les plus intéressantes et les plus multipliées. En effet, à l'aide de ce principe seul, et sans nous appuyer sur aucune description, ni aucune définition particulière des surfaces du second ordre, autre que celle qui exige qu'une droite arbitraire ne puisse les rencontrer en plus de deux points, nous venons d'établir les propriétés les plus générales de ces surfaces, celles qui, par leur nature compliquée, semblent plus spécialement rentrer dans le domaine de l'Analyse algébrique.

On peut croire d'ailleurs qu'après tous les exemples particuliers répandus dans le cours de cet ouvrage, on ne saurait éprouver aucune sorte de difficultés à appliquer les notions qui résultent de ce principe aux différents cas qui peuvent se présenter. Ainsi une ligne ou une surface du second ordre pourra perdre successivement une, deux, trois de ses dimensions, ou cesser tout à fait d'exister; c'est-à-dire que, dans ce dernier cas, elle deviendra imaginaire, et que, dans les autres, elle se réduira à un point, à un cône, à des portions de droites (437) et de plans, finies ou infinies, à des systèmes de deux droites ou de deux plans, soit que l'une de ces droites, ou l'un de ces plans, se confonde entièrement avec l'autre, soit qu'au contraire il s'en trouve à une distance infinie. Tout consistera, dans chaque cas, à examiner quelles sont les propriétés que peuvent encore conserver ces objets, soit individuellement, soit à l'égard des autres objets de la figure, et quelle espèce de modification particulière ont dû subir les propriétés de la figure générale et primitive à laquelle il faut nécessairement et toujours se reporter si l'on ne veut pas courir le risque de se jeter dans des conséquences, ou tout à fait absurdes, ou tout au moins paradoxales.

Pour y parvenir, il faudra, les propriétés de la figure primitive étant bien connues, il faudra, dis-je, supposer, ainsi que nous l'avons indiqué dès le

commencement de cet ouvrage, que cette figure varie par degrés insensibles, ou d'une manière continue, sans rien changer aux lois ou à la relation générale qui lie entre elles les diverses parties de cette figure. Ainsi une surface du second ordre, qui se sera évanouie, ne devra pas être considérée simplement comme un point mathématique et absolu; il faudra lui attribuer mentalement des dimensions distinctes comme à la surface primitive; mais ces dimensions, comparables entre elles, seront censées infiniment petites ou nulles relativement aux grandeurs finies; en un mot, le rapport de ces dimensions restera exactement le même que dans une surface ellipsoïde donnée, prise pour objet de comparaison; c'est-à-dire que la surface infiniment petite sera, en tout, s. et s. p. à l'égard de celle-ci; elle aura mêmes rapports, mêmes directions de diamètres conjugués, etc.

Pareillement encore une surface du second ordre, qui se sera changée en une surface de cône par suite des modifications survenues au système, n'aura pas cessé de conserver un centre, des diamètres, des axes, etc.; le nombre de ses sections diamétrales, de ses plans tangents, etc., ne devra pas être borné simplement à celui des plans qui rencontrent ou touchent réellement ce cône suivant des arêtes; on devra le considérer idéalement comme un hyperboloïde à une ou deux nappes dont les diamètres, sauf ceux qui appartiennent à la surface même du cône asymptote, seront devenus infiniment petits sans que leurs rapports de grandeur et de direction aient cessé d'exister. Enfin on devra envisager toute ligne ou toute surface, menée par le sommet du cône limite que l'on considère, comme étant tangente en ce sommet, et comme déterminant une section infiniment petite dans sa surface, etc., etc. (*).

Toutes ces choses se sentent encore mieux qu'on ne peut les rendre par le discours, et s'expliquent toujours d'une manière claire et satisfaisante sur

---

(*) *C'est ainsi*, dit M. Vallée (*Traité de la Géométrie descriptive*, p. 316, art. 786), après avoir présenté sur le cône des réflexions analogues à celles qui précèdent, *c'est ainsi que les cas particuliers retiennent toujours, par des propriétés singulières, une sorte d'empreinte de celles qui appartiennent aux cas généraux*. On sentira aisément ce que ces idées ont de commun avec celles que renferme la note de l'article 184 de la IIe Section, relativement aux simples sections coniques; et, en les rapprochant de la remarque faite vers la fin de l'article 55, généralisée convenablement pour les surfaces, on verra qu'il doit régner la plus grande analogie entre le cas pour lequel une ligne ou surface du second ordre se réduit à un point, et celui où elle se change simplement en un système de deux droites ou en un cône; de plus, on aura sur-le-champ l'ensemble des propriétés qui appartiennent à la fois à une telle ligne, ou à une telle surface, et au système de ses asymptotes, ou à son cône asymptotique, en considérant que ceux-ci ont respectivement une sécante ou une section plane de contact, commune, à l'infini, avec cette ligne ou cette surface.

chaque exemple particulier; après quelque exercice, il ne sera jamais possible de se tromper, car la loi de continuité, entendue comme il convient, et bornée, dans ses applications, à tout ce qui est essentiellement continu de sa nature, ou dont la génération peut être conçue s'opérer par une loi toujours la même, et il en est ainsi des êtres géométriques lorsqu'on les considère dans leur cours indéfini; la loi de continuité, disons-nous, n'est point une simple analogie, une simple hypothèse, ni même une induction quelque forte qu'on veuille bien la supposer; elle est une conséquence rigoureuse, immédiate, et de la nature des objets que la Géométrie considère, et de la manière dont il nous est possible de concevoir les lois générales de la grandeur abstraite et figurée. La loi de continuité est constatée d'ailleurs par toutes les découvertes des modernes dans la science de l'étendue: on lui doit le calcul infinitésimal qui, cherchant dans l'infiniment petit la génération de toutes les grandeurs finies, s'applique, avec une merveilleuse facilité, à tout ce qui ressort du domaine des sciences physiques et mathématiques. Enfin c'est à elle que l'on doit les plus belles recherches géométriques de Monge, celle des Malus, des Meusnier, des Dupuis, des Lancret, des Dupin et d'une foule d'autres disciples de cet illustre professeur.

FIN DU SUPPLÉMENT.

ANNOTATIONS (*)

DE LA

SECONDE ÉDITION DU TRAITÉ DES PROPRIÉTÉS PROJECTIVES DES FIGURES.

Pages XXVIII *de l'Introduction et* 91 *du texte.* — SUR DESARGUES ET PASCAL.

Au commencement de ce siècle et vers la fin du précédent, les écrits de Desargues paraissaient entièrement oubliés des géomètres, lorsque Brianchon, dans son élégant *Mémoire sur les lignes du second ordre*, rappela en peu de mots les écrits de Pascal et du graveur Bosse, disciple de Desargues, écrits où il était question du livre perdu de ce dernier géomètre sur les *Sections coniques*. En partant de ces simples indications, j'ai pu retrouver, en 1822, sinon cet ouvrage, dont on possède aujourd'hui seulement une copie de la main de Ph. de Lahire, commentée et annotée avec soin par M. Poudra, du moins quelques fragments épars mentionnés dans le *Traité des Propriétés projectives des figures*, et qui ont dû fournir d'utiles renseignements pour des écrits historiques postérieurs. Car je n'aurais pas osé affirmer, comme je l'ai fait, que Desargues, l'ami de Descartes et de Pascal, méritât l'épithète de *Monge* de son siècle, si je n'avais, au préalable, soigneusement compulsé les écrits des contemporains de ce grand géomètre: Descartes, Pascal, Mersenne, Leibnitz, Beaugrand, Curabelle, Bosse et autres, dont je conserve encore les extraits manuscrits, et qui, depuis, ont été aussi consultés par mes successeurs.

Quant aux témoignages contradictoires de Clerselier, Périer, Baillet, Bayle, etc., rapportés dans une Notice historique fort étendue et pleine d'érudition, sur l'origine de l'ancienne Académie des Sciences de Paris (*voyez* les *Comptes rendus* de notre Académie, t. LIV, séance du 31 mars 1862), je ne puis pas admettre la valeur que son savant auteur semble leur accorder, et je crois ces témoignages plutôt propres à jeter du doute et de la confusion sur les droits respectifs de Desargues et de Pascal à notre admiration scientifique, qu'à agrandir et fortifier l'illustration du premier; car je n'avais pas négligé d'en appuyer les titres de preuves multipliées, comme pourraient le faire croire les courtes citations contenues dans la Notice que je viens de citer, l'auteur s'étant contenté d'extraire 4 lignes de la p. XL de l'Introduction du *Traité des Propriétés projectives*, sans recourir au texte même de ce Traité, et en les faisant suivre immédiatement de diverses autres citations d'écrits étrangers, antérieurs ou postérieurs, qui n'ajoutent rien d'essentiel aux miennes propres, sauf sur un seul point tiré de l'*Examen des œuvres du sieur Desargues*, par Curabelle (1644). Dans cette diatribe aussi passionnée que diffuse, dirigée contre la Perspective de Desargues, se trouve répétée, d'après le graveur Bosse, une phrase relative à la *grande proposition nommée la Pascale par Desargues;* phrase rapportée tout au long par l'auteur de la Notice précitée, qui ne s'est pas aperçu qu'elle condamnait positivement son opinion sur les mérites respectifs de Desargues et de Pascal, tirée de la correspondance de 1639 entre le P. Mersenne et notre grand Descartes, fort dédaigneux d'ailleurs, en sa qualité d'algébriste, de tout ce qui se rattachait à la Géométrie des Anciens. Des-

(*) Le mot ERRATA, conforme aux renvois abréviatifs du texte, a été supprimé de ce titre, parce qu'il aurait pu être mal interprété par beaucoup de lecteurs, et qu'il ne s'agissait point de simples erreurs ou négligences typographiques, trop souvent et fort injustement mises sur le compte des compositeurs et correcteurs, mais qui ne sauraient être imputées à l'imprimerie modèle de M. Gauthier-Villars; il s'agissait là en effet de fautes réelles ou apparentes, d'oublis et omissions volontaires ou non, sur lesquels il était important, au point de vue scientifique ou historique, d'appeler l'attention du lecteur. Or ce but ne pouvait être rempli par des corrections apportées au texte même de la première édition.

cartes, évidemment, n'avait pris connaissance que des premiers écrits du jeune Pascal, et non de son *Traité* manuscrit *sur les Coniques*, analysé soigneusement en 1676 par le grand Leibnitz, et où se trouve mentionnée, très-explicitement, la proposition de l'*hexagrammum mysticum*, que Descartes et le P. Mersenne semblaient ignorer ou ne pas comprendre, et qui n'est nullement une déduction évidente des œuvres d'Apollonius et de Pappus, pas même du livre aujourd'hui bien connu de Desargues.

Quoi qu'il en soit, la sentence hâtive appliquée par Descartes aux écrits géométriques de Pascal, faussement interprétée par d'ignorants détracteurs, a détourné les héritiers de ce grand homme d'en entreprendre la publication, malgré l'avis motivé et très-pressant de Leibnitz; omission bien regrettable pour les amis de la science et de la vérité historique.

En se bornant, comme l'ont fait l'auteur de la Notice et d'autres avant lui, à lire l'Introduction beaucoup trop rapide du *Traité des Propriétés projectives*, où des esprits impatients et distraits auraient voulu trouver la citation de tout ce que renferme de neuf un livre in-4° de près de 500 pages, dans lequel je me suis, à tort peut-être, presque toujours effacé; en m'adressant à cette occasion des reproches plus ou moins détournés, on a été d'autant plus injuste à mon égard, que j'avais, à tout propos, amplement cité les ingénieuses découvertes de Desargues, relatives aux *involutions de quatre, cinq ou six points*; découvertes dont cet esprit fécond, comme le témoignent ses propres paroles rapportées par Bosse, n'avait pas tiré toutes les conséquences géométriques que des personnes mal éclairées ou inattentives lui supposent encore aujourd'hui, et que je me plaisais moi-même à lui attribuer, à une époque où je ne connaissais pas le principal titre de Desargues à l'estime de la postérité. En effet, dans cet écrit de 1639, qui nous a été transmis par de Lahire, on ne rencontre rien sur l'hexagone inscrit au système de deux droites ou à une conique, ni rien qui concerne les courbes géométriques en général, comparées à des systèmes de droites concourant ou non à l'infini avec les branches de ces courbes; enfin, il ne renferme qu'un mot relatif au concours unique d'un faisceau de droites parallèles, quoiqu'on puisse bien admettre que Desargues ait eu, par la perspective, l'intuition plus ou moins nette du concours des faisceaux ou systèmes distincts de parallèles (horizontales) sur une ligne droite contenant les points à l'infini de l'espace qui y correspondent. Si j'ai eu tort en 1822 de trop généraliser mes éloges, j'en demande pardon aux lecteurs géomètres; mais ceux qui m'ont tout récemment suivi dans cette voie, bien qu'ayant en main des moyens plus complets de connaître l'exacte vérité, me semblent passibles de plus graves reproches encore.

Qu'on me permette à propos de ces réflexions critiques qui portent sur des personnes que j'aime et estime de longue date, de rappeler, après tant d'autres, les paroles si connues du grand orateur romain : *Amicus Plato, sed magis amica veritas.*

Page 34, ligne 9ᵉ. — Sur la Géométrie descriptive et analytique à l'École de Monge.

Au sujet de l'épure de Géométrie descriptive qui concerne l'intersection des surfaces de révolution dont les axes se rencontrent, j'ai avancé inconsidérément que, dans le cas de deux ellipsoïdes, la projection de la courbe d'intersection sur le plan commun des axes *s'étend à l'infini*, et que c'est une *hyperbole* lorsque ces axes servent d'axes principaux aux ellipses méridiennes; mais c'est là une erreur, un *lapsus currente calamo*, qu'il était facile de corriger dans la présente édition, en remplaçant cette affirmation, trop absolue, par l'indication d'une simple possibilité, et le mot *infini* par celui d'*indéfini*. Si je n'ai pas apporté à l'ancien texte ces faciles corrections, c'est parce que M. de la Gournerie, le savant successeur, pour l'enseignement de la Géométrie descriptive, de feu Leroy à l'École Polytechnique et d'Olivier au Conservatoire des Arts et Métiers, dans une Note manuscrite qu'il avait eu l'obligeance de me transmettre dès 1860, me signalait cette confusion d'idées, en s'appuyant d'une discussion analytique approfondie dont les résultats essentiels

sont reproduits dans une autre note insérée au bas de la p. 101 de son *Traité* in-4° *de Géométrie descriptive* (I[re] partie, 1860) (*).

Convaincu de l'importance que l'auteur y attachait, non sans raison, pour l'enseignement de la Géométrie descriptive, j'ai préféré n'apporter aucune correction au texte du présent Traité, afin d'appeler encore mieux l'attention du lecteur sur les rectifications de M. de la Gournerie, résumées en ces termes :

« 1° La courbe des points I ne s'étend pas toujours à l'infini ;

» 2° Cette courbe n'est pas nécessairement une hyperbole. »

Pour se convaincre de leur rigoureuse exactitude, avec ou sans calcul algébrique, il suffirait en effet de considérer quelques cas très-simples, tels que celui où les axes des ellipses méridiennes servant d'axes respectifs de révolution, se rencontrent à angle droit ou sont parallèles ; cas dont le second offre cela de remarquable dans l'hypothèse de deux courbes méridiennes quelconques, que les constructions par la sphère et les cercles de rencontre auxiliaire se trouvent en défaut, à moins encore de recourir aux données de la *Géométrie moderne*, qui assigne une sécante commune, au moins idéale, aux couples respectifs de cercles d'intersection de cette sphère, alors infinie et plane, avec les deux surfaces de révolution considérées, dont on suppose les axes parallèles dans l'espace.

Qu'on me permette à cette occasion de présenter sur l'enseignement de la Géométrie descriptive et sur l'École Polytechnique, à des époques déjà loin de nous, quelques réflexions émanées de l'un de ses plus anciens élèves, qui a eu l'honneur de la commander en 1848, 1849 et 1850, dans un moment bien difficile pour tous, où des hommes politiques puissants, en dehors et dans le sein de l'Assemblée Constituante, ne songeaient à rien moins qu'à désorganiser, sinon détruire entièrement, la plus belle de nos institutions scientifiques, mais que d'autres plus modérés, mieux intentionnés envers cette mère-école, ont soutenue et défendue tout en y apportant des réformes indispensables et universellement réclamées par les services publics et les chefs de famille ; réformes auxquelles, je l'avoue, j'ai pris la plus grande part en tout ce qui concerne la discipline et les études intérieures ou extérieures, sans jamais me laisser influencer par aucune considération étrangère au but réel de l'institution. On me rendra en effet, je l'espère, cette justice, que peu ambitieux de renommée et de faveurs, puisque nommé par le ministre Arago, près de la limite d'âge du grade de colonel, à celui de général de brigade commandant l'École Polytechnique, j'ai quitté le commandement de cette École dans le même grade, et portant depuis onze ans la simple croix d'Officier de la Légion d'honneur, dont j'avais été fait Chevalier en mars 1815, n'ayant jamais cherché à saisir et encore moins à faire naître des occasions d'avancement toujours faciles lorsqu'on se montre à propos obséquieux ou sévère, et qu'on ne recule pas devant des mesures de rigueur générales, intempestives, qui frappent aveuglément l'innocent et le coupable, embarrassent le pouvoir et sont bien souvent, plutôt un signe d'impéritie ou de faiblesse que de véritable

(*) Indépendamment des considérations de cette Note, dont le contenu pourrait donner lieu à quelques observations de ma part, des études analogues fort simples et purement analytiques ont été développées à la p. 29 du t. XIX des *Nouvelles Annales de Mathématiques*, par M. Gros, professeur à Paris. J'ai reçu également communication d'une autre Note, toute récente, due à M. Godart, jeune professeur plein d'avenir, sorti de la nouvelle École Polytechnique, Note où le même problème se trouve résolu avec élégance et sans calcul, par la théorie même des *cordes idéales* exposée dans le *Traité des Propriétés projectives*. Mais je ferai observer que de telles questions, quelque intérêt qu'elles présentent au point de vue de la Géométrie spéculative, ne se rattachant que bien indirectement à la Géométrie descriptive, comme l'entendaient Monge et Lagrange, qui prétendaient la faire servir *à priori* à la résolution purement graphique et approximative de toutes les questions qui concernent les arts de précision et même les applications de l'Analyse algébrique et transcendante : résolution des équations numériques, problème des cordes vibrantes, intégration des équations aux dérivées partielles, etc.

prudence et de loyale fermeté, quand il s'agit d'une jeunesse éclairée, généreuse et patriotique comme celle de l'École Polytechnique, *la poule aux œufs d'or* de Napoléon Ier.

Monge, cette illustre et loyale victime politique de l'imagination et du cœur, sortait, comme tant d'autres géomètres célèbres, d'Alembert, Lagrange, Laplace, Bezout, Borda, Coulomb, Carnot, Malus, etc., des anciennes Écoles militaires, où tous se sont perfectionnés par l'esprit d'ordre, de discipline, et le sentiment du vrai et de l'utile; Monge, sous le premier Empire, grand cordon de la Légion d'honneur, sénateur libéral et dévoué, l'ami généreux, le protecteur tout-puissant de ses élèves, dessinateur et artiste par excellence, peintre heureux et enthousiaste des formes géométriques et analytiques de l'espace; Monge enfin, dont des disciples ingrats, jaloux et passionnés, ont vainement tenté de rabaisser non-seulement le caractère de probité politique, mais aussi le talent oratoire et mimique de professeur, n'avait jamais confondu, dans ses admirables leçons de l'École Polytechnique, les deux manières également puissantes de découvrir et de démontrer les propriétés des formes géométriques. Il se gardait bien surtout, en Géométrie descriptive, de recourir aux théorèmes ou problèmes particuliers relatifs aux épures; il préférait de beaucoup les méthodes d'intuition et les procédés graphiques également recommandés par Lagrange, Clairault, Bezout, Lacroix (*Applications d'Analyse et de Géométrie*, t. II, p. 581).

Voilà, me semble-t-il, ce qu'on ne devrait jamais perdre de vue dans cette Géométrie descriptive, « langue de l'artiste et de l'homme de génie, » comme disait Monge, où les théories relatives à des questions et des données d'épures variables à l'infini, ne peuvent être l'objet d'un cours oral, ni d'un ouvrage *ex professo* sur cette même Géométrie, mais bien d'un Traité à part, auquel les élèves pourraient recourir au besoin dans leurs exercices graphiques. Or, c'est précisément ce qui a été recommandé avec instance dans les programmes de l'École Polytechnique de 1850, rédigés par une Commission ministérielle dont j'avais l'honneur de faire partie, et qui fut continuée par le *Conseil de perfectionnement*, qui n'a pas su toujours respecter ce que ces programmes offraient de vraiment utile; notamment en ce qui concerne l'enseignement de la Mécanique, laissant aujourd'hui, dans les programmes d'admission, une lacune regrettable sur laquelle je reviendrai un jour, et qui m'a contraint, non sans regret je l'avoue, de me retirer d'un Conseil où j'avais l'insigne et souvent pénible privilége de siéger depuis plus de 27 ans.

Sous le rapport des anciennes traditions de l'École du Génie de Mézières, on ne pouvait adresser aucun reproche à l'enseignement de MM. Ferry et Hachette, successeurs de Monge à l'École Polytechnique, auxquels l'intelligent, modeste et habile Girard était d'un si utile secours, ni à celui de M. Leroy, représentant d'une réforme plutôt politique que scientifique, comme MM. Cauchy et Binet dont il suivait scrupuleusement les inspirations dans son *Traité d'Analyse appliquée à la Géométrie des trois dimensions;* sorte de complément et d'appui, étranger mais pourtant indispensable à ses *Leçons de Géométrie descriptive*, dans lesquelles il adoptait une marche plutôt synthétique qu'analytique, plutôt mnémonique que théorique. C'est aussi dans ces dernières leçons se succédant identiquement et périodiquement d'année en année, comme les éditions mêmes du livre qui les contenait, que figurait cet ensemble d'épures en quelque sorte stéréotypées depuis 1795 jusqu'à la sortie de l'honorable M. Leroy de l'École Polytechnique, en 1849, alors qu'effrayé de la réforme qu'allaient subir les programmes de son Cours jugé par les Écoles d'application insuffisant sous le rapport de l'exercice intellectuel des élèves, il se crut obligé de donner sa démission d'un enseignement exercé, je dois le dire, en conscience et non sans succès, pendant plus de trente années, mais dont les débuts ne prouvaient pas qu'on eût eu raison de le préférer comme professeur à des ingénieurs aussi savants et expérimentés que les Dupin et les Vallée, dont certes il ne viendrait à personne aujourd'hui l'idée de comparer le mérite scientifique à celui de Leroy, de Hachette, ni même d'Olivier, son prolixe continuateur, qui tous néanmoins ont rendu des services incontestables à l'enseignement et étaient supérieurs de beaucoup à l'ingénieur Cousinery, l'auteur de la *Géométrie perspective*, trop favorablement apprécié dans l'*Aperçu historique* de 1837, *sur l'origine et les développements des méthodes en Géométrie.*

Quant au Cours de Géométrie descriptive publié par le successeur immédiat de Leroy, M. de la Gournerie, choisi parmi tant d'autres comme ingénieur et savant distingué, c'est sans contredit le Traité le plus rationnel, le plus complet et le plus correct de tous ceux qui ont paru jusqu'à ce jour sur la Stéréotomie, constituant, avec l'*Application de l'Analyse à la Géométrie*, par Monge, la plus directement utile des importations de l'École de Mézières.

Page 139, nos 271 *et suivants*. — Sur la nouvelle solution du problème des cercles et des sphères tangents.

Jusqu'à la page 139 la rédaction du texte est, à quelques variantes près, conforme à celle que j'avais adoptée dans l'*Essai sur les Propriétés projectives des sections coniques*, soumis en mai 1820 au jugement de l'Académie des Sciences de l'Institut, et qu'on trouve imprimé textuellement au Ve Cahier du tome II des *Applications d'Analyse et de Géométrie* (1864); mais les nos 272 et suivants, relatifs aux cercles et aux sphères tangents à d'autres, s'écartent notablement de la rédaction primitive, et se trouvent exactement conformes au texte d'un article rédigé exprès pour les anciennes *Annales de Mathématiques* de Montpellier, d'après la demande du Rédacteur, désireux de prendre immédiatement connaissance des solutions mentionnées dans le Rapport académique de M. Cauchy sur l'Essai dont il vient d'être parlé, afin de le comparer aux siennes propres : M. Gergonne m'avait en effet adressé cette demande l'année même (1821) où il faisait paraître dans ses *Annales* ce Rapport qu'on trouvera textuellement reproduit à la p. 555 du tome II des *Applications, etc.*, accompagné de récents commentaires. En mentionnant favorablement, comme j'en ai fait ailleurs la remarque, la nouvelle solution du problème du cercle tangent à trois autres sur un plan, le Rapporteur n'avait rien ajouté qui eût trait à l'extension considérable et jusque-là inaperçue que cette solution pouvait acquérir par l'application immédiate des principes de la projection centrale aux systèmes de coniques en général; application évidente *à priori*, pour quiconque ne voulait pas demeurer dans la région de la Géométrie synthétique ou élémentaire. Nulle part d'ailleurs, dans mon *Traité* de 1822, je n'ai prétendu faire un simple manuel à l'usage des artistes et des ingénieurs; je m'y suis efforcé, au contraire, d'élever et d'étendre les doctrines de manière à agrandir le champ des idées géométriques, tout en exposant des vérités essentiellement utiles et d'une application élégante et facile.

Il est peu nécessaire, sans doute, de faire remarquer que la nouvelle rédaction des théories ci-dessus, relatives aux cercles et aux sphères tangents, insérée aux anciennes *Annales de Mathématiques*, se trouvant littéralement transcrite dans le texte du *Traité des Propriétés projectives des figures*, ne devait pas, à cause du double emploi, figurer au nombre des articles extraits de ces *Annales*, et qui composent presque en entier le VIe Cahier du tome II de mes récentes *Applications d'Analyse et de Géométrie*.

Page 176. — Simple indication ou renvoi.

Les lecteurs qui n'auraient pas sous la main la collection des anciennes *Annales de Mathématiques*, citées au bas de cette page, pourront recourir au tome II, VIe Cahier, des *Applications d'Analyse et de Géométrie* (1864), où se trouvent rapportées les recherches relatives à l'hyperbole équilatère dont il s'agit, recherches précédées ou suivies dans ce VIe Cahier d'articles spéciaux adressés de 1816 à 1822 à M. Gergonne, sur diverses questions qui ont été le point de départ du *Traité des Propriétés projectives;* notamment sur les propriétés angulaires des foyers de la parabole et des autres coniques, sur les polygones inscrits et circonscrits à ces courbes, la théorie des polaires réciproques, le lieu des centres des coniques assujetties à quatre conditions, etc.

Page 184, no 357. — Sur les Géométries de la règle et du compas.

La *Géométrie du compas*, due au célèbre géomètre italien Mascheroni, traduite en français par Carette, officier du Génie (1798), est un ouvrage remarquable non-seulement au point de vue ma-

thématique, mais aussi pour l'utilité de ses applications à la division des instruments d'astronomie et de géodésie. A cause de cela même, il a été souvent consulté par les artistes instruits, malgré les savantes et délicates discussions géométriques qu'il renferme, et qui ne sont plus à la mode de nos jours, précisément à cause de leur tendance essentiellement utilitaire. Quant à la Géométrie de la règle, cultivée avec faveur et succès par Servois, par Brianchon et par moi-même, elle ne pourrait évidemment servir à la division précise des instruments de mathématiques; mais on ne saurait méconnaître son importance et son utilité pour la solution d'un grand nombre de problèmes relatifs aux épures de Géométrie descriptive, à certaines opérations et tracés sur le terrain, etc., où elle est souvent suppléée par ce qu'on pourrait nommer la Géométrie *de l'équerre ou généralement des angles invariables non gradués.*

En insistant plus particulièrement sur ces instruments et ces méthodes aux pages 180 et suivantes du texte (nos 351 à 358), je me suis suffisamment étendu sur la possibilité de résoudre linéairement tous les problèmes du second degré, au moyen d'un cercle *une fois tracé* ou d'*un angle d'ouverture donnée;* or cette proposition a été justifiée et approfondie depuis, par Steiner, célèbre à divers titres (voir *Applications d'Analyse et de Géométrie,* t. I, 1862, p. 480), dans l'intéressant écrit allemand intitulé: *Geometrische Constructionen mittelst des Lineals und eines festen Kreises* (Berlin, 1833); ouvrage qui, bien que publié onze ans après le *Traité des Propriétés projectives,* n'a pas suffi pour attirer l'attention des géomètres; peut-être encore parce que, essentiellement ou simplement utile, il ne renferme aucun de ces théorèmes à combinaisons, si fort recherchés de nos jours par les adeptes, et dont M. Steiner a le premier offert depuis 1833 de nombreux exemples.

Quant au problème qui consiste à décrire une section conique assujettie à quatre ou cinq conditions distinctes ou non, il ne concernait jusqu'au Chapitre II de la IIIe Section, que des solutions fort simples, linéaires et pour ainsi dire élémentaires; mais il n'en est plus de même dans les Chapitres suivants, où les points, les droites, les intersections et contacts divers des sections coniques peuvent à volonté être réels ou imaginaires, simples, doubles ou multiples, à distances données ou infinies; généralisation tant reprochée autrefois à l'auteur de cet ouvrage par les géomètres et algébristes puritains, qui, goûtant peu les doctrines platoniciennes, contraires à l'emploi de tout signe hiéroglyphique, alphabétique ou algorithmique, se servent de tels signes comme seuls propres à diriger avec certitude l'esprit et le raisonnement géométrique, et adoptent par exemple, avec une confiance entière, la forme symbolique $x \pm y\sqrt{-1}$ appliquée à la conception des rencontres idéales d'une droite et d'un cercle, etc.

Que penseraient et diraient aujourd'hui ces sévères censeurs, s'ils venaient à prendre connaissance des questions géométriques, d'un genre beaucoup plus complexe ou relevé si l'on veut, que poursuit non sans succès l'école si féconde des Steiner et des Chasles? N'est-il pas à craindre qu'ils ne se laissassent effrayer par la multiplicité et l'étrangeté, pour ainsi dire, des généralisations, des symboles et des combinaisons que de telles questions supposent?

Page 209, nos 391 *et suiv.* — Sur les points ou pôles réciproques des coniques.

Lorsque, en 1822, je présentai comme un simple *corollaire* le beau théorème de M. Lamé sur le concours des *diamètres conjugués* à des *diamètres parallèles d'un système de lignes du second ordre,* il était certes loin de ma pensée de vouloir rabaisser l'importance du cas particulier envisagé par cet habile géomètre algébriste, jeune alors et dont l'excellent ouvrage in-8° ne paraissait point encore apprécié à sa juste valeur; je voulais simplement montrer la fécondité et la généralité de mes principes de projection, dont j'aurais pu immédiatement étendre l'application à plusieurs autres théorèmes de l'auteur, sans y employer aucun nouvel effort d'esprit; mais tel n'était pas mon but, et je dois déclarer ici que, en m'occupant, dans les nos 78 et suivants de ce *Traité,* du cas élémentaire relatif aux cercles, je n'avais aucunement sous les yeux le livre de M. Lamé, et que, dès

mon séjour en Russie, je m'étais déjà vivement préoccupé des théorèmes et des problèmes relatifs aux systèmes de deux ou d'un nombre quelconque de coniques s'entrecoupant ou non sur un plan. Ces théorèmes et problèmes constituent d'ailleurs l'objet spécial de la sect. III du présent volume, qui comprend en particulier les remarquables propriétés, aujourd'hui fort répandues, du *système triple* de pôles et polaires conjugués d'un faisceau de coniques à cordes communes sur un plan; propriétés que, dans le Supplément et dans la sect. II, t. II de ce *Traité* (n° 404), j'ai étendues au *système quadruple* de pôles et plans polaires conjugués des surfaces du second degré ayant les mêmes lignes d'intersection ou enveloppes développables communes, en recourant aux nouveaux principes de *projection perspective* ou *homologique* et de *réciprocité polaire*, que j'aurais pu également appliquer aux beaux théorèmes de Monge sur les *droites diamétrales conjuguées communes* (*Correspondance polytechnique*, t. II, p. 319), jamais cités et qui eussent mérité de l'être.

En entrant dans ces explications, j'ai uniquement l'intention de préciser mes droits à la découverte d'une proposition dont M. Lamé n'avait pu entrevoir le cas général, et qui lui a été exclusivement et à tort attribuée dans la séance du 30 mai 1853 de l'Académie des Sciences de l'Institut (t. XXXVI, p. 948 des *Comptes rendus*); car ni lui ni d'autres avant moi n'avaient posé les principes qui pouvaient servir à passer directement du cas particulier au cas général, par voie géométrique ou autrement, quelque simple et naturel que cela puisse paraître depuis la publication du *Traité des Propriétés projectives des figures*.

Au surplus, quand l'assertion dont je viens de parler fut avancée, j'étais occupé de l'accomplissement d'une tâche bien lourde et pour ainsi dire encyclopédique, entreprise au sujet de l'Exposition universelle de l'Industrie à Londres, en 1851; tâche dont l'utilité et l'importance me paraissaient fort supérieures à celle d'une infime et pénible revendication scientifique, que, par cela même, j'ai dû ajourner à un moment plus favorable.

Pages 374 *et* 377, n°s 599 *et* 603 (*Supplément*). — PROPOSITIONS ANOMALES OU DÉFECTIVES CONCERNANT LES COURBES ET SURFACES DU SECOND DEGRÉ.

La composition et l'impression de ce *Traité* ayant eu lieu pendant l'accomplissement même des devoirs que m'imposait le service d'ingénieur militaire, on s'explique le laconisme et la rapidité des démonstrations dont j'ai usé, surtout dans le Supplément relatif aux figures dans l'espace; je ne suis donc nullement surpris que ce laconisme, indépendant de ma propre volonté, ait pu détourner certains lecteurs, même géomètres, de se livrer aux applications de la méthode exclusivement géométrique et intuitive qui s'y trouve exposée en prenant pour exemples quelques-uns des théorèmes sur les surfaces du second degré, dus aux inspirations du génie de Monge, si éloquemment et justement défendu, en des temps difficiles (1818), par M. Charles Dupin, l'un de ses plus illustres et de ses plus savants interprètes. Au surplus, dans cette rapide excursion en des régions de l'espace si peu explorées encore, surtout préoccupé de la méthode de découvrir en Géométrie, je m'inquiétais peu des difficultés que comporte l'application du principe général de continuité à des cas spéciaux, et qui ne se laissent pas apercevoir d'une manière aussi évidente dans les résultats de l'Analyse algébrique, où elles existent néanmoins pour les esprits pénétrants et exercés. Il se peut aussi que cette méthode jusque-là inusitée, ait détourné les géomètres d'adopter explicitement et franchement les procédés rapides de démonstration exposés dans le Supplément de ce *Traité*, et ait même encouragé quelques-uns d'entre eux à les combattre vaguement, après avoir essayé sans succès de les mettre à profit d'une manière peu propre à honorer le caractère et le talent géométrique des auteurs (*voy.* notamment la *Correspondance Mathématique de Bruxelles*, t. III, 1827, p. 195).

Je ne puis donc qu'être extrêmement reconnaissant envers les modestes et savants professeurs qui, à l'exemple de M. de la Gournerie, ont bien voulu m'avertir, en diverses circonstances, des difficultés qu'ils éprouvaient dans l'application des méthodes d'intuition géométrique dont il vient d'être parlé.

M. de la Gournerie, en effet, plus récemment encore, m'a fait l'honneur de m'adresser une seconde Note (*voir* la première, p. 410) pleine d'intérêt, dans laquelle il fait voir, par la voie du calcul algébrique, que le théorème du n° 603, dû à Monge, et démontré analytiquement avec beaucoup d'autres fort importants, par M. Chasles, dans la *Correspondance sur l'École Polytechnique* (t. III, 1813, p. 302 à 342), se trouve soumis à une restriction particulière et fort remarquable pour le système de deux *hyperboloïdes gauches* ou à une nappe, qui ont une génératrice commune, et par là même *deux plans tangents* également communs en des points différents de cette génératrice, ici prise pour *directrice* fixe de tous les couples de droites mobiles de l'autre système de génération des deux surfaces, lesquelles, au lieu de s'entrecouper suivant des plans comme le veut le théorème de Monge, ont en commun, outre la directrice mentionnée, une courbe à double courbure du troisième ordre, nommée dans ces dernières années *cubique gauche*.

Comme le fait observer justement M. de la Gournerie, « ce cas défectif doit tenir à une res- » triction qu'il serait nécessaire d'apporter à l'énoncé du théorème de l'art. 603, et il est d'ail- » leurs facile de voir que le mode de raisonnement appliqué à l'art. 601 se trouve complétement » en défaut dans ce cas. »

Ici le mot *complétement* est de trop, car il est aisé d'apercevoir, en suivant attentivement le genre de raisonnement employé à partir du n° 598 jusqu'à la fin du Supplément, et qui s'appuie sur le principe ou loi de continuité, qu'on s'y place toujours dans les conditions les plus générales du système considéré, et non dans des circonstances exceptionnelles. Ainsi, par exemple, dans ce même n° 598, il est bien évident que parmi les cinq points considérés, censés appartenir à la même *section conique*, il ne saurait y en avoir *plus de trois* en ligne droite, puisque l'on tomberait dans l'indétermination relative au système de deux droites : ou superposées entre elles, ou l'une donnée et l'autre entièrement arbitraire autour du cinquième point, non situé en ligne droite avec les autres. Néanmoins il peut arriver que l'on n'aperçoive plus aussi nettement cette source d'erreurs dans l'application du principe général établi au n° 598.

Pareillement, on ne saurait conclure, d'une manière absolue et générale, comme on le fait à la fin du n° 599 et des suivants, que les lignes de contact des surfaces du second degré soient toujours et essentiellement planes, par cela seul qu'elles ne peuvent être coupées par un plan transversal arbitraire qu'en deux points seulement; car le système de deux droites dans l'espace, qui ne seraient ni parallèles ni convergentes, satisfait précisément à cette condition, et ne saurait être pourtant considéré comme une simple conique, continue dans toutes ses parties, c'est-à-dire assujettie à un mode *unique de génération* ou *description;* chose permise pour un couple de droites situées dans un même plan, pourvu que, ainsi que dans le cône à nappes opposées par le sommet, on ne considère qu'un seul système d'angles non supplémentaires, et figurant une hyperbole dont les axes seraient parvenus à la limite de petitesse. (*Voir* le IIIe Cahier du tome II des *Applications d'Analyse et de Géométrie*, sur la loi des signes de position.)

En général, les raisonnements employés dans le Supplément du *Traité des Propriétés projectives* supposent implicitement que les lignes d'intersection des surfaces considérées sont continues, rentrantes sur elles-mêmes, à distance donnée ou infinie, et généralement du quatrième degré, comme l'indique le nombre possible de leurs rencontres avec un plan transversal arbitraire, ou la somme des degrés des sections déterminées par ce plan dans les deux surfaces. C'est une conséquence des définitions premières aussi bien en Analyse qu'en Géométrie; seulement le mot de *courbe*, généralement appliqué à l'intersection de deux surfaces, peut paraître fautif dans quelques cas et prêter à équivoque.

Ainsi notamment, dans le cas examiné par M. de la Gournerie, il arrive que l'intersection mutuelle des deux surfaces gauches renferme une branche rectiligne isolée, qui ne saurait former une courbe assujettie à la loi de continuité avec le surplus de cette intersection, nécessairement du troisième degré, et qui peut, elle-même, être composée de lignes droites formant au fond un système

discontinu ; car, pour toute direction du plan transversal contenant l'une de ces droites, elle échappe à notre définition fondamentale du degré des courbes et des surfaces.

Dans tous ces cas, non-seulement le résultat des démonstrations fondées sur l'hypothese de la continuité parfaite des diverses parties subit des modifications essentielles, mais les conditions mêmes de la continuité des surfaces du second degré sont changées ; ce qui arriverait aussi dans l'hypothese d'une seule branche rectiligne isolée. Car, dès qu'une telle surface renferme une droite assignée de position, elle doit en contenir une infinité d'autres déterminées par les plans qui, renfermant la première, la rencontrent et recouvrent la surface entière ; caractère qu'on reconnaît appartenir exclusivement aux *surfaces réglées* ou *plans gauches*, comme l'entendaient nos bons ancêtres, ou aux *hyperboloïdes* à une seule nappe et à génération double, selon l'École de Monge (*Correspondance polytechnique*, t. I, 1808, p. 301 ; t. II, 1812, p. 331 et 439 à 447).

D'autre part, il est bien clair que deux surfaces de cette espèce, qui auraient en commun une seule droite ou directrice rectiligne, pourraient encore s'entrecouper suivant une seconde branche continue, quoique détachée de la directrice ; mais dans tous les cas, essentiellement du troisieme degré, et susceptible d'être construite par points en conduisant, par cette même directrice, dans les deux surfaces, des plans transversaux qui y déterminent séparément autant de couples de génératrices ou intersections rectilignes, dont la rencontre toujours réelle et unique sur chaque plan ne dépend nullement de la réalité propre des points de contact communs aux deux surfaces sur la directrice considérée.

Ce tracé, purement linéaire, rappelle les belles épures de notre ancien et habile dessinateur Girard, à l'École Polytechnique, relatives aux intersections des cylindres et des cônes du second degré ; épures qui ne sont que des modifications particulières de celles que donneraient les intersections des surfaces gauches en général, mais dont les accidents pour les lignes du quatrieme degré seulement, ont été discutés à la page 368 du tome I (1808) de la *Correspondance sur l'École Polytechnique ;* M. Hachette n'ayant fait qu'indiquer le cas de deux cônes à *génératrices communes*, qui donne lieu aux intersections du troisième degré, sur lesquelles, si je ne me trompe, il n'est jamais revenu, sans doute à cause des difficultés que leur examen présente.

Au surplus, il paraît évident que si deux cônes ou deux surfaces gauches quelconques du second degré avaient en commun deux droites ou génératrices quelconques, leur ensemble, d'après le principe rappelé, étant du second degré, le reste de l'intersection mutuelle de deux surfaces serait par là même aussi de ce degré, et constituerait une *courbe de sortie*, dont le système des deux premières génératrices communes aux surfaces serait la *courbe d'entrée :* plane, ainsi que la premiere, d'après un autre théorème de Monge, si leurs couples respectifs de droites, appartenant à des modes différents de génération, s'entrecoupaient ; gauches si elles-mêmes, appartenant à un mode unique de génération, elles n'avaient aucun point commun. En supposant que ces derniers couples des directrices vinssent à se rapprocher jusqu'à se confondre par voie de continuité, les deux surfaces se toucheraient le long de leur direction commune. Enfin, si ces mêmes surfaces gauches étaient assujetties à avoir en commun une troisième directrice de même mode de génération, et par conséquent non concourante avec les deux autres, mais constituant toutes trois par leur ensemble une ligne du troisième ordre, les deux surfaces coïncideraient dans toute leur étendue par simple définition, et le surplus de leur intersection commune, réduit au premier degré, cesserait d'être une droite de position déterminée et distincte.

Le cas de deux droites communes directrices, ou non concourantes, donne lieu visiblement à un second couple de droites de l'autre génération, réelles ou imaginaires, et qui peuvent se superposer quand il en est ainsi des deux premières, ou que les surfaces se touchent le long des couples de directrices ou génératrices coïncidantes (*). Des considérations, d'une autre espèce sans doute,

(*) STEINER, *Systematische Entwickelung, erster Theil*, Berlin, septembre 1832, p. 245-247 : *Projectivischer*

ont conduit M. Moutard à cet énoncé général ou lui-même fort remarquable :

Toute surface algébrique du degré m, qui renferme m génératrices du même système d'un hyperboloïde, renferme nécessairement aussi m génératrices de l'autre système de cet hyperboloïde.

En général, on voit comment nos raisonnements et les théorèmes généraux énoncés par Monge sur les surfaces du second ordre, peuvent cesser de s'appliquer directement au cas particulier des hyperboloïdes; mais parce qu'il y a, dans les systèmes de lignes qui constituent chaque mode séparé de génération de ces surfaces, une cause naturelle de discontinuité, ce n'est pas un motif pour accuser en soi le principe général de continuité. Car, d'une part, les conditions imprescriptibles de ce principe sont violées dans l'intersection mutuelle de deux surfaces gauches ayant une directrice ou génératrice commune; d'autre part, comme on sait, il n'y a pas de règle générale sans exception; enfin il est aisé de se convaincre, sur l'exemple même du n° 603, choisi par M. de la Gournerie pour base de ses observations et calculs, que le genre de raisonnement employé dans le Supplément du *Traité des Propriétés projectives* trouve son application quand on tient compte de la nature particulière des surfaces ici considérées, et dont le couple de plans *à la fois sécants et tangents* ont pour droites de leur double contact une directrice commune, comprise dans leur intersection mutuelle du quatrième ordre; la *portion gauche*, du 3ᵉ ordre seulement, pouvant se construire séparément et linéairement d'après nos précédentes observations.

Cette courbe gauche, dont M. de la Gournerie a démontré l'existence par la voie du calcul algébrique et en choisissant convenablement la position des axes coordonnés, cette courbe, dis-je, et la directrice des points communs de contact qui lui est *associée*, par cela même qu'elles font système et représentent l'intersection de deux surfaces du second degré, doivent jouir dans leur ensemble de propriétés analogues à celles qui ont été démontrées au n° 611, dans les hypothèses générales de continuité de deux surfaces de ce degré. Ainsi, par exemple, elles doivent pouvoir se placer de plusieurs manières sur des cônes du second degré, etc.; mais on ne saurait aller au delà à première vue, parce que les raisonnements du n° 611 et des suivants ne s'appliquent pas sans restriction aux hypothèses qui viennent de nous occuper, et qu'elles définissent les courbes et les surfaces par un caractère trop général, à savoir : *le nombre de leurs intersections avec une droite ou un plan transversal arbitraire*. Seulement, en considérant les choses d'un peu plus près, il devient évident que les cônes, réduits au nombre de deux, doivent avoir pour arête commune la directrice commune même dont il a été parlé, et pour sommets respectifs les deux points, réels ou imaginaires, où cette droite rencontre simultanément les deux surfaces qui définissent la branche du troisième degré et son annexe rectiligne; or cette annexe pouvant être prise en un lieu quelconque, de manière cependant à s'appuyer sur deux des points de la courbe, cela montre qu'il existe une infinité de couples de cônes de second degré, réels ou imaginaires, susceptibles de redonner cette courbe gauche, par leurs intersections mutuelles, etc.

De toutes manières, je le répète, dans de pareilles occasions, l'Analyse des coordonnées de Descartes n'offre aucun privilége spécial sur la Géométrie pure, à part toute réserve hypothétique et

---

Gebilde, etc.; c'est-à-dire *Figures projectives*.... Ce livre, qui m'a été transmis par M. de Humboldt, est entièrement fondé sur la considération des faisceaux projectifs de droites ou de plans *rayonnant* autour d'un point ou d'une droite, etc.; il a paru dix années après le mien, et se ressent encore du doute et de la confusion qu'avait jetés dans les esprits le spirituel mais effronté plagiat de Gergonne et de ses adhérents, relatif à la *réciprocité polaire*, dont Steiner, aux p. VII et VIII de sa préface, veut bien le premier, mais avec circonspection, prendre la défense tout en se servant du mot *dualité*, sorti des inspirations métaphysiques de Kant et de Wronski, comme j'en ai fait la remarque ailleurs (*Applications d'Analyse et de Géométrie*, t. II, 1864, p. 571, et note de la p. 488). Mais les avantages inhérents au laconisme de ce mot, et les droits que pouvait avoir l'auteur du *Calcul barycentrique* à la démonstration *à posteriori*, par l'Analyse algébrique, du principe un peu vague qu'il sous-entend, n'auraient pas dû faire oublier à l'éminent et ancien élève de Möbius que 1817, 1822 et 1824 sont antérieurs à l'année 1827 où parut ce *Calcul*.

préconçue relative à la rigueur et à la clarté réciproque des démonstrations ou des déductions. On peut même dire qu'elle lui est inférieure dans beaucoup de circonstances : notamment, cette Analyse, essentiellement algébrique, ne saurait représenter les courbes gauches dans l'espace à trois dimensions, sans l'intermédiaire d'un système d'équations ou de surfaces continues qui les donnent par leur combinaison ou celle de leurs cylindres de projection sur les plans coordonnés, lesquels impliquent, dans leurs équations algébriques, des complications bien connues, provenant de facteurs étrangers à la courbe vraie de l'espace.

Dans l'autre manière de raisonner, au contraire, la nature des courbes gauches censées continues dans leur génération et description, se trouve définie *à priori* par le nombre de leurs rencontres avec un plan arbitraire ; ce qui ne saurait amener de confusion, dès qu'on en distrait les droites ou branches détachées, sans concours ni lien de continuité avec les proposées, mais auxquelles elles pourraient être accidentellement associées.

A la vérité, il ne paraît pas que les courbes gauches d'un certain ordre continues et ainsi définies géométriquement, soient d'une nature aussi générale que les lignes planes de même ordre. Mais c'est là une question qui, jusqu'ici, ne paraît pas avoir été suffisamment élucidée par nos plus habiles géomètres ; question dont je me suis préoccupé dès l'époque où j'étudiais, par la voie purement intuitive du n° 611, les propriétés des courbes à double courbure du quatrième degré, résultant de la rencontre mutuelle de deux surfaces du deuxième degré. C'est même ce qui m'a conduit, dans le Mémoire sur l'*Analyse des transversales*, lu en 1830 à l'Académie des Sciences de l'Institut (*Crelle*, t. VIII), à m'occuper du problème de tracer linéairement la courbe continue censée du troisième ordre passant par *huit points* donnés arbitrairement dans l'espace, en recourant aux propriétés, également linéaires et les plus générales, des projections planes de cette courbe ; c'est-à-dire sans supposer aucun accident de forme particulier à ces projections, simplement définies par des relations métriques projectives, elles-mêmes tout à fait générales (*voyez* aussi le n° 163 du tome II du présent *Traité*).

Ces constructions purement linéaires s'écartent tellement de celles qui se déduisent des considérations relatives aux rencontres des cônes ou des hyperboloïdes du second degré à génératrice commune, qu'il me paraîtrait important pour le progrès des sciences géométriques que mes savants successeurs, dont la plupart semblent ignorer mes propres travaux sur les courbes gauches résultant de l'intersection des surfaces du deuxième degré ou de leurs enveloppes développables communes, etc., consentissent à interrompre un instant l'étonnante profusion de leurs récentes et multiples découvertes, pour approfondir davantage la partie métaphysique ou philosophique des théorèmes qu'ils se contentent trop souvent d'énoncer, et dont les développements indéfinis, la diversité des méthodes ou les néologismes ne permettent guère aux vrais amis de la science de suivre la progression de ces découvertes, essentiellement géométriques, avec tout l'intérêt qu'elles méritent.

Probablement aussi, les doutes que j'éprouvais dès l'époque de 1822 à 1830, à propos de la véritable nature des *courbes gauches*, auront depuis préoccupé M. Steiner, dont, qu'on me permette de le dire, je dois la connaissance scientifique à l'amitié de l'illustre philosophe voyageur de Humboldt, et l'auront empêché de s'occuper davantage de la curieuse étude des propriétés géométriques de ces courbes, qui, jusqu'à présent du moins, ne paraissent pas devoir offrir d'application directe aux arts purement graphiques ou descriptifs.

Page 394, n° 628. — *Lettre de M. Charles Dupin adressée en 1822 à l'auteur du* TRAITÉ DES PROPRIÉTÉS PROJECTIVES DES FIGURES.

J'ai jugé à propos de transcrire ici une lettre que l'illustre auteur des *Développements* et des *Applications de Géométrie* (1813 et 1822) m'a fait l'honneur de m'adresser il y a quarante-deux ans, époque où, jeune encore et attaché au service du Génie militaire, j'éprouvais le vif

besoin d'être soutenu et protégé contre d'injustes préventions scientifiques. Je m'y suis d'autant plus volontiers déterminé, avec l'autorisation amicale de l'auteur, que cette lettre toute spontanée, si honorable et si flatteuse pour mon amour-propre, renferme, sur les dernières pages du *Traité des Propriétés projectives*, écrites beaucoup trop à la hâte, diverses indications ou réflexions scientifiques qui pourront offrir un intérêt réel aux lecteurs, en les avertissant de quelques négligences de style que j'ai cru devoir laisser subsister dans la nouvelle édition, afin de n'apporter aucune altération au texte dont cette même lettre pourra être considérée comme un véritable *erratum*.

« Paris, 13 novembre 1822.

» Monsieur,

» J'ai voulu sur-le-champ prendre une connaissance au moins générale de votre bel ouvrage » sur les propriétés projectives des figures.

» Je commence d'abord par vous remercier de la bienveillance avec laquelle vous avez bien » voulu citer mes travaux dans beaucoup de passages. Vous m'avez trop bien traité.

» Je vous loue beaucoup d'avoir aussi rappelé honorablement les travaux de tous vos prédéces- » seurs; croyez-moi, cela n'ôte rien à votre mérite, et donne une haute idée de votre caractère. » Vous prouvez par là que vous n'avez rien de commun avec cette école égoïste qui voudrait faire » un monopole de la célébrité mathématique. Qu'ils maigrissent à leur gré de l'embonpoint » d'autrui, et faites-les maigrir.

» J'avais eu l'idée de faire entrer en considération les imaginaires dans la Géométrie descriptive; » je l'avais même fait au sujet de la sphère tangente à trois et à quatre autres, mais mon Mémoire » s'est perdu, il y a dix-huit ans, et depuis lors je n'ai plus repris ce sujet. Heureusement, vous » l'avez fait d'une manière qui ne me laisse rien à regretter.

» M. Poisson m'a déjà dit que vous aviez publié un bien *gros* volume; on jugera qu'il ne l'est » pas trop pour le nombre de choses utiles et neuves qu'il renferme. Vous en avez fait, d'ailleurs, » le système complet des recherches de vos prédécesseurs et de vous-même sur les propriétés » projectives des figures.

» Lorsque je réimprimerai mes *Essais sur Monge*, vous m'aurez fourni les moyens d'ajouter un » beau chapitre aux travaux de ses élèves; les vôtres y devront désormais figurer dans les rangs » les plus distingués. Vous verrez, par les considérations préliminaires de mes *Applications de* » *Géométrie*, que j'avais l'idée du problème des bas-reliefs dont vous avez donné la solution; je » ne l'aurais pas donnée comme vous, mais j'en ai la clef par les méthodes que je me suis faites.

» Je dois vous faire une petite observation sur un passage (p. 403). Vous dites que *deux surfaces* » *quelconques* ne peuvent s'entrecouper partout à angles droits, sans que l'intersection qui en » résulte ne soit à la fois une ligne de courbure de ces surfaces. Vous sous-entendez à coup sûr » à *surfaces quelconques* (surfaces du second degré); mais votre phrase, présentée sans restriction, » pourrait avoir l'air d'une erreur.

» J'aurai soin de faire valoir votre livre auprès des géomètres analystes, qui se garderont bien » de vous lire, parce qu'ils ne lisent qu'eux seuls.

» Continuez, Monsieur, à cultiver la Géométrie, et venez enfin nous joindre à Paris. Nous ferons » tous nos efforts pour vous admettre au nombre de nos collègues de l'Institut, où vous soutiendrez » l'honneur de la bonne Géométrie.

» J'ai l'honneur, Monsieur,

» de vous saluer avec la plus haute considération,

» Ch. DUPIN. »

TABLE DES MATIÈRES

DU TOME PREMIER.

	Pages.
Préface de la première édition	v
Avertissement de la seconde édition	vii
INTRODUCTION. — Considérations sur les moyens de perfectionner la méthode géométrique, sur la loi de continuité, sur la doctrine des projections, etc. — Historique des recherches entreprises jusqu'ici sur les propriétés projectives des figures	xi à xxxii

SECTION PREMIÈRE.

PRINCIPES GÉNÉRAUX.

Considérations préliminaires	1 à 3

CHAPITRE Ier. — *Notions préliminaires sur la projection centrale.*

	Nos	Pag.
Définitions de la *projection centrale*, des figures et des propriétés *projectives*	1	3
Signes auxquels on peut reconnaître qu'une relation métrique est projective	8	6
Relations projectives qui subsistent entre les sinus des angles projetants et des arcs de grands cercles de la sphère qui a son centre au centre de projection	16	9
Relations projectives à deux termes	20	11
Exemple relatif à la *division harmonique* des lignes droites. — Propriétés du *faisceau harmonique*, notions qui en résultent	21	12
Nouvelle application relative aux propriétés fondamentales des sections coniques	33	18
Notions qui en résultent pour la similitude des sections coniques	42	21
Des relations projectives entre les aires des figures planes ; conclusion	45	23

CHAPITRE II. — *Notions préliminaires sur les sécantes et les cordes idéales des sections coniques.*

Définitions de la sécante *idéale*, de la *polaire* et du *pôle*, des cordes *imaginaires*, etc., des sections coniques	48	25
De la corde *idéale* d'une section conique, et de la section conique *supplémentaire* qui la donne	54	28
De la sécante et de la corde *idéale* communes au système de deux sections coniques situées sur un plan ; moyen de prouver, en général, leur existence	56	30
Aperçu sur l'utilité de la considération des cordes idéales, d'après un exemple tiré de la Géométrie descriptive	60	33
Des sécantes et des cordes idéales communes de contact	63	35
Réflexions sur les sécantes communes idéales des sections coniques, et origine de ces sécantes dans le cône et les surfaces du second ordre	64	36
Propriétés fondamentales de la sécante, réelle ou idéale, commune au système de deux cercles décrits sur un plan	68	38
Des suites de cercles qui ont une sécante commune sur un plan, et de leurs suites orthogonales réciproques. — Principales propriétés de ces suites	73	40

	Nos	Pag
Des points *réciproques* sur le plan de deux ou de plusieurs cercles qui ont une sécante commune. — Principales propriétés de ces points	81	43
Notions relatives aux sections coniques semblables et semblablement placées, et à leur sécante, réelle ou idéale, commune à l'infini	89	46
Cas particulier des cercles décrits sur un même plan	94	47
Réflexions sur les notions métaphysiques qui découlent de ce qui précède	96	48

CHAPITRE III. — *Principes relatifs à la Projection des Figures planes les unes dans les autres.*

Objet et utilité de ce Chapitre	99	50
Principes fondamentaux relatifs à la projection des systèmes de lignes convergentes, en des systèmes de lignes parallèles, et *vice versâ*. — Notions qui en résultent pour l'infini	101	51
Projection d'une section conique donnée suivant un cercle, de façon qu'une droite quelconque de son plan passe à l'infini. — Lieu des centres de projection	108	53
Cas général où la section conique de projection doit être semblable à une section conique donnée. Lieu des centres auxiliaires de projection	112	54
De ce que deviennent, en projection, le centre, le pôle, la polaire d'une section conique, enfin la droite à l'infini de son plan	116	57
Projection d'une section conique suivant un cercle, de façon qu'il ait, pour centre, la projection d'un point donné sur le plan de cette section conique	120	58
Projection du système de deux ou de plusieurs sections coniques, ayant une sécante commune, suivant des cercles ou des sections coniques semblables et semblablement placées, et pour lesquelles la sécante a passé à l'infini. — Lieu des centres auxiliaires de projection	121	59
De ce que deviennent, en projection, les sécantes, réelles ou idéales, à distance donnée ou infinie, communes au système de deux ou de plusieurs sections coniques situées sur un plan	125	61
Cas où les sections coniques proposées ont un double contact, soit réel, soit idéal, et où les courbes de projection sont concentriques	129	63
Principes particuliers de projection auxquels donnent lieu les principes généraux qui précèdent	132	64
Réflexions générales sur les moyens d'étendre les conséquences qu'on peut déduire des principes de projection posés dans ce Chapitre, et conclusion	135	65

NOTES DE LA PREMIÈRE SECTION.

NOTE I.

Démonstration directe du théorème de l'article 84, pour le cas où les points limites de la suite des cercles proposés deviennent imaginaires	»	69

NOTE II.

Sur le lieu des points de l'espace, susceptibles de projeter une section conique donnée et une droite tracée dans son plan, de façon que, la droite passant à l'infini sur le nouveau plan, la section conique y devienne, en même temps, une ellipse semblable à une ellipse donnée	»	71

SECTION II.

PROPRIÉTÉS FONDAMENTALES DES LIGNES DROITES, DES SECTIONS CONIQUES ET DES CERCLES.

CHAPITRE Ier. — *Géométrie de la Règle et des Transversales.*

	Nos	Pag.
Réflexions et remarques préliminaires	142	73
Relations métriques qui résultent d'un polygone, plan ou gauche, coupé par une droite ou un plan, un système de droites ou de plans, une section conique ou une surface du second ordre quelconques	145	75
Extension de ces théorèmes aux lignes et surfaces d'ordre quelconque	150	76
De quelques corollaires de ces mêmes théorèmes, relatifs aux polygones circonscrits aux lignes et aux surfaces du second ordre	152	77
Propriétés générales du quadrilatère *complet* avec ses trois diagonales	154	78
Identité de ces propriétés avec celles du triangle, des sommets duquel on aurait abaissé, sur les côtés opposés, des droites passant par un point donné, pour former, avec les pieds de ces droites comme sommets, un nouveau triangle inscrit à l'autre	157	80
Autre propriété de ces figures, et extension aux polygones plans quelconques	158	81
Les mêmes propriétés subsistent pour un triangle, circonscrit à une section conique quelconque, dont les points de contact des côtés sont pris pour sommets d'un nouveau triangle inscrit au premier et à la courbe, etc.	161	82
Nouvelles propriétés des quadrilatères complets et des quadrilatères simples, plans ou gauches	163	83
Des triangles qui sont projections l'un de l'autre sur un plan ou dans l'espace	168	85
Propriétés des hexagones plans	169	86
Relations métriques générales qui résultent du quadrilatère simple avec ses deux diagonales, lorsqu'on le coupe par une transversale droite quelconque	172	88
Identité de ces relations avec celles du quadrilatère, inscrit au système de deux droites ou à une section conique, coupé également par une transversale arbitraire	176	90
Propriétés, soit graphiques, soit métriques, qui résultent de là pour les quadrilatères, les triangles et les angles inscrits ou circonscrits aux sections coniques	179	92
Réflexions sur l'usage des relations métriques dans la démonstration des propriétés de situation, et sur la facilité avec laquelle la loi de continuité permet de descendre, des propriétés générales des figures, aux propriétés individuelles qui les concernent	183	93

CHAPITRE II. — *Continuation du même sujet. — Des figures inscrites et circonscrites aux sections coniques. — Questions qui s'y rapportent. — Théorie des Pôles et Polaires réciproques.*

Nouvelles propriétés des quadrilatères inscrits et circonscrits aux sections coniques	185	95
Construction graphique des tangentes, du pôle et de la polaire d'une section conique donnée et décrite. — Construction, par points ou par l'enveloppe des tangentes, des sections coniques données par certaines conditions, dans la plupart des cas où le problème n'est que *linéaire* ou n'exige que l'emploi de la règle	187	97
Propriétés des triangles et des quadrilatères variables, inscrits ou circonscrits aux sections coniques, d'après certaines conditions particulières, et conséquences qui en résultent pour la description des sections coniques, au moyen de certaines données	192	99
Théorie des pôles et polaires des sections coniques et du système de deux droites	194	100
Conséquences qui en résultent pour la détermination des droites, ou des points qui appartiennent à un point, ou à une droite, supposés tous deux inaccessibles, invisibles ou placés à l'infini	197	102

	Nos.	Pag.
Propriétés des hexagones et des pentagones inscrits aux sections coniques, et conséquences qui en résultent pour la description de ces courbes par points, pour la détermination de leurs tangentes, etc.	201	104
Propriétés analogues et conséquences relatives aux hexagones et aux pentagones circonscrits	208	107
Relations métriques appartenant à ces mêmes figures, et solutions, au moyen du calcul, des diverses questions qui précedent sur la description des sections coniques	215	110
Application de la loi de continuité aux propositions générales contenues dans ce Chapitre; exemples relatifs à l'hyperbole et à la parabole	221	113
Théorie générale des pôles et polaires *réciproques*	227	116
Réflexions sur les conséquences qu'on en peut déduire, pour les propriétés de certaines figures, et sur l'usage des principes de la Géométrie de la règle et de la Théorie des transversales, dans la solution des diverses questions qu'on se propose d'ordinaire sur le terrain	235	119

CHAPITRE III. — *Du centre de similitude en général et de celui de deux cercles en particulier. — Des cercles qui se coupent ou se touchent sur un plan. — Des coniques semblables et semblablement placées, en général.*

Notions préliminaires relatives aux *points de concours* des tangentes communes, ou *centres de similitude* de deux cercles	236	121
Définition et propriétés générales du centre de similitude des figures semblables et semblablement placées, soit sur un plan, soit dans l'espace	239	123
Nouvelles notions et propriétés relatives aux centres de similitude, ou points de concours des tangentes communes au système de deux cercles, considérés comme centres de projection de ces cercles	242	125
Conséquences particulières qu'on en peut déduire par l'application de la loi de continuité	247	127
Examen de quelques-unes des conséquences qui découlent du cas général, et construction, avec la règle et au moyen de certaines conditions, des centres de similitude ou de symétrie et des sécantes, réelles ou idéales, communes au système de deux cercles donnés sur un plan, etc.	249	128
Propriétés des polaires du centre de similitude de deux cercles, et des pôles relatifs aux différents rayons de similitude, appartenant à ce centre	256	131
Examen de quelques propriétés particulières, déjà connues, du centre de similitude des cercles, et théorie générale du contact de ces cercles	264	134
Nouvelles propriétés du cercle tangent à trois autres sur un plan, relatives aux centres, axes de similitude, et sécantes communes de ces cercles. — Constructions qui en dérivent	272	139
Des droites et des points *périodiquement homologues* d'une certaine espèce, par rapport au système de trois cercles tracés sur un plan. — Conséquences qui en résultent	280	142
Extension de ces diverses théories à un nombre quelconque de cercles tangents à deux autres sur un plan, et conséquence qu'on en peut déduire, par l'application de la loi de continuité, relativement aux propriétés projectives individuelles de la circonférence du cercle, et par suite des sections coniques en général	286	146
Extension des diverses théories contenues dans ce Chapitre aux sections coniques semblables et semblablement placées sur un plan	288	147

SECTION III.

DES SYSTÈMES DE SECTIONS CONIQUES.

CHAPITRE Ier. — *Du centre d'homologie ou de projection des figures planes en général et de celui des sections coniques en particulier. — Application à diverses questions qui s'y rapportent.*

	Nos	Pag.
Propriétés des sécantes communes et des points de concours des tangentes communes des sections coniques	290	151
Des figures *homologiques*, du centre et de l'axe d'*homologie*	297	154
Construction de la figure homologique d'une figure donnée, au moyen de certaines conditions	302	157
Cas où la figure donnée est une section conique	305	159
Application à la théorie des contacts des sections coniques	318	166
Cas où, soit le centre, soit l'axe d'homologie, soit tout autre objet des deux figures, est situé à l'infini	326	169
Cas où la section conique, homologique d'une autre, doit être s. et s. p. relativement à une troisième section conique	332	172
Usage des théories précédentes pour la construction des sections coniques assujetties à certaines conditions	338	175
Construction graphique du centre, des axes, des asymptotes, etc., d'une section conique donnée par certaines conditions	344	178
Réflexions sur la possibilité de résoudre linéairement tous les problèmes du second degré, au moyen d'un seul cercle une fois tracé, ou d'un angle d'ouverture donnée	351	181

CHAPITRE II. — *Propriétés et construction du système complet des sécantes et des tangentes communes à deux sections coniques situées sur un plan. — Des systèmes de sections coniques qui ont des sécantes et des tangentes communes, etc.*

Du système complet des sécantes et des tangentes communes à deux sections coniques situées sur un même plan	359	185
Cas où les tangentes et les points communs au système de deux sections coniques deviennent en partie imaginaires	364	188
Cas où les tangentes et points communs au système de deux sections coniques sont à la fois imaginaires	369	191
Nouvelles propriétés et construction générale des points de concours des sécantes conjuguées communes	370	192
Construction des sécantes conjuguées communes dont le point de concours est donné	373	194
Recherche des diamètres conjugués parallèles des sections coniques, et construction directe des points de concours des sécantes conjuguées communes, quand l'un d'entre eux est donné	377	196
Cas où le point de concours donné est à la fois intérieur aux deux sections coniques, ou leur sert de centre commun	382	200
Construction générale des sécantes et des tangentes communes au système de deux sections coniques; récapitulation des cas de possibilité et d'impossibilité du problème, et de ceux où il s'abaisse au second degré	384	202
Solution du dernier des problèmes énoncés art. 305, et de quelques autres qui s'y rapportent; des points *réciproques* dans le plan d'un système de sections coniques ayant mêmes sécantes communes	387	205

N^os – Pag.

Propriétés des diamètres conjugués parallèles des sections coniques qui ont quatre points communs, réels ou imaginaires, sur un plan.............................. 391 209

Du lieu des pôles d'une droite donnée sur le plan d'une conique variable assujettie à certaines conditions; du lieu du centre de cette conique; de l'enveloppe de ses polaires relatives à un point quelconque de son plan.............................. 396 211

Nouvelles propriétés des sections coniques assujetties à certaines conditions sur un plan, des sections coniques s. et s. p. et du cercle osculateur en un point donné d'une telle courbe.............................. 402 215

Réflexions générales sur l'objet du présent Chapitre et sur les moyens d'étendre, aux sections coniques en général, les propriétés des cercles qui se coupent ou se touchent sur un plan, etc.............................. 406 218

CHAPITRE III. — *Théorie des doubles contacts des sections coniques et solutions des problèmes qui s'y rapportent.*

Propriétés générales et construction de la sécante de contact commune au système de deux sections coniques doublement tangentes et données sur un plan.............. 410 220

Des sections coniques doublement tangentes à une section conique donnée, et assujetties à passer par deux points aussi donnés.............................. 412 222

Cas pour lesquels l'un des points de contact est donné ou se confond avec l'autre..... 416 224

Des sections coniques doublement tangentes à une section conique donnée, et assujetties à passer par trois points aussi donnés.............................. 418 225

Des sections coniques doublement tangentes à une autre, et qui touchent, de plus, trois droites données.............................. 423 229

Cas où, les droites données étant au nombre de deux seulement, l'un des points de contact des deux courbes est assigné, se confond avec l'autre, ou est variable avec lui sur l'une de ces courbes.............................. 425 231

Des sections coniques doublement tangentes au système de deux sections données sur un plan.............................. 427 232

Considérations relatives au cas où l'on connaît, soit un point et deux tangentes, soit une tangente et deux points, de la section conique doublement tangente à une autre. 430 234

Nouvelles propriétés de la section conique doublement tangente à une autre, et description de cette courbe par l'intersection continuelle de ses tangentes........... 431 236

Description de la section conique doublement tangente à une autre par le mouvement continu d'un point.............................. 435 238

Cas où la courbe décrite se réduit à un point ou dégénère en des droites............ 437 239

Remarques relatives aux théorèmes qui précèdent, et extension de ces mêmes théorèmes. 438 240

Construction de la section conique doublement tangente à une autre, quand on se donne, soit un point et deux tangentes, soit une tangente et deux points, appartenant à son périmètre.............................. 442 244

Réflexions sur les diverses constructions qui précèdent.............................. 444 246

SECTION IV.

DES ANGLES ET DES POLYGONES.

CHAPITRE Ier. — *Des angles constants ou variables suivant certaines lois, dont le sommet s'appuie au foyer, au périmètre des sections coniques, ou en un point quelconque de leur plan.*

Propriétés principales des *foyers* des sections coniques.............................. 447 249

Du foyer commun des sections coniques, considéré comme centre de projection ou d'homologie.............................. 453 252

N°s — Pag.

Cas où l'une des courbes est un cercle; conséquences qui en résultent pour la description des sections coniques dont le foyer est donné, etc. 457 254
Des angles dont le sommet s'appuie au foyer des sections coniques 461 257
Cas particulier de la parabole 465 259
Conséquences relatives au cas général d'une section conique quelconque: description organique des sections coniques par le mouvement des angles d'ouverture donnée .. 469 261
Relations d'angles qui appartiennent simultanément au système de deux foyers d'une section conique; des angles constants et des polygones équiangles, circonscrits à une telle courbe 477 266
Nouvelles propriétés des angles constants dont le sommet s'appuie au foyer des sections coniques, ou qui sont circonscrits à ces courbes 480 269
Des angles constants, ou variables suivant certaines lois, dont le sommet s'appuie en un point quelconque du périmètre d'une section conique 482 271
Des angles droits dont le sommet s'appuie en un point quelconque du plan d'une section conique, ou qui sont circonscrits à une telle courbe, etc. 486 274

CHAPITRE II. — *Des polygones inscrits et circonscrits à d'autres polygones ou à des sections coniques.*

Du lieu des sommets libres et des points de rencontre des côtés d'un polygone variable, dont les autres sommets parcourent les droites données, tandis que leurs côtés pivotent sur des points fixes 493 281
Cas pour lesquels le lieu des sommets libres et des points de rencontre des côtés s'abaisse au premier degré 497 284
Des courbes enveloppes des côtés libres et des diverses diagonales du polygone 502 288
Cas où les courbes, enveloppes des côtés libres et des diagonales, se réduisent à des points; du lieu des points de rencontre des diagonales 504 290
Des courbes enveloppes du côté libre et des diverses diagonales d'un polygone variable inscrit à une conique, et dont les autres côtés pivotent sur des points fixes quelconques. 510 295
Cas où les courbes enveloppes se réduisent à des points, et où les pôles des côtés sont en ligne droite 513 298
Propriétés des polygones inscrits aux sections coniques, d'un nombre pair de sommets. 515 300
Du lieu des points de rencontre des côtés et des diagonales d'un polygone variable, inscrit à une section conique sous les conditions déjà prescrites dans ce qui précède. 520 303
Des polygones variables circonscrits à une conique, dont les sommets parcourent des droites données comme directrices 524 306
Des polygones variables, à la fois inscrits à des sections coniques et circonscrits à d'autres. 530 311
Cas particulier où les sections coniques directrices sont des cercles, et où le polygone est un simple triangle 531 312
Cas général où l'on considère des sections coniques directrices et des polygones quelconques 534 315

CHAPITRE III. — *Extension des théories précédentes au cas où les directrices sont des courbes d'ordre quelconque, et où certains angles sont constants. — Application des mêmes théories à la solution de quelques problèmes qui s'y rapportent.*

Du lieu du sommet libre et des points de rencontre des côtés d'un polygone variable, dont les autres sommets parcourent des directrices courbes données, et dont les côtés pivotent sur des points fixes quelconques 537 319
Cas pour lequel, tous les points fixes étant sur une même droite, la courbe décrite par le sommet libre s'abaisse à un degré moindre 541 324



N° — Pag.

Cas pour lesquels un ou plusieurs des points fixes se trouvent placés sur les directrices [illegible] 544 326
Cas pour lequel toutes les directrices du polygone variable se trouvent remplacées par une directrice unique........ 547 328
Cas où certains sommets du polygone restent fixes, en même temps que leurs angles mobiles conservent une ouverture constante........ 550 331
Inscription et circonscription d'un polygone à des polygones donnés........ 552 333
Inscription, aux sections coniques, de polygones dont les côtés passent par des points donnés........ 557 338
Circonscription, aux sections coniques, de polygones dont les sommets s'appuient sur les droites données........ 561 342
Cas où les points donnés sont sur une même droite, et où les droites données concourent en un même point........ 563 344
Inscription, à une section conique donnée, d'un polygone qui soit en même temps circonscrit à une autre........ 565 347
Propriétés des polygones à la fois inscrits à une section conique et circonscrits à une autre. 568 350
Réflexions générales sur ce qui précède........ 573 354

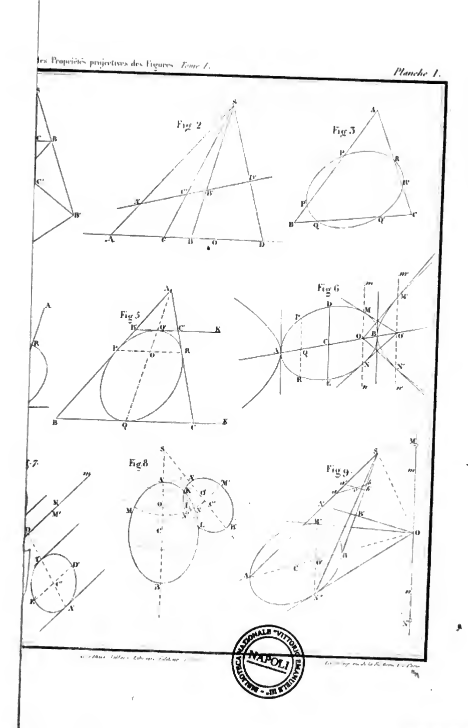
SUPPLÉMENT

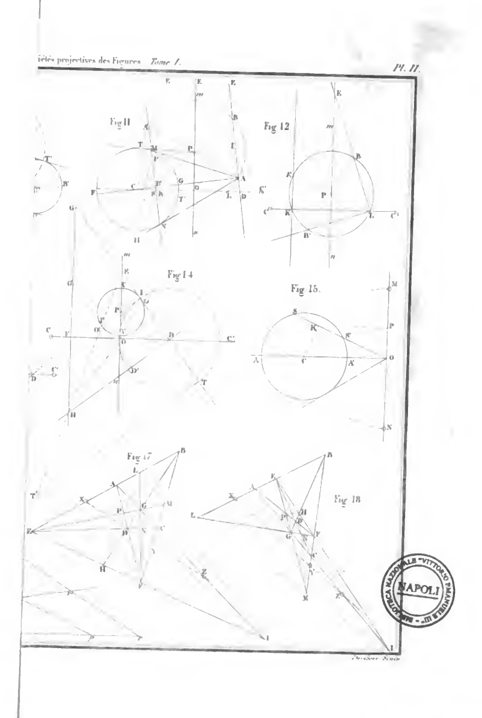
SUR LES PROPRIÉTÉS PROJECTIVES DES FIGURES DANS L'ESPACE.

Des figures *homologiques* dans l'espace, ou de la perspective-*relief*; application au tracé des *bas-reliefs*........ 576 357
Des centres et plans d'homologie, des points, lignes et surfaces polaires des surfaces du second ordre. — Contacts et osculations de ces surfaces........ 587 366
Application de la loi de continuité à la démonstration des principales propriétés des sections planes des surfaces du second degré........ 598 373
Des courbes d'intersection des surfaces du second degré en général; de leurs droites diamétrales conjuguées communes; de leurs sections circulaires et de leurs axes principaux........ 611 382
De la projection ou perspective-relief des surfaces du second ordre les unes dans les autres, et des propriétés générales qui en découlent........ 629 395
Conclusion........ 638 405

Annotations de la seconde édition du *Traité des Propriétés projectives des figures.*

Renvois au corps de l'ouvrage........ Page à page.
Pages XXVIII *de l'Introduction et* 91 *du texte.* — Sur Desargues et Pascal........ 409 — 410
Page 34. — Sur la Géométrie descriptive et analytique à l'école de Monge........ 410 — 413
Page 139. — Sur la nouvelle solution du problème des cercles et des sphères tangents........ 413 — 413
Page 176. — Simple indication ou renvoi........ 413 — 413
Page 184. — Sur les Géométries de la règle et du compas........ 413 — 414
Page 209. — Sur les points ou pôles réciproques des coniques........ 414 — 415
Page 374. — Propositions anomales ou défectives concernant les courbes et surfaces du second degré........ 415 — 419
Page 394. — Lettre de M. Charles Dupin adressée en 1822 à l'auteur du *Traité des Propriétés projectives des figures*........ 419 — 420
Planches I, II, III, IV, V, VI, VII, VIII, IX, X, XI, XII.


Fig. 2
Fig. 3
Fig. 5
Fig. 6
Fig. 8
Fig. 9


Fig 11
Fig 12
Fig 14
Fig 15.
Fig 17
Fig 18

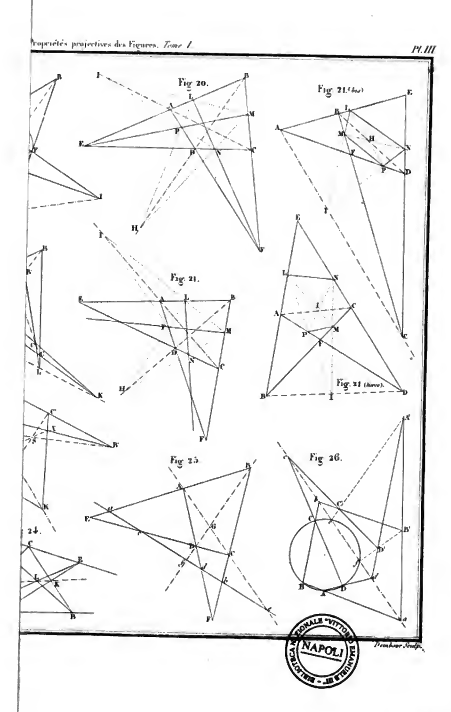

Fig. 20.
Fig. 21.(bis)
Fig. 21.
Fig. 21 (terce).
Fig. 25.
Fig. 26.
24.
Deumbour Sculp.

Fig. 28

Fig. 29.

Fig. 30.

Fig. 33.

Fig. 34.

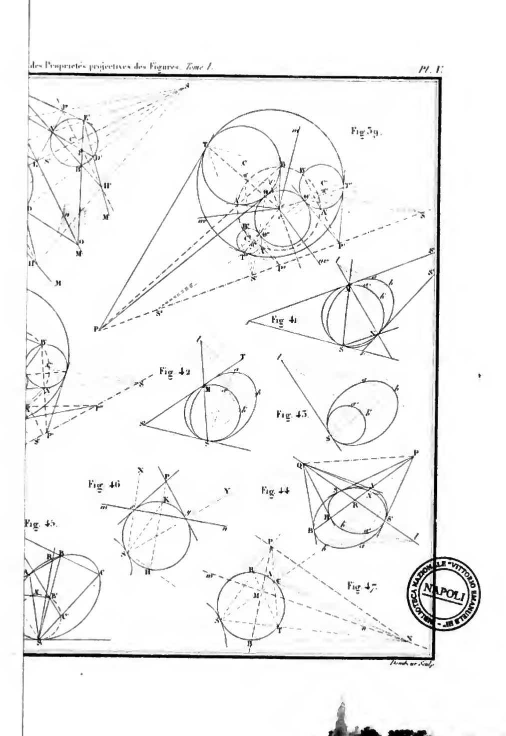
Fig. 35

Fig. 36

Fig. 37.

Bouleur Sculp.




Fig. 39.
Fig. 41
Fig. 42
Fig. 43.
Fig. 46
Fig. 44
Fig. 45.
Fig. 47.

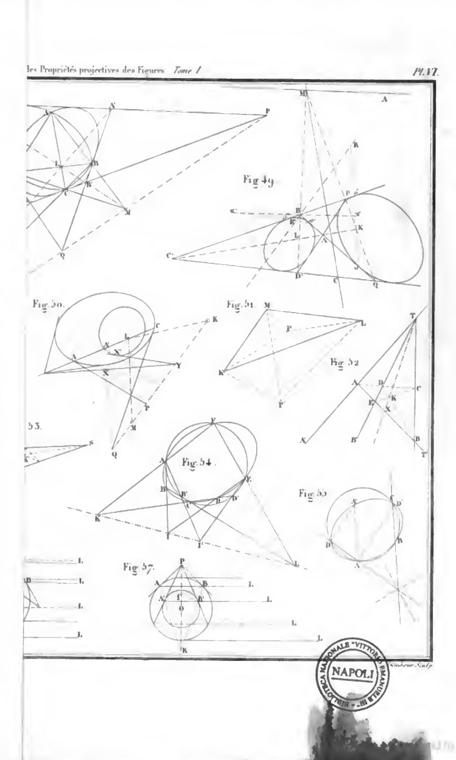

Fig. 49.
Fig. 50.
Fig. 51.
Fig. 52.
53.
Fig. 54.
Fig. 55.
Fig. 57.



Fig 60

Fig 59

Fig 63

Fig 62

Dembour Sculp.

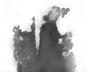


Fig. 65.

Fig. 66.

Fig. 69.

Fig. 67.

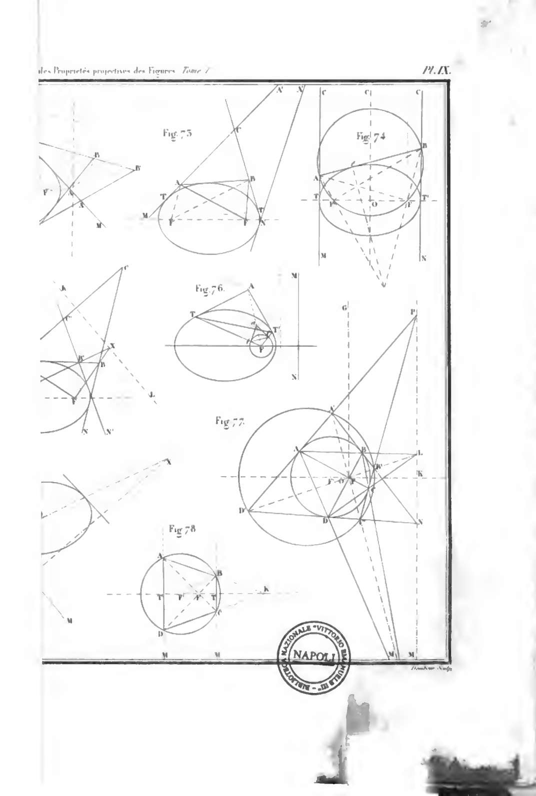
70

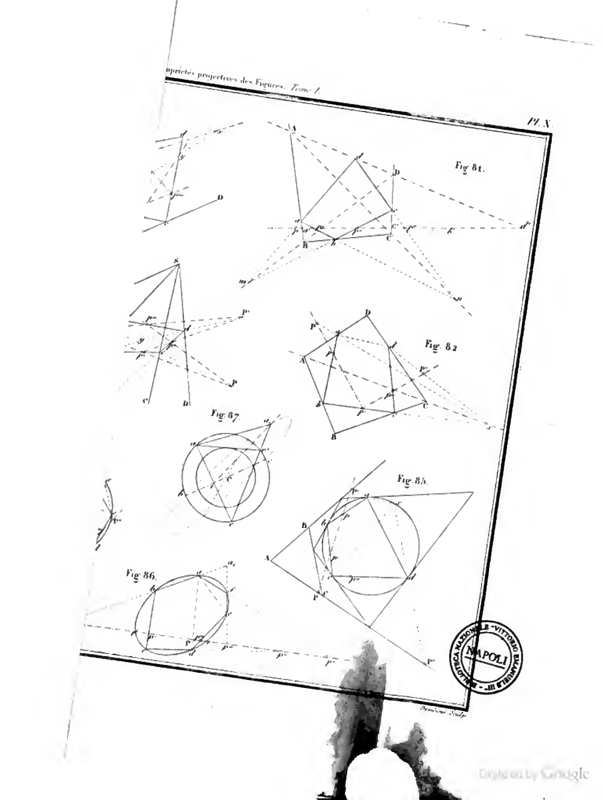
Fig. 71

Dembour Sculp.

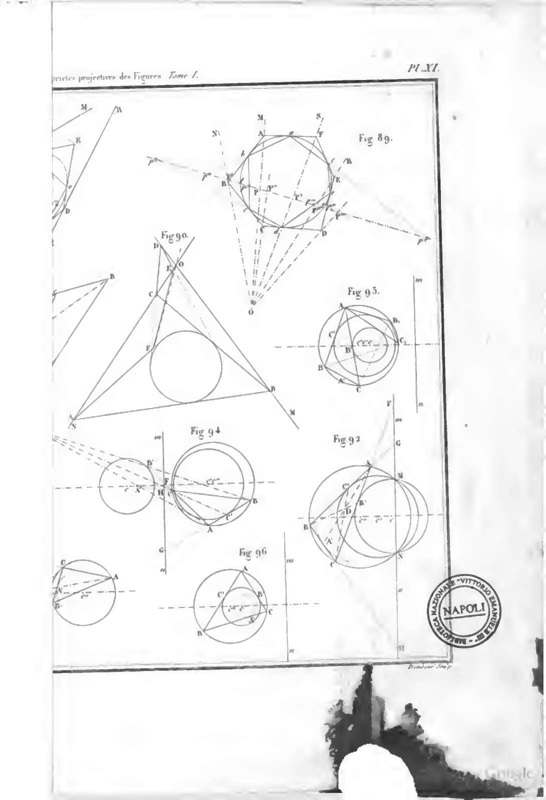


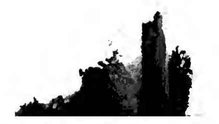


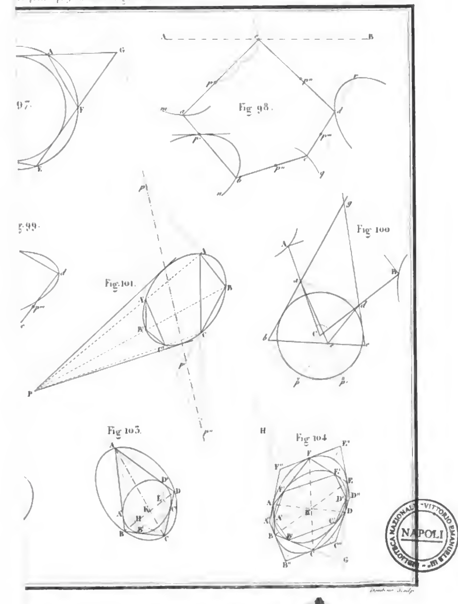

Fig. 73
Fig. 74
Fig. 76.
Fig. 77.
Fig. 78


Fig. 81.
Fig. 82.
Fig. 87.
Fig. 85.
Fig. 86.
Dumesnil Sculp.




Fig 89.
Fig 90.
Fig 93.
Fig 94
Fig 92
Fig 96
Denoune Sculp




Fig. 97.
Fig. 98.
Fig. 99.
Fig. 100
Fig. 101.
Fig. 103.
Fig. 104

Trovate macchiate le Tavole – Verif.to addì 12/11 1880 —

